Une Etude d'un Anneau de Vorticité par Développement Asymptotique Raccordé (DAR)

Introduction

→ Approche de la dynamique de la vorticité : l'un des moyens des plus fondamentals de compréhension du mouvement des fluides.

→ Après s'être interessé à la vorticité en général (rapport bibliographique), on a étudié le cas particulier d'un "anneau tourbillon" à vorticité concentrée par un DAR

Plan de l'exposé

I Présentation de l'anneau de vorticité

II Le déroulement des calculs et les équations finales

III Résolution Numérique et Résultats.

I

Présentation de l'anneau de vorticité

① Généralités sur la vorticité :

* vecteur vorticité :

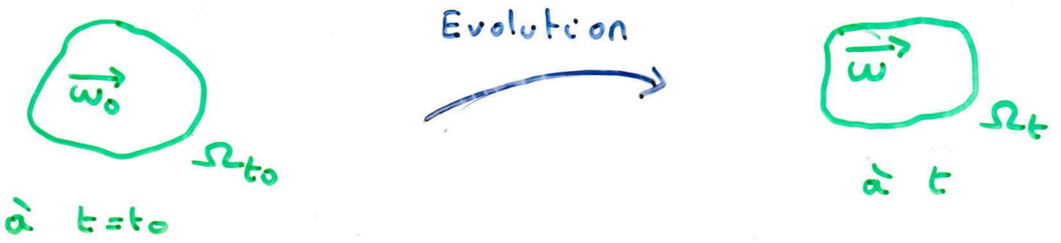
$$\vec{\omega} = \vec{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\Omega}$$

NavierStokes + Equa. Continuité $\Rightarrow$:

$$\text{div}\,\vec{\omega} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \nu \Delta \vec{\omega}$$

équation de la vorticité

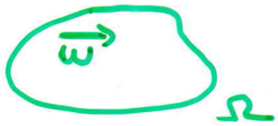


* Formule de Biot :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \quad \text{avec} \quad \text{div}\,\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta \vec{A} = \vec{\omega} \quad \text{équation de poisson}$$

$$\xrightarrow[\text{Convolution}]{\text{Solution élementaire}} \quad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\omega(\underset{\sim}{\xi})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi}|}\, d\underset{\sim}{\xi}$$



$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}(\xi) \wedge (\vec{x} - \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^3}\, d\underset{\sim}{\xi}}$$

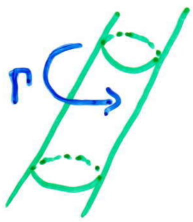
$$\vec{v} \rightleftarrows \vec{\omega}$$

* Cas $\nu = 0$:

→ Equations d'Helmoltz et de Cauchy.

→ Théorèmes de Kelvin, de Lagrange et d'Helmoltz : $\vec{\omega}$ est gelé dans le fluide

→ Intensité d'un tube tourbillon

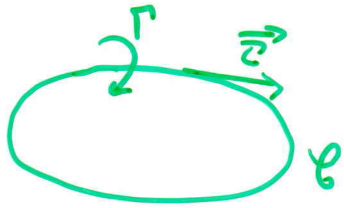


Le tube est fermé :

vorticité que dans un tube ⇒ Anneau tourbillon.

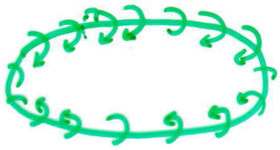
② Filet tourbillon :

* Vorticité concentrée sur une fibre $\mathcal{C}$:



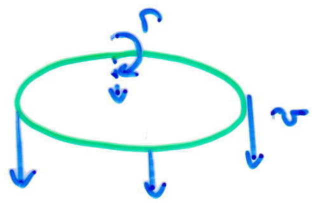
$$\vec{\omega} = \Gamma \, \delta_{\mathcal{C}} \, \vec{\tau} \quad \text{où} \quad \langle \delta_{\mathcal{C}}, \varphi \rangle = \oint_{\mathcal{C}} \varphi(s) \, ds .$$

Biot $\Longrightarrow$ $$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{\tau} \wedge (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi}|^3} \, d\underset{\sim}{\xi}$$



