Annexe 1

L' Ellipse de vorticité

I Enoncé du problème :

On considère un écoulement bidimensionnel. Soit (O, x, y) le repère de ce plan muni de la base orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{V}$ la vitesse de l'écoulement et $\vec{\omega}$ la vorticité.

$$\vec{V} = (u, v, 0) \qquad \vec{\omega} = (0, 0, \omega).$$

$\vec{\omega} = \vec{Rot}\,\vec{V}$ d'où $\omega = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$.

$\operatorname{div} \vec{V} = 0$ d'où l'existence d'une fonction Ψ telle que $u = -\left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_x$ et $v = +\left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_y$.

On a donc $\vec{V} \cdot \vec{grad}\,\Psi = 0$ Or $\vec{grad}\,\Psi$ est orthogonal aux lignes à Ψ constant donc il y a identité entre ligne de courant et ligne à Ψ constant.

On a $\omega = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta \Psi$

1) Equation :

C'est l'équation de la vorticité

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{Rot}(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) + \cancel{\nu \Delta \vec{\omega}} + \cancel{\vec{Rot}\,\vec{f}}$$

avec la condition aux limites $\omega = 0$ en $+\infty$.

$\operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \vec{\omega} = 0$ d'où $\operatorname{rot}(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}$

On a donc : $\operatorname{rot}_z(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot \nabla V_z - \vec{V} \cdot \nabla \omega_z$

$$= -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y}.} \qquad \omega = 0 \text{ en } +\infty.$$

$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0}$ Le champ $\vec{\omega}$ est gelé dans la matière et se déforme avec elle.

Équation qui s'écrit en Ψ :

$$\boxed{\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial y}}$$

Ψ est définie à une constante près.

2) Condition initiale :

A l'instant $t=0$ on connaît la répartition de la vorticité.

Soit Ω l'intérieur de l'ellipse d'équation :

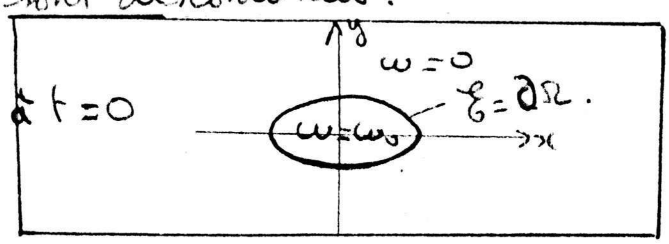
$\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$ où a et b sont donnés.

A $t=0$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega = \omega_0 \text{ dans } \Omega \\ \omega = 0 \text{ à l'extérieur de } \Omega \end{array}} \quad (\omega_0 \text{ donné})$$

On remarque que la fonction $\omega(x, y, 0)$ n'est pas dérivable en tout point du plan. Les fonctions dérivées de ω sont discontinues.

Problème :

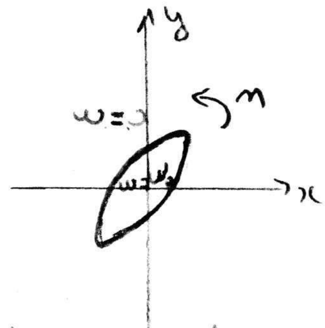


On a donc une équation aux dérivées partielles muni de ses conditions aux limites et de sa condition initiale. Ceci définit donc le problème d'évolution à résoudre.

II Solution du problème :

> Il s'avère que la solution du problème correspond à une rotation en bloque du champ de vorticité initial à une vitesse angulaire Ω.

à t .



Il y a rotation à une vitesse angulaire Ω de la frontière elliptique de vorticité sans modification de la forme de celle-ci.
Il reste donc à vérifier que sous cette hypothèse toutes les conditions du problème seront satisfaites et à trouver la valeur de Ω.

