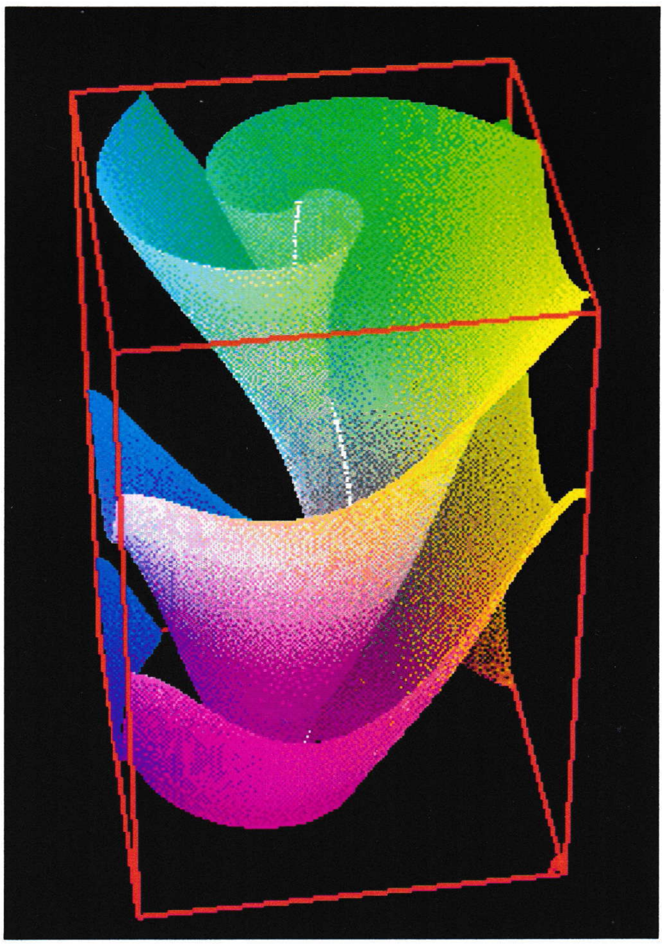
# Sélection des ondes spirales twistées des milieux excitables tridimensionnels.

D. Margerit et D. Barkley
University of Warwick

http://www.maths.warwick.ac.uk/~dmargeri
http://www.maths.warwick.ac.uk/~barkley



Filament twisté

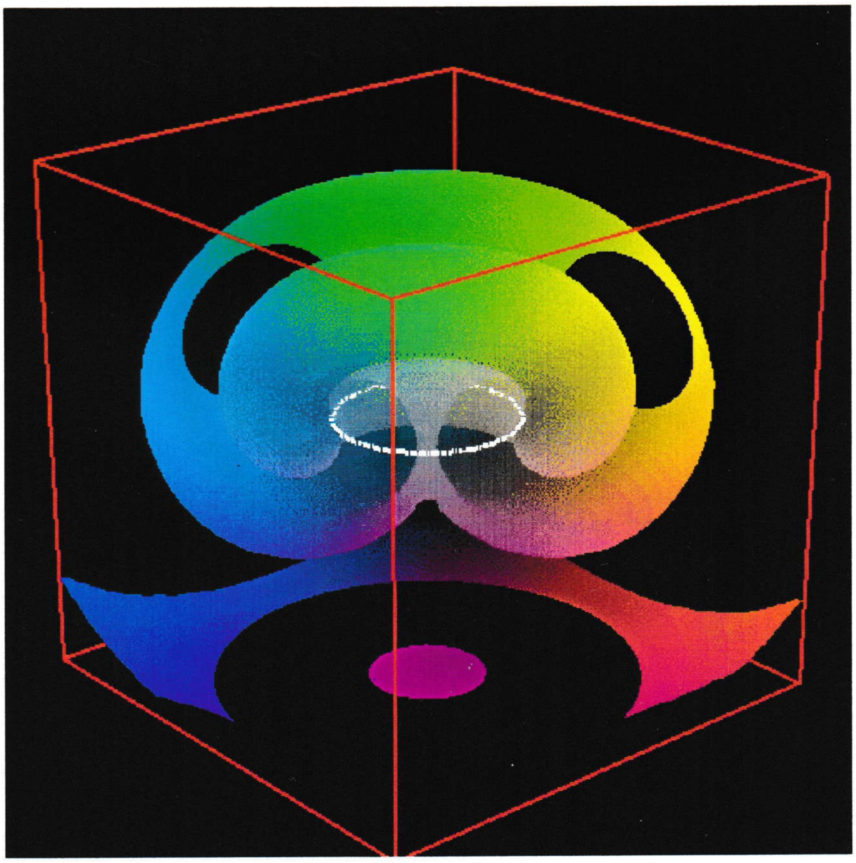
# 1 Milieux Excitables

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 \partial u/\partial t &= \epsilon^2 \nabla^2 u + f(u,v) \\
\partial v/\partial t &= \epsilon g(u,v)
\end{aligned}$$

avec $\epsilon \ll 1$

$f$ et $g$ sont les termes réactifs :