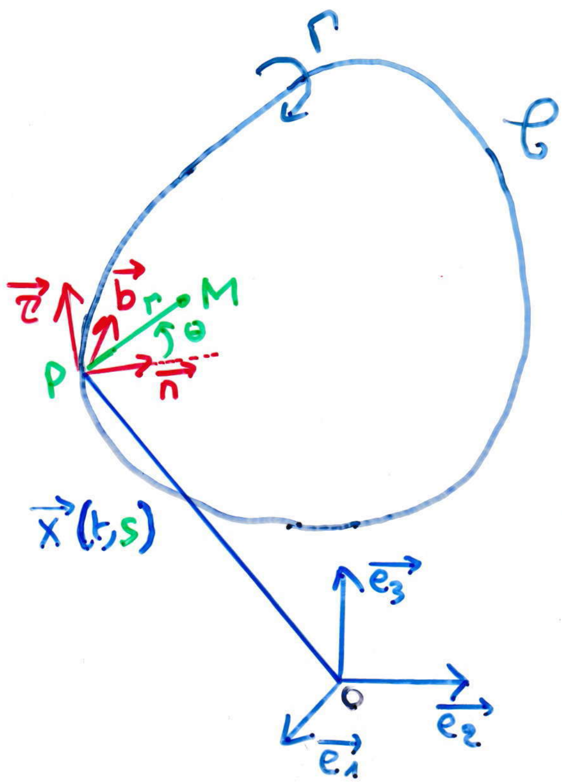
anneau des fumeurs.

* Evolution de la fibre ?



$\longrightarrow$ vitesse induite

$\longrightarrow$ coordonnées curvilignes + dev. limité :



$(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$

(s, r, θ)

$(\vec{\tau}, \vec{r}, \vec{\theta})$

$\vec{OM} = \vec{x}$

$\vec{OP} = \vec{X}$

$$\vec{x} = \vec{X}(s) + r \, \vec{r}(\theta, s)$$

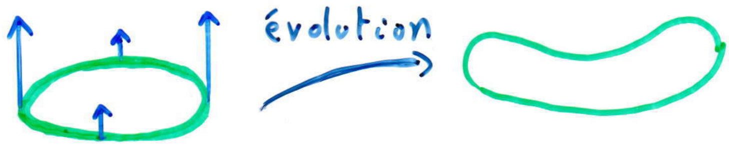
dev. limité en $r=0 \Rightarrow$:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{\theta} + \frac{\Gamma K}{4\pi}\left[\ln\frac{2\sqrt{s^+s^-}}{r} - 1\right]\vec{b} + \frac{\Gamma K}{4\pi}\cos\phi\,\vec{\theta} + \underline{\underline{Q_f}}}$$

terme constant à exprimer.

C'est donc singulier en $r=0 \rightarrow$ pas de détermination de l'evolution.

ellipse :



③ Anneau de faible épaisseur :

v et $\vec{\omega}$ confinés autour d'une fibre centrale $\mathcal{C}$.

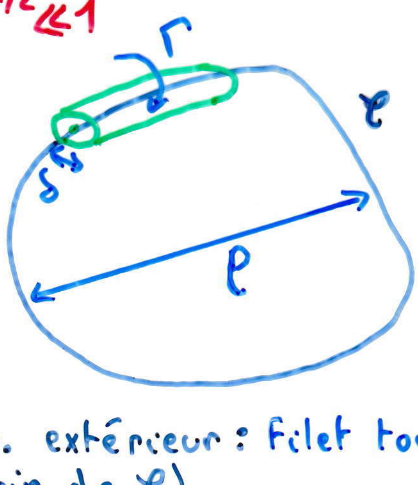
$Re = \Gamma / \nu$

petit paramètre : $\varepsilon = (Re)^{-1/2} \ll 1$

$\delta / \ell = O(\varepsilon)$

$\Gamma = O(U\ell)$

$X_t = O(U)$



δ : "épaisseur"

ℓ : longueur caracté.

U : vitesse caracté.

(couche limite de vorticité) $\longrightarrow$

* Pb. extérieur : Filet tourbillon (loin de $\mathcal{C}$)

* Pb. intérieur : Variable de dilatation : $\bar{r} = r/\varepsilon$

Raccordement

Conditions limites en $\bar{r} = 0$:

$$\left\| \begin{array}{l} [X_t - v(t,X)] \wedge \vec{\tau} = 0 \\ \vec{X_t} \cdot \vec{\tau} = 0 \end{array} \right.$$

II

Le déroulement des calculs et les équations finales.

① **Problème extérieur :** Biot + dl en r = 0 : le filet tourbillon.