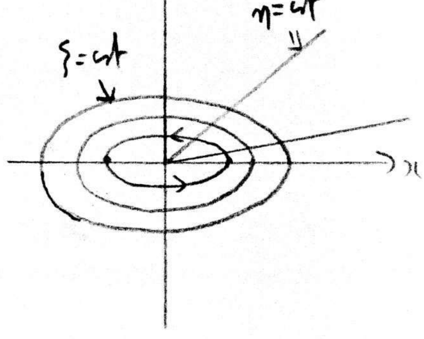
III Vérification de la solution proposée :

1) Coordonnées elliptiques :

On définit de nouvelles coordonnées curvilignes (η, ξ) (dites coordonnées elliptiques) pour repérer le plan, à l'aide des formules :

$$\begin{cases} x = c\cosh\xi\cos\eta \\ y = c\sinh\xi\sin\eta \end{cases}$$

où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

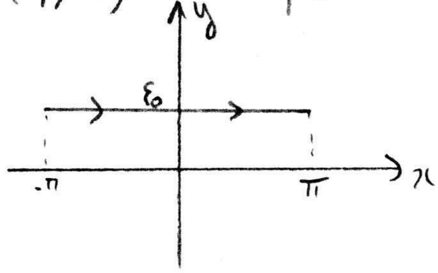


Pour l'ellipse : $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$

d'où $\left|\begin{array}{l} x_0 = a\cos\eta \\ y_0 = b\sin\eta \\ \underline{\eta\in[-\pi,\pi]} \end{array}\right.$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{l} \cosh\xi_0 = \dfrac{a}{c} \\ \sinh\xi_0 = \dfrac{b}{c}. \end{array}}$

On a bien $\cosh^2\xi_0-\sinh^2\xi_0 = \dfrac{a^2}{c^2}-\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{a^2-b^2}{c^2} = 1$.

Dans le plan (η,ξ) l'ellipse devient une demi-droite :



Soient $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ les vecteurs de base des coordonnées (η,ξ)

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\right|_\xi \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\right|_\xi \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})} = \begin{pmatrix} -c\cosh\xi\sin\eta \\ c\sinh\xi\cos\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$$

Si on appelle $A = c\cosh\xi\sin\eta$ et $B = c\sinh\xi\cos\eta$.

$$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right|_\eta \\ \left.\dfrac{\partial y}{\partial\xi}\right|_\eta \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})} = \begin{pmatrix} c\sinh\xi\cos\eta \\ c\cosh\xi\sin\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$$

On a donc $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = -AB+BA = 0$.

Les coordonnées elliptiques sont <u>orthogonales</u>.

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_2} = A^2+B^2 = c^2(\cosh^2\xi\sin^2\eta+\sinh^2\xi\cos^2\eta)$$
$$= c^2(\cosh^2\xi-\cos^2\eta)$$

Soit g_{ij} la matrice $g_{ij} = \vec{e_i}\cdot\vec{e_j}$.

g_{ij} est le tenseur métrique fondamental.

Soit g le déterminant de $\vec{\vec{g}}$: $g = g_{11} g_{22} = g_{11}^2$.
On a $\sqrt{g} = g_{11}$.

Comme les coordonnées elliptiques sont orthogonales on a la relation :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial f}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\right)$$

Ici $\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} = \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} = 1$ d'où :

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}\right)}$$

2) <u>Repère tournant</u> :

Soit $\vec{V}'$ la vitesse dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire n.
Soit $\vec{N}$ le vecteur vitesse angulaire d'entraînement :
$\vec{N} = (0, 0, n)$

On a la relation $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{OM} \wedge \vec{N}$.

$$\vec{OM} \wedge \vec{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yn \\ -xn \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} u' &= u + yn \\ v' &= v - xn. \end{aligned}$$

On a $\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \operatorname{div} \vec{V} + n - n = 0$.

Il existe donc une fonction de courant ψ' telle que
$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}$ et $v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$.

$u' = u + yn$ d'où $u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + yn = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}$ $\qquad \psi' = \psi - \frac{y^2}{2} n + \text{cst}(x)$.