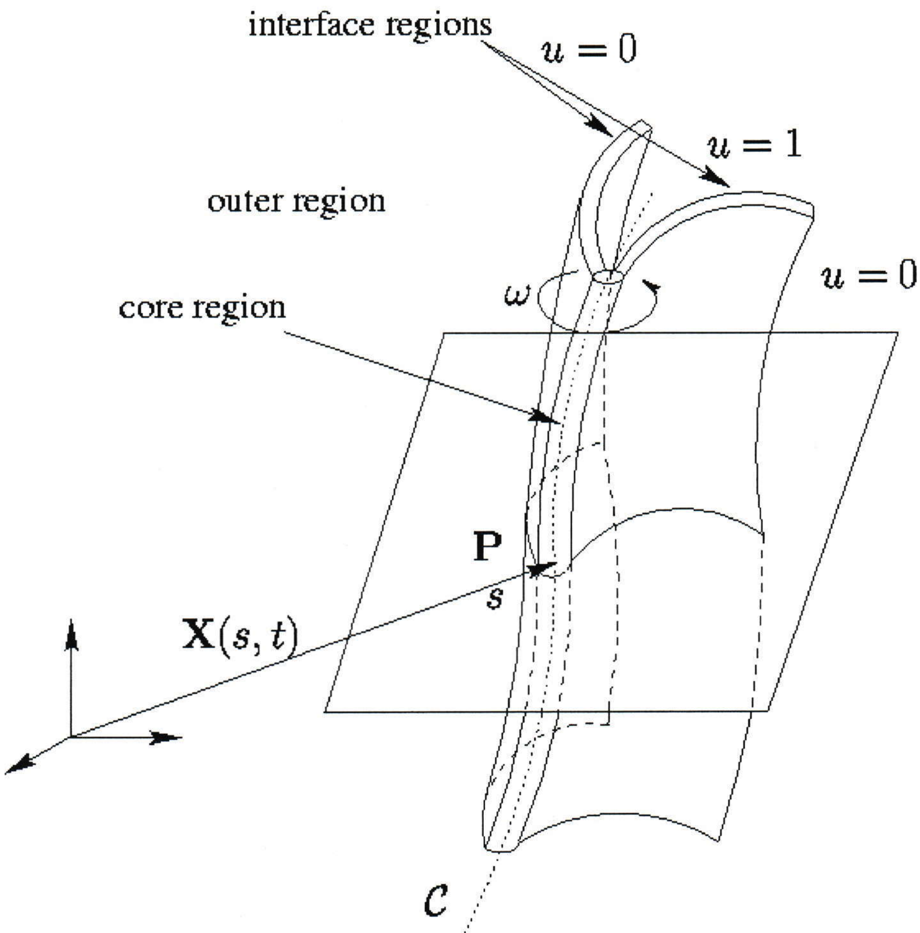
$$\begin{aligned}
f(u,v) &= u\,(1-u)\,(u-u_{th}) \\
g(u,v) &= u - v \\
u_{th} &= (v+b)/a
\end{aligned}$$



Anneau tourbillon

# 2 Résolution asymptotique

- Région extérieure
- Région des interfaces : couche limite surfacique
- Région du filament : couche limite linéique




Régions asymptotiques

- Coordonnées polaires $(r, \varphi)$
- Nappe twistée $(u = 1/2)$ : $\varphi = \Phi^{\pm}(r, s, t)$
- Fréquence $\omega = \dot{\Phi}$

**Quantités dérivées :**

- Fonction $\Psi \equiv r\partial\Phi/\partial r$

- Twist $\tau$ : taux de rotation de l'interface

**Méthode :**

- Développement asymptotiques

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \omega & = & \omega^{(0)} + \epsilon\omega^{(1)} + \ldots \\ \Psi(r) & = & \Psi^{(0)}(r) + \tilde{\epsilon}\Psi^{(1)}(r) + \ldots \end{array}}$$