② **Problème intérieur :**

21 Equations en coordonnées curvilignes:

* $\boxed{\vec{v} = \dot{X} + \vec{V}}$ $\quad \vec{V} = u\,\vec{r} + v\,\vec{\theta} + w\,\vec{\tau}$

radiale circumférentielle axiale.

* Conservation de la masse :

$$\boxed{(u r h_3)_r + (h_3 v)_\theta + r w_s + r \dot{X}_s \vec{\tau} = 0}$$

où $h_3 = 1 - rK\cos\phi$

* Navier Stokes :

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\dot{X}_s}{h_3}\left(w - r\,\vec{r}_t \cdot \vec{\tau}\right) + \frac{d^R V}{dt} = -\vec{\nabla} p + \frac{\nu}{h_3}\left(\frac{1}{h_3}\dot{X}_s\right)_s + \nu \Delta \vec{V}}$$

22 Forme des Dév. Asymptotiques:

$$u(t,\bar{r},\theta,s,\varepsilon) = \qquad u^{(1)}(t,\bar{r},\theta,s) + \varepsilon\, u^{(2)} + \dots$$

$$v(t,\bar{r},\theta,s,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\, v^{(0)}(t,\bar{r},\theta,s) + v^{(1)}(t,\bar{r},\theta,s) + \varepsilon\, v^{(2)} + \dots$$

$$w(\ ,\bar{r},\theta,s,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\, w^{(0)}(t,\bar{r},\theta,s) + w^{(1)}(t,\bar{r},\theta,s) + \varepsilon\, w^{(2)} + \dots$$

$$p(t,\bar{r},\theta,s,\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\, p^{(0)}(t,\bar{r},\theta,s) + \varepsilon^{-1}\, p^{(1)} + \dots$$
$$\vec{\omega}(t,\bar{r},\theta,s,\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\, \omega^{(0)}(t,\bar{r},\theta,s) + \varepsilon^{-1}\, \omega^{(1)} + \dots$$
$$\vec{X}(t,s,\varepsilon) = X^{(0)}(t,s) + \varepsilon X^{(1)} + \dots = h_3^{(0)} + \varepsilon h_3^{(1)} + \dots$$

(0): ordre principal (1): 1er ordre (2): second ordre.

$\mathcal{S} = \vec{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{\tau}$

23 Déroulement des calculs:

$$\mathrm{DA} \to \text{Equations} \xrightarrow{\text{masse}} \boxed{C_0}\,\varepsilon^{-1} + \boxed{C_1} + \dots = 0$$
$$\text{Equations} \xrightarrow[\text{Stokes}]{\text{Navier}} \boxed{\vec{C}_0}\,\varepsilon^{-3} + \boxed{\vec{C}_1}\,\varepsilon^{-2} + \dots = \vec{0}$$

C_0, $\vec{C}_0$ = 0 : équations à l'ordre principal

C_1, $\vec{C}_1$ = 0 : équations au premier ordre.

* équa. à l'ordre principal : $C_0 = 0$ $\vec{C}_0 = 0$ projeté sur $\vec{r}^{(0)}, \vec{\theta}^{(0)}, \vec{P}^{(0)}$
  $\to v_{/\theta}^{(0)} = 0 \dots$

* équa. au 1er ordre : $F_c = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta$ $\quad F = \underset{\text{sym}}{F_c} + \underset{\text{antisym.}}{F_a}$

  + Symétrique : on fait : $\int d\theta \Rightarrow$ equa de compatibilités.
    cas particulier : $v^0(t,\bar{r})$ et $\omega^0 = \omega^0(t,\bar{r})$

  + antisymétrique :
    Fonction de courant Ψ
    Elimination de $p^{(1)}$
    $\Rightarrow$ Equation en Ψ : séparation des variables (séries de Fourier) + cl en $\bar{r} = 0$ $\to$ solution.

* raccordement :
  - DL de cette solution en $\bar{r} = \infty$.
  - DL de la solution extérieur en $r = 0$ (exprimer en Ψ)

  $\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{X}^{(0)}\cdot b^{(0)} &= \frac{\Gamma K^{(0)}}{4\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon} + Q_f\cdot b^{(0)} + K^{(0)} C^* \\ \dot{X}^{(0)}\cdot n^{(0)} &= Q_f\cdot n^{(0)} \qquad \dot{X}^{(0)}\cdot \tau^{(0)} = 0 \end{aligned}} \quad (1)$$

$C^*(t)$ est exprimé sous forme d'$\int$ de $v^{(0)}$ et $\omega^{(0)}$

Évolution de $\mathcal{C}$: $X^{(0)} \xleftrightarrow{\text{lien}}$ vitesses : $v^{(0)}, \omega^{(0)}$

Rem : dégénéressence : pas de $\ddot{X} \Rightarrow$ CI : $\vec{X}(0,s)$

* équations au 2ième ordre : $X(t, s+S) = X(t,s)$ periodicité.