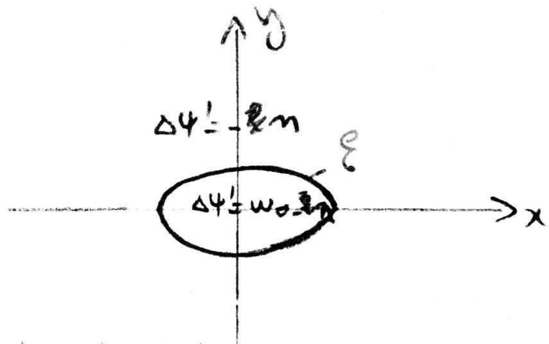
$v' = v - xn$ d'où $v' = +\frac{\partial \psi}{\partial x} - xn = \frac{\partial \psi'}{\partial x}$ $\qquad \psi' = \psi - \frac{x^2}{2} n + \text{cst}(y)$.

On a donc $\boxed{\psi'(x,y) = \psi(x,y) - \frac{x^2+y^2}{2} n \ .}$

On voit que : $\Delta\psi' = \Delta\psi - 2n$.

3) <u>Equations dans le repère tournant</u> :

Dans le repère tournant la solution proposée en II est la suivante :



Le mouvement est stationnaire :

$$0 = \frac{\partial \Delta\psi'}{\partial t} = \frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial x} - \frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi'}{\partial y} .$$

Soit T la distribution associée à $\Delta\psi'$.
Soit $\vec{\nu}$ la normale extérieure de l'ellipse en un point de $\mathcal{E}$
Comme $\Delta\psi'$ n'est pas continue on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \Delta\psi'}{\partial x_i} + [\Delta\psi'] \nu_i \delta_{\mathcal{E}}$$

où $[\Delta\psi']$ est le saut de $\Delta\psi'$ suivant $\vec{\nu}$.
Ici $[\Delta\psi'] = -\omega_0$.
On a alors

le produit de 2 distribution n'est pas défini !!! ? ici produit d'une fonction $\frac{\partial\psi'}{\partial y}$ et d'une distribution voir suff p 21

$$0 = \frac{\partial\psi'}{\partial y}(-\omega \nu_1 \delta_{\mathcal{E}}) - \frac{\partial\psi'}{\partial x}(-\omega \nu_2 \delta_{\mathcal{E}})$$

$$(+u'\nu_1 + v'\nu_2)\,\delta_{\mathcal{E}} = 0 .$$

$$(\vec{v}' \cdot \vec{\nu})\,\delta_{\mathcal{E}} = 0 .$$

D'où $\langle (\vec{V}'\cdot\vec{\nu})\,\delta_{\mathcal{E}}, \varphi(x,y) \rangle = \oint_{\mathcal{E}} (\vec{V}'\cdot\vec{\nu})\,\varphi(P)\,dl = 0 \quad \forall \varphi$.

Rem : vortex jump ⇒ surface mat ⇒ trajectoire ⇒ (stat. birrotat.) ligne de courant.

• vortex jump : surface tourbillon = surface mat

On a donc $\vec{V}'\cdot\vec{\nu} = 0$ en tout point de $\mathcal{E}$.

L'ellipse est donc une ligne de courant c'est à dire une ligne à Ψ' constant.

$$\Psi' = ct_1 \text{ en } (\xi_0, \eta).$$

Ceci nous donne la condition aux limites qui nous permettra de résoudre un problème extérieur à Ω et intérieur à Ω.

4) Condition aux limites entre problème extérieur et intérieur dans le repère fixe

On a $\quad \Psi' = \Psi - \dfrac{x^2+y^2}{2}\,\Omega$.

On va appliquer cette relation en (ξ_0, η).

En ξ_0 : $\quad x = a\cos\eta$

$\quad y = b\sin\eta$

d'où $\quad \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{a^2\cos^2\eta + b^2\sin^2\eta}{2}$

$$= (a^2-b^2)\frac{\cos^2\eta}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{car } \cos^2\eta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\eta}{2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{4}\cdot\cos 2\eta + \frac{a^2-b^2}{4} + \frac{2b^2}{4} = \frac{a^2-b^2}{4}\cos 2\eta + \frac{a^2+b^2}{4}.$$

$$\frac{x^2+y^2}{2}\,\Omega = \frac{a^2-b^2}{4}\,\Omega\cos 2\eta + \frac{a^2+b^2}{4}\,\Omega$$