- Coordonnées pour l'interface, dilatation

- Méthode DAR : ordres 0 et 1

**Résultats :**

- Équations pour $\Psi^{(0)}$ et $\Psi^{(1)}$

- Fréquence : $\omega = \mu/{B^{(0)}}^{2/3} + \epsilon D/a + \ldots$

## Équation de l'interface :

$$\boxed{\begin{aligned} q\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi(1+\Psi^2)}{r} \quad &= \quad r(q+\Psi^2) \\ &\quad -\Lambda(q+\Psi^2)^{3/2} + O(\epsilon^2), \end{aligned}}$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda &= B - \tilde{\epsilon}(5/3)\sqrt{q+\Psi^2}/r, \\ q &= 1+\tau^2 r^2, \\ \tilde{\epsilon} &= \epsilon/(a\omega), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= (\mu/\omega)^{3/2}, \\ \mu^{3/2} &= \sqrt{2}\pi v^s(1-v^s)/a, \\ v^s &= a/2 - b. \end{aligned}$$

## Angle entre les interfaces :

$$\Delta\Phi = \Phi^- - \Phi^+ = 2\pi(1-v^s) + O(\epsilon^2).$$

## Ordre principal :

$$\boxed{\begin{aligned} q\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial r} + \frac{\Psi^{(0)}(1+{\Psi^{(0)}}^2)}{r} \quad &= \quad r(q+{\Psi^{(0)}}^2) \\ &\quad -B^{(0)}(q+{\Psi^{(0)}}^2)^{3/2} \end{aligned}}$$

**Ordre 1 :**

$$\boxed{q\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} + l(r)\Psi^{(1)} = m(r),}$$

où

$$\begin{aligned}
l(r) &= \frac{1}{r} + r\Psi^{(0)} \\
&\quad +3\Psi^{(0)}\left[\frac{\Psi^{(0)}}{r} - r + B^{(0)}\sqrt{q+{\Psi^{(0)}}^2}\right], \\
m(r) &= Dm_1(r) + m_2(r) \\
m_1(r) &= r(q+{\Psi^{(0)}}^2) + B^{(0)}(q+{\Psi^{(0)}}^2)^{3/2}, \\
m_2(r) &= \frac{5}{3}\frac{(q+{\Psi^{(0)}}^2)^2}{r}.
\end{aligned}$$

Solution Générale :

$$\Psi^{(1)}(r) = \Psi_h^{(1)}(r)\left(A + \int_0^r \frac{m(r^*)}{\Psi_h^{(1)}(r^*)}dr^*\right),$$

où $A$ est une constante et

$$\Psi_h^{(1)} = \frac{\left(q+{\Psi^{(0)}}^2\right)^{3/2}}{qr}\exp\left(-\int_0^r \frac{\rho\Psi^{(0)}}{1+\tau^2\rho^2}d\rho\right).$$

Le comportement en l'infini implique :

$$D = -\frac{c_2}{c_1} \quad \text{où} \quad c_i = \int_0^\infty \frac{m_i(r^*)}{\Psi_h^{(1)}(r^*)}dr^*.$$

# 3 Résolution numérique

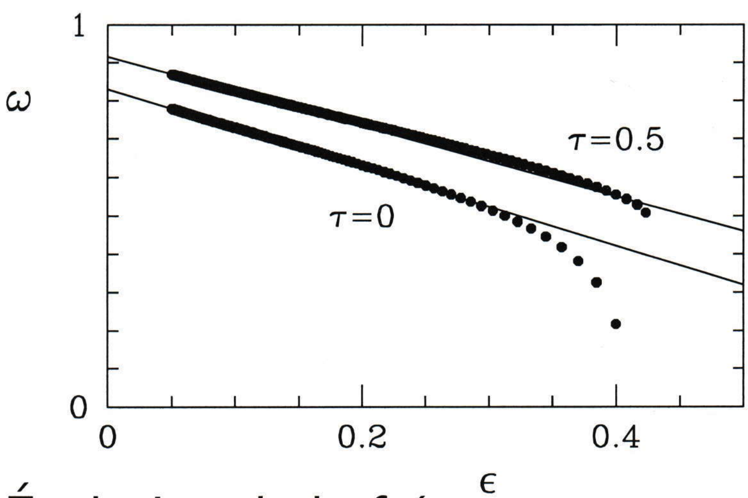
**Problème stationnaire :**

$$\begin{aligned}
-\omega\epsilon^2 \partial u/\partial\varphi &= \epsilon^2 \Delta u + f(u,v),\\
-\omega \partial v/\partial\varphi &= \epsilon g(u,v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \Delta u &= \partial^2 u/\partial r^2 + (1/r)\partial u/\partial r + (q/r^2)\partial^2 u/\partial\varphi^2,\\
q &= 1+\tau^2 r^2.
\end{aligned}$$