On fait $\int d\theta$ et $\int ds \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_t^{(0)} - \Gamma \frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}\,\omega_{\bar{r}}^{(0)}\right)_{\bar{r}} &= \frac{1}{2}\,\bar{r}^3\left(\frac{\omega^{(0)}}{\bar{r}^2}\right)_{\bar{r}} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \\ v_t^{(0)} - \Gamma\left[\frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}\,v_{\bar{r}}^{(0)}\right)_{\bar{r}} - \frac{v^{(0)}}{\bar{r}^2}\right] &= \frac{1}{2}\left(\bar{r}\,v^{(0)}\right)_{\bar{r}} \frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \end{aligned}} \quad (2)$$

$S^{(0)}(t)$: longueur de $\mathcal{C}$.

vitesses : $v^{(0)}, \omega^{(0)} \xleftrightarrow{\text{lien}}$ Évolution de $\mathcal{C}$: $S^{(0)}$ et $\dot{S}^{(0)}(t)$.

(1) et (2) : Système couplé complet d'équations.

résolution de (2) : + changement de fonctions et de variables :
$\Rightarrow$ une même équation pour les deux.

+ séparation de variables + chgt de variable :
$\Rightarrow$ équa diff de Laguerre : solu = polynome de Laguerre L_n

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega^{(0)} &= \frac{1}{s^{(0)}}\, e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\eta^2)\, \tau_1^{-(n+1)} \\ \psi^{(0)} &= s^{(0)}\, e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n L_n(\eta^2)\, \tau_1^{-(n+1)} \end{aligned}}$$

$$\eta = \bar{r}\sqrt{\frac{s^{(0)}(t)}{4\Gamma\, \tau_1(t)}} \qquad \tau_1 = \int_0^t s^{(0)}(t')\,dt' + \tau_{10}$$

τ_{10} : constante arbitraire (une pour chaque équation).

Choix optimal de τ_{10} : on annule C_1 et D_1.

C_n et D_n données par les CI.

CI telles que seul C_0 et $D_0 \neq 0$ Anneau similaire

Il dépend de ε, Γ, τ_{10} et $m(0) = 2\pi\int_0^{\infty} \bar{r}\,\omega^{(0)}(0,\bar{r})\,d\bar{r}$.

24 Equation Finale : anneau similaire.

$$\boxed{X_t(t,s) = Q^{*}(t,X) + \frac{\Gamma K}{4\pi}\left[\ln\frac{1}{\varepsilon} + C_v(t)\right]\vec{b} + \frac{\Gamma K}{4\pi} C_\omega(t)\,\vec{b}}$$

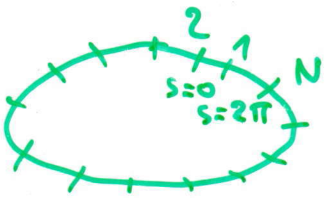
$+ \ldots$

III

Résolution numérique et Résultats

équation simplifiée : $X_t = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(1/\varepsilon)\, \kappa \vec{b}$

* **Discrétisation spatiale :** différences finies.



$ds = 2\pi/N$

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x^i) \simeq \frac{a(x^{i+1}) - a(x^{i-1})}{2\,ds}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \simeq \frac{a(x^{i+1}) - 2a(x^i) + a(x^{i-1})}{(ds)^2}$$

* **Discrétisation temporelle :** methode d'Euler.