$\dfrac{a}{c} = \cosh\xi_0 = \dfrac{e^{\xi_0}+e^{-\xi_0}}{2}$ et $\dfrac{b}{c} = \sinh\xi_0 = \dfrac{e^{\xi_0}-e^{-\xi_0}}{2}$ d'où $\dfrac{a-b}{c} = e^{-\xi_0}$

$e^{-2\xi_0} = \dfrac{(a-b)^2}{c^2} \qquad (a+b)^2 e^{-2\xi_0} = \dfrac{(a-b)^2(a+b)^2}{c^2} = a^2-b^2.$

On a donc $\Psi = cst + \frac{x^2+y^2}{2}\,n$

$$\boxed{\Psi = cst_1 + \frac{a^2+b^2}{4}\,n + n\frac{(a+b)^2}{4}\,e^{-2\xi_0}\cos 2\eta} \quad \text{sur } (\xi_0, \eta).$$

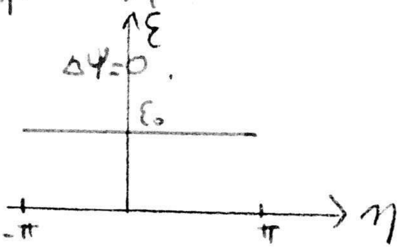
Soit $cst_2 = cst_1 + \frac{a^2+b^2}{4}\,n$.

5) Résolution du problème exterieur : (repère fixe).

$$\Delta\Psi = 0$$

d'où d'après la formule du laplacien en coordonnées elliptiques :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} = 0.$$



$\Psi(\eta=-\pi) = \Psi(\eta=\pi)$.

La frontière du domaine étant simple on utilise une séparation de variables

$$\Psi(\eta,\xi) = U(\eta)\,K(\xi).$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2}.K + \frac{\partial^2 K}{\partial\xi^2}U = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{U}\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = -\frac{1}{K}\frac{\partial^2 K}{\partial\xi^2} = -\lambda^2 \quad \lambda>0$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = -\lambda^2 U$ d'où $U = A\cos\lambda\eta + B\sin\lambda\eta$. si $\lambda \neq 0$.

$\Psi(\eta=-\pi) = A\cos\lambda\pi - B\sin\lambda\pi$

$= \Psi(\eta=\pi) = A\cos\lambda\pi + B\sin\lambda\pi$ d'où $B=0$.

$U = A\cos\lambda\eta$

$\lambda=0$ donne $U = \alpha\eta+\beta$ et $U(\eta=-\pi) = U(\pi)$ donne $\alpha=0$.

$\frac{\partial^2 K}{\partial\xi^2} = -\lambda^2 K$ donne $K = Ae^{\xi\lambda} + Be^{-\xi\lambda}$ si $\lambda\neq 0$

Si $\lambda=0$ $K = e\xi+f$.

D'où une première solution $\Psi = e\xi + f$ et toute une famille de solutions $\Psi = (A e^{\xi\lambda} + B e^{-\xi\lambda})\cos\lambda\eta$

Pour vérifier les conditions aux limites en ξ, on cherche Ψ sous la forme :

$$\Psi = f + e\xi + \sum_\lambda (A e^{\xi\lambda} + B e^{-\xi\lambda})\cos\lambda\eta$$

En $\xi = \xi_0$: $\Psi = cst_2 + m\dfrac{(a+b)^2}{4} e^{-2\xi_0}\cos 2\eta$

$$= f + e\xi_0 + \sum_\lambda (A e^{\xi_0\lambda} + B e^{-\xi_0\lambda})\cos\lambda\eta$$

D'où : $\lambda = 2$ et $\Psi = cst_2 + e(\xi - \xi_0) + (A e^{2\xi} + B e^{-2\xi})\cos 2\eta$

et on a la relation : $A e^{2\xi_0} + B e^{-2\xi_0} = m\dfrac{(a+b)^2}{4} e^{-2\xi_0}$

<u>En $\xi = +\infty$:</u>

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = e + (2A e^{2\xi} - 2B e^{-2\xi})\cos 2\eta .$$
$$\sim 2A e^{2\xi}\cos 2\eta$$

Or $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\xi} = \dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\xi} \sim -\dfrac{uc}{2} e^{\xi} + v\dfrac{c}{2} e^{\xi} \sim \left(-\dfrac{uc}{2} + \dfrac{vc}{2}\right)e^{\xi}$