**Méthode numérique :**

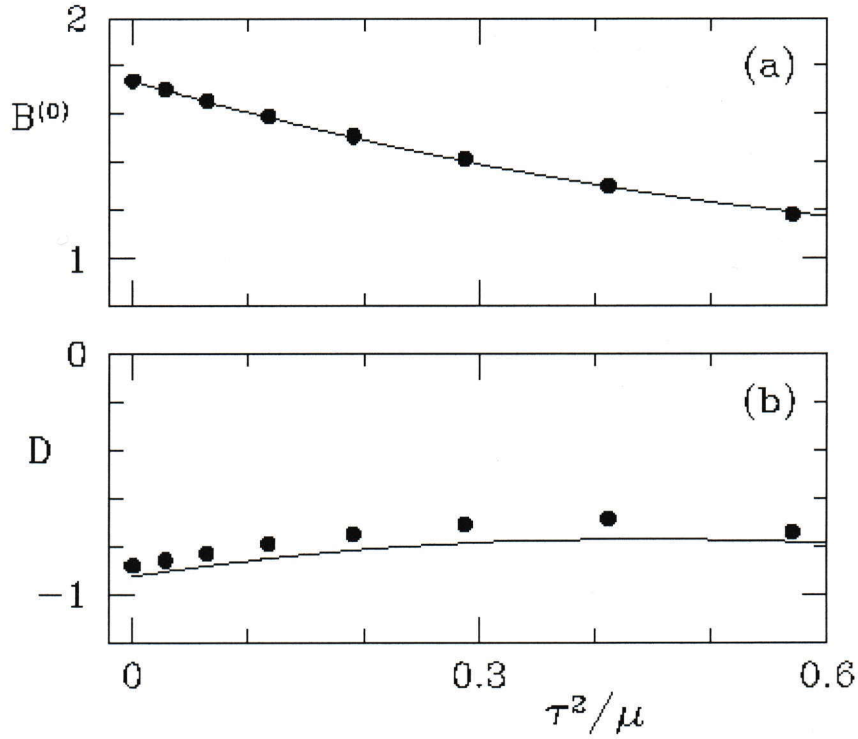
- *Méthode spectrale* en $\varphi$
- *Différences finies* du $2^{ieme}$ ordre en $r$
- *Méthode de Newton* pour $\omega$