$t = (k+1)dt \qquad X^i_{,t} \simeq \frac{X^{i,k+1} - X^{i,k}}{dt}$

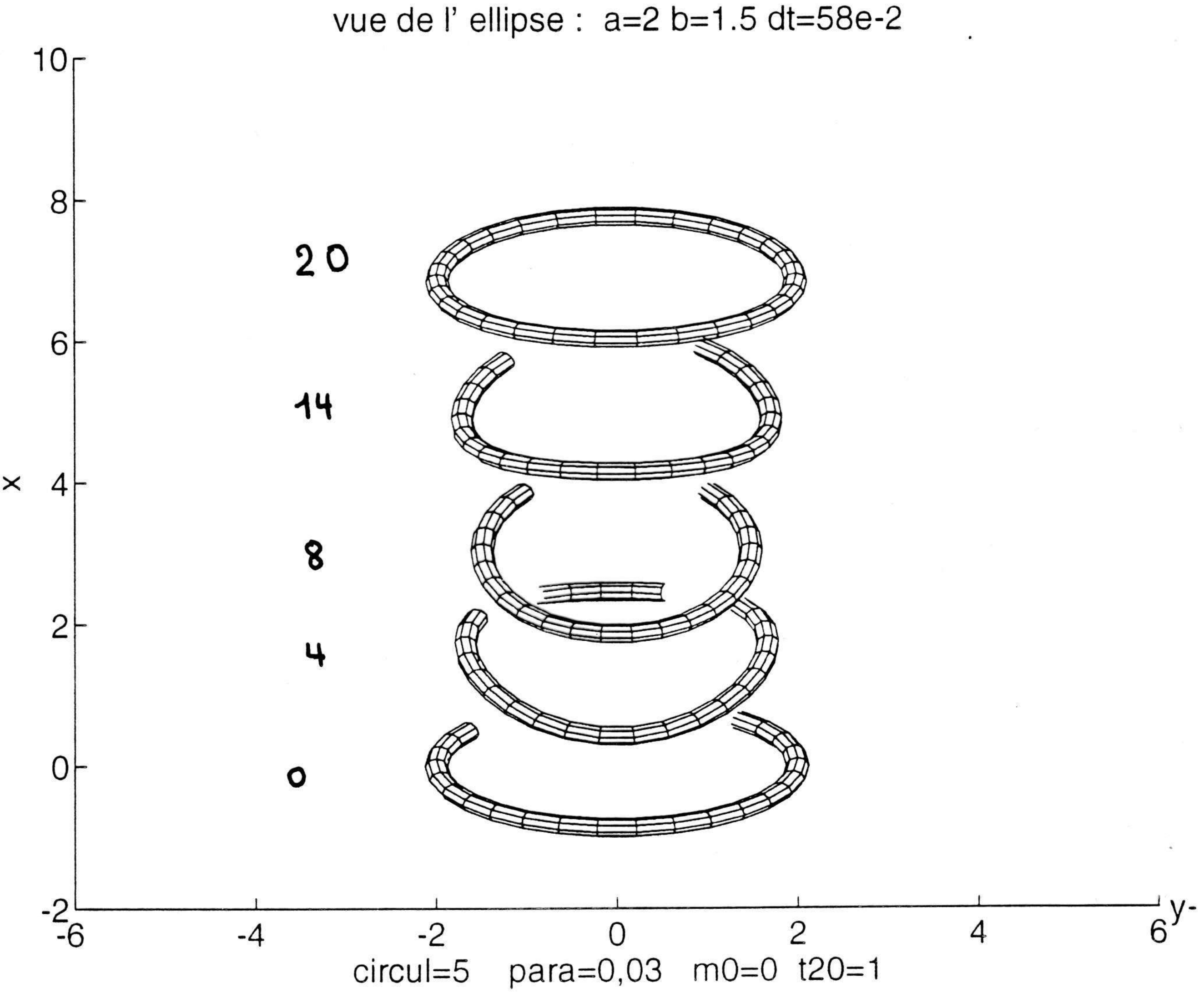
* **Equation discrete :** on choisit une méthode implicite.

$$\frac{X^{i,k+1} - X^{i,k}}{dt} = \alpha \ln(1/\varepsilon) \left| \frac{X^{i+1,k+1} - X^{i-1,k+1}}{2ds} \right|^{-3} \cdot \left[\frac{X^{i+1,k+1} - X^{i-1,k+1}}{2ds} \wedge \frac{X^{i+1,k+1} - 2X^{i,k+1} + X^{i-1,k+1}}{(ds)^2} \right]$$

avec $\alpha = \Gamma/4\pi$

Non linéaire $\Rightarrow$ methode itérative de recherche de zero

$\int$ spatiale et $\int$ temporelle $\Rightarrow$ methode des trapèzes.


vue de l' ellipse : a=2 b=1.5 dt=58e-2
10
8
6
4
2
0
-2
x
20
14
8
4
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
y-
circul=5 para=0,03 m0=0 t20=1