Comme e^{ξ} n'est pas équivalent en l'infini à $e^{2\xi}$, on a $A =$
Et donc :

$$B = m\frac{(a+b)^2}{4}$$

$\Psi = cst_2 + e(\xi - \xi_0) + m\dfrac{(a+b)^2}{4} e^{-2\xi}\cos 2\eta$

Soit $cst_3 = cst_2 - e\xi_0$

$$\boxed{\Psi = m\frac{(a+b)^2}{4} e^{-2\xi}\cos 2\eta + e\xi + cst_3} \quad (1)$$

6) Résolution du problème intérieur :

On cherche une solution de la forme $\Psi = \frac{1}{2}\omega_0(Ax^2+By^2)$ (2)

$\Delta\Psi = \omega_0$ d'où $\boxed{A+B=1}$ (3)

Condition aux limites en ξ_0 :

$\Psi(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\omega_0(A a^2\cos^2\eta + Bb^2\sin^2\eta)$ car $x_0 = a\cos\eta$
$y_0 = b\sin\eta$.

$= \frac{1}{2}\omega_0(Aa^2-Bb^2)\cos^2\eta + \frac{Bb^2}{2}\omega_0.$

$= \frac{1}{4}\omega_0(Aa^2-Bb^2)\cos 2\eta + \frac{1}{4}\omega_0(Aa^2-Bb^2) + \frac{Bb^2}{2}\omega_0.$

$= \frac{1}{4}\omega_0(Aa^2-Bb^2)\cos 2\eta + \frac{1}{4}\omega_0(Aa^2+Bb^2)$

Or $\Psi = e\xi_0 + n\frac{(a+b)^2}{4}e^{-2\xi_0}\cos 2\eta + ct_3$.

D'où la condition $\frac{1}{4}\omega_0(Aa^2-Bb^2) = n\frac{(a+b)^2}{4}e^{-2\xi_0} = n\frac{a^2-b^2}{4}$

D'où $\boxed{Aa^2-Bb^2 = (a^2-b^2)\frac{n}{\omega}}$ (4) $e\xi_0 + ct_3 = \frac{1}{4}\omega_0(Aa^2+Bb^2)$.

Pour terminer on écrit l'égalité de $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$ sur ξ à l'aide de l'expression (1) et (2)

égalité des vitesses tangentielles $\Rightarrow$ pas de discontinuité tangentielle

(1) donne $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right|_{\xi_0} = -\frac{n}{2}(a+b)^2 e^{-2\xi_0}\cos 2\eta + e$

(2) donne : $\Psi(x,y) = \frac{1}{2}\omega_0(Ax^2+By^2)$

$= \frac{1}{2}\omega_0(Ac^2\cosh^2\xi\cos^2\eta + Bc^2\sinh^2\xi\sin^2\eta)$

D'où $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\omega c^2(A\,2\cosh\xi\,\cancel{\sinh}\,\xi\cos^2\eta + B\,2\sinh\xi\cosh\xi\sin^2\eta)$

$= \omega c^2(\cosh\xi\sinh\xi)(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \omega c^2 \cosh\xi \sinh\xi \left[(A-B)\cos^2\eta + B \right]$$

$$= \omega c^2 \cosh\xi \sinh\xi \left[\frac{(A-B)}{2} \cos 2\eta + \frac{(A+B)}{2} \right].$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\right|_{\xi_0} = \frac{\omega c^2}{2} \frac{ab}{c^2} \left[(A-B) \cos 2\eta + (A+B) \right].$$

En identifiant il vient :

$$-\frac{n}{2}(a+b)^2 e^{-2\xi_0} = \omega \frac{ab}{2} (A-B) \quad \text{. et} \quad \omega \frac{ab}{2} (A+B) = e = \omega \frac{ab}{2}.$$

$$\boxed{A-B = -\frac{n}{\omega} \frac{a^2-b^2}{ab}} \quad (5)$$

De (3), (4), (5) on tire $\boxed{n = \frac{ab}{(a+b)^2} \omega.}$

Annexe 2

Les invariants

I Energie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_\Omega \vec{V}^2 \, dx$$

On a l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P + \mathcal{U}) + \mu \Delta \vec{V}$$

où P est la pression et $\mathcal{U}$ le potentiel des forces exterieures.