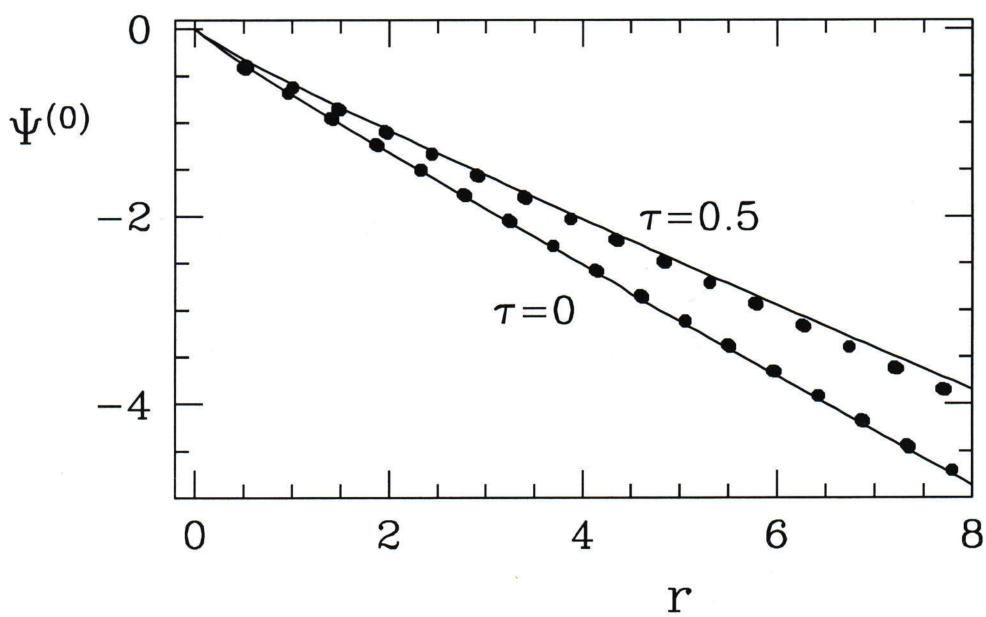

Évolution de la fréquence $\omega$ avec $\epsilon$

a=0.8, b=0.1

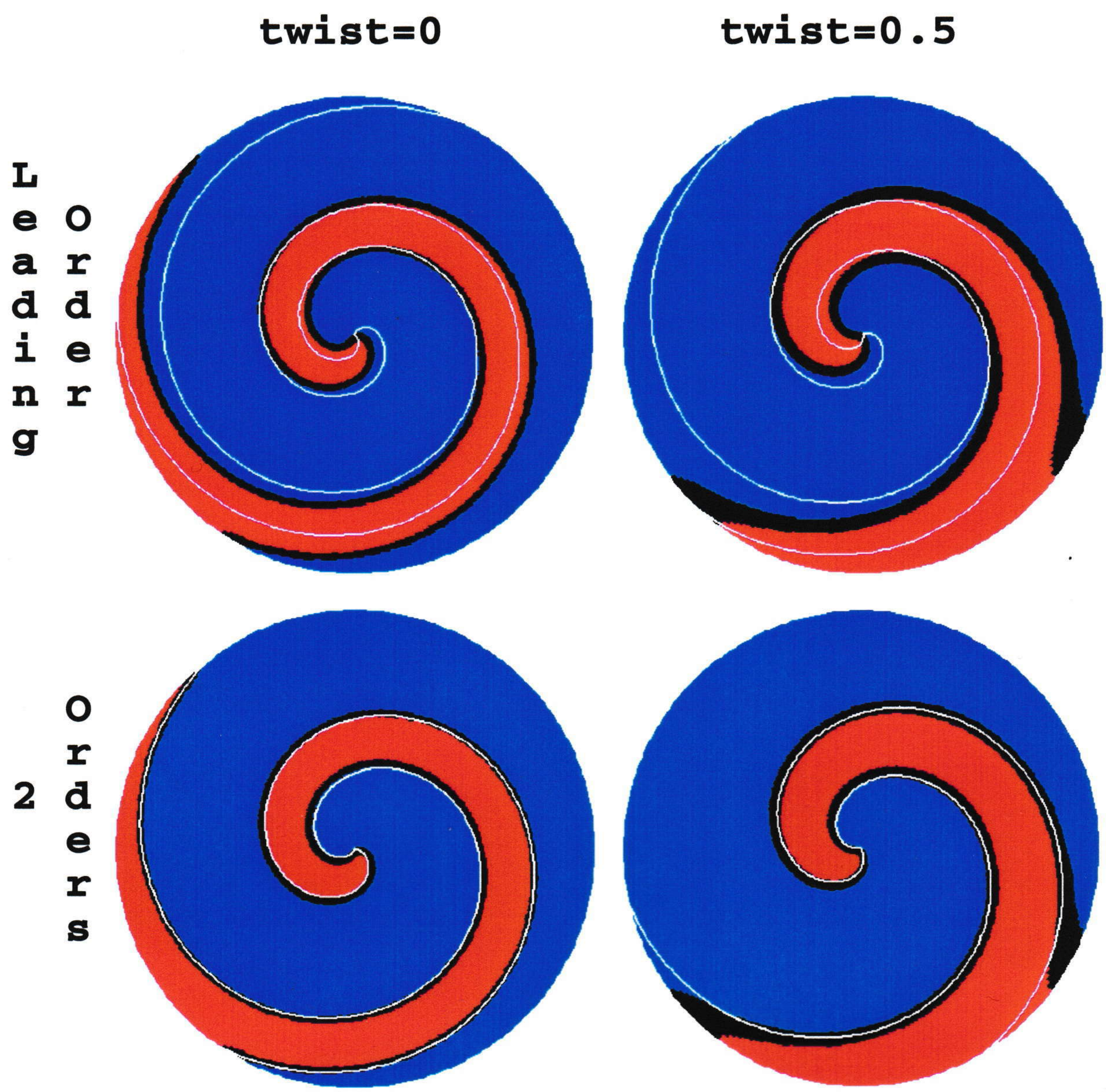
# 4 Confrontation quantitative




Sélection de la fréquence : —Asymptotique, • numérique




Comparaison de l'ordre 0 : —Asymptotique, • numérique




Sélection de la forme de spirale: $\varepsilon=0.1$
$a=0.8, b=0.1$

# References

[1] D. Barkley. A model for fast computer simulation of waves in excitable media. *Physica D*, 49:61–70, 1991.

[2] A. Karma. Scaling regime of spiral wave propagation in single-diffusive media. *Physical Review Letters*, 68(3):397–400, 1992.

[3] A.J. Bernoff. Spiral wave solutions for reaction-diffusion equations in a fast reaction/slow diffusion limit. *Physica D*, 53:125–150, 1991.