$\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{\omega} = \overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\, \vec{V}) - \Delta \vec{V} = -\Delta \vec{V}$ car $\text{div}\, \vec{V} = 0$.

On a donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \rho \int_\Omega \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \int_\Omega [-\overrightarrow{\text{grad}}(P + \mathcal{U}) \cdot \vec{V} - \mu \overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{\omega} \cdot \vec{V}] \, dx$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P + \mathcal{U}) \cdot \vec{V} = \text{div}((P + \mathcal{U})\vec{V}) - (P + \mathcal{U}) \, \text{div}\, \vec{V}$$
$$= \text{div}((P + \mathcal{U})\vec{V}) \text{ car } \text{div}\, \vec{V} = 0.$$

D'où $\displaystyle\int_\Omega [-\overrightarrow{\text{grad}}(P + \mathcal{U}) \cdot \vec{V}] \, dx = \int_\Omega \text{div}((P + \mathcal{U})\vec{V}) \, dx = \int_{\partial\Omega} (P + \mathcal{U}) \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds$ (ostrogradsky)

$$= 0 \text{ car } \vec{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

$$\text{div}(\omega \wedge \vec{V}) = \text{rot}\, \vec{\omega} \cdot \vec{V} - \text{rot}\, \vec{V} \cdot \vec{\omega} = \text{rot}\, \vec{\omega} \cdot \vec{V} - |\omega|^2$$

$$\int_\Omega -\mu \overrightarrow{\text{Rot}}\, \omega \cdot \vec{V} \, dx = \int_\Omega \left(-\mu \, \text{div}(\omega \wedge \vec{V}) - \mu |\omega|^2\right) dx$$

$$= -\mu \int_{\partial\Omega} (\omega \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} \, ds - \mu \int_\Omega |\omega|^2 \, dx.$$

$$= -\mu \int_\Omega |\omega|^2 \, dx \text{ car } \vec{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

D'où $\boxed{\displaystyle\frac{dE_c}{dt} = -\mu \int_\Omega |\omega|^2 \, dx = 0 \text{ si } \mu = 0}$

II L'Hélicité :

$$I = \int_\Omega \vec{V} \cdot \vec{\omega}\, dx .$$

On a l'équation d'Euler : $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{grad}\left(\frac{P+\mathcal{U}}{\rho}\right)$

et de Cauchy : $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = V_{i,j}\omega_j = \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, \vec{V} \cdot \vec{\omega}$.

$$\frac{d\, \vec{V}\cdot\vec{\omega}}{dt} = \vec{V} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = V_i V_{i,j}\omega_j - \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}\left(\frac{P+\mathcal{U}}{\rho}\right)$$

$$= \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}\frac{V^2}{2} - \vec{\omega}\, \overrightarrow{grad}\left(\frac{P+\mathcal{U}}{\rho}\right) = \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2} - \frac{P}{\rho} - \frac{\mathcal{U}}{\rho}\right)$$

Soit . $\frac{dI}{dt} = \int_\Omega \vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2} - \frac{P}{\rho} - \frac{\mathcal{U}}{\rho}\right) dx$.

Or $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{grad}\, b = div(b\vec{\omega}) - b\, div\, \vec{\omega} = div\, b\vec{\omega}$ car $div\, \vec{\omega} = 0$.

D'où :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{V^2}{2} - \frac{P}{\rho} - \frac{\mathcal{U}}{\rho}\right) \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, ds .$$

$\boxed{\frac{dI}{dt} = 0 \text{ si } \partial\Omega \text{ est une surface tourbillon close}}$

III Centre de vorticité :

On se place dans le cas des écoulements bidimensionnels.
Le centre de vorticité est défini par ses coordonnées :

$$X_i = \frac{\int_{R^2} x_i\, \omega\, d\underset{\sim}{x}}{\int_{R^2} \omega\, d\underset{\sim}{x}}$$

L'écoulement est isovolume donc $d\underset{\sim}{x}$ est constant.
En 2D : $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = V_{i,j}\, \omega_j$ devient $\frac{d\omega}{dt} = 0$.

On a donc $\underline{\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{R^2} \omega \, d\underset{\sim}{x}} = \displaystyle\int_{R^2} \dfrac{d\omega}{dt} \, d\underset{\sim}{x} = \underline{0}$.

Montrons que l'on a aussi $\underline{\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{R^2} x_i \, \omega \, ds = 0}$

$$\frac{d}{dt}\int_{R^2} x_i \, \omega \, d\underset{\sim}{x} = \int_{R^2} V_i \, \omega \, d\underset{\sim}{x} .$$

Notons $V_1 = u$ et $V_2 = v$

On remarque que :

$$\frac{\partial (u^2 - v^2)}{\partial y} - 2\frac{\partial (uv)}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial v}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= -2v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= -2u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ car } \operatorname{div}\vec{V} = 0 .$$

$$= -2\omega u$$

D'où $\displaystyle\int_{R^2} -2\omega u \, d\underset{\sim}{x} = \int_{R^2} \left[\frac{\partial (u^2 - v^2)}{\partial y} - 2\frac{\partial (uv)}{\partial x}\right] d\underset{\sim}{x}$

$= \displaystyle\int_{\partial \Omega} [(u^2 - v^2)\, dx + 2uv \, dy]$ en utilisant

le théorème de Stokes $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{M}$.

Or $\vec{V} = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $\displaystyle\int_{R^2} \omega u \, d\underset{\sim}{x} = 0$ et de même $\displaystyle\int_{R^2} \omega v \, d\underset{\sim}{x} = 0$.

On a donc $\displaystyle\int_{R^2} V_i \, \omega \, d\underset{\sim}{x} = 0$.

On a donc pour le centre de vorticité :

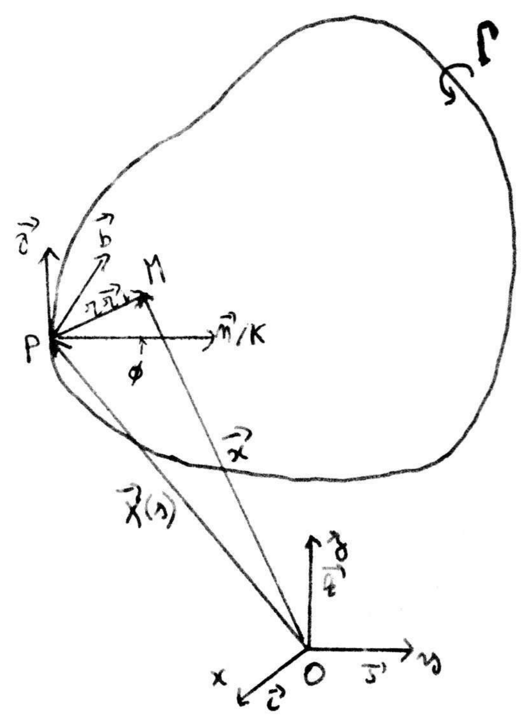
$$\frac{d}{dt}\left(X_i \int_{R^2} \omega \, d\underset{\sim}{x}\right) = \frac{d}{dt}\int_{R^2} x_i \, \omega \, d\underset{\sim}{x} = 0 .$$

d'où $\dfrac{dX_i}{dt}\displaystyle\int_{R^2} \omega \, d\underset{\sim}{x} + X_i \dfrac{d}{dt}\int_{R^2} \omega \, d\underset{\sim}{x} = 0$ d'où $\boxed{\dfrac{dX_i}{dt} = 0}$

Annexe 3

Ecoulement potentiel induit par une ligne tourbillon

On se propose d'exprimer le potentiel de l'écoulement induit par une ligne tourbillon, de circulation Γ et de ligne géométrique C définie par la fonction vectorielle $\vec{X}(s)$ où s est l'abscisse curviligne.



$\vec{\tau}$ est le vecteur tangent et $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ la base curviligne de Frenet

On a les formules de Frenet :

$$\vec{X}_s = \vec{\tau} \qquad \vec{\tau}_s = K\vec{n}$$

$$\vec{n}_s = (T\vec{b} - K\vec{\tau}) \quad \vec{b}_s = -T\vec{n}$$

où K est la courbure et T la torsion.

$\vec{n}$ vecteur normal, $\vec{b}$ vecteur binormal et S longueur de la courbe.

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ induit est donné par :

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{X}(s)}{|\vec{x}-\vec{X}|} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^S \frac{X_s}{|\vec{x}-\vec{X}(s')|}ds'$$

et le potentiel par $Q(x) = \nabla\wedge\vec{A} = \vec{rot}\,\vec{A}$.

On introduit un système de coordonnées locales (r, ϕ, s) comme suit. Pour tout point $\vec{x}=M$ proche de C, on peut trouver un point $P = \vec{X}(s)$ sur la courbe tel que la distance $|\vec{x}-\vec{X}(s)|$ atteigne son minimum, noté r.

Le vecteur $\vec{PM}$ se trouve alors dans le plan normal $(\vec{n}, \vec{b})$ qui passe par P. On note (r, ϕ) les coordonnées polaires de $\vec{PM}$ dans ce plan et $\vec{r}$ le vecteur radial et $\vec{\phi}$ le vecteur orthoradial.

On a donc $\vec{r} = \vec{r}(\phi, s) = \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi$, $\vec{\phi} = -\vec{n}\sin\phi + \vec{b}\cos\phi$.

et $\boxed{\vec{x} = \vec{X}(s) + r\,\vec{r}(\phi, s)}$

$$\begin{aligned}
d\vec{x} &= d\left(\vec{X}(s) + r\vec{r}(\phi,s)\right) \\
&= d\vec{X}(s) + \vec{r}\,dr + r\,d\vec{r} \\
&= \vec{X}_s\,ds + \vec{r}\,dr + r\left(\vec{n}_s\cos\phi + b_s\sin\phi\right)ds + r\left(-\vec{n}\sin\phi + \vec{b}\cos\phi\right)d\phi \\
&= \vec{t}\,ds + \vec{r}\,dr + r\left((T\vec{b} - K\vec{t})\cos\phi - T\vec{n}\sin\phi\right)ds + r\left(-\vec{n}\sin\phi + \vec{b}\cos\phi\right)d\phi \\
&= \vec{t}\,ds + \vec{r}\,dr + rT\,ds\,\vec{\phi} - rK\vec{t}\cos\phi\,ds + r\,\vec{\phi}\,d\phi
\end{aligned}$$

$$\boxed{dx = \vec{r}\,dr + \vec{\phi}\,r(d\phi + T\,ds) + \vec{t}\,(1 - rK\cos\phi)\,ds}$$

$dx = dr\,\vec{e_1} + d\phi\,\vec{e_2} + ds\,\vec{e_3}$ où $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ sont les vecteurs de base.

$\vec{e_1} = \vec{r}$ $\qquad\qquad$ $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \vec{e_1}\cdot\vec{e_3} = 0$

$\vec{e_2} = r\vec{\phi}$

$\vec{e_3} = rT\vec{\phi} + \vec{t}(1 - rK\cos\phi)$ $\qquad$ $\vec{e_2}\cdot\vec{e_3} = r^2T \neq 0$.

Les coordonnées (r, ϕ, s) ne sont pas orthogonales.

On obtient des coordonnées orthogonales (r, θ, s) en définissant θ par :

$$\theta = \phi - \theta_0(s) \text{ où } d\theta_0 = -T(s)\, ds.$$

On a alors : $d\vec{x} = \vec{r}\, dr + \vec{\phi}\, r\, d\theta + \vec{\tau}\, h_3\, ds$

où $h_3 = 1 - K r \cos\phi$.

et $\left| \begin{array}{l} \vec{e_1} = \vec{r} \\ \vec{e_2} = r\, \vec{\phi} \\ \vec{e_3} = (1 - K r \cos\phi)\, \vec{\tau} \end{array} \right.$ vecteurs de base de (r, θ, s).

Soit $g_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j}$ la matrice métrique.

On a $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ et $g_1 = g_{11} = 1$ $\quad g_2 = g_{22} = r^2$

$g_3 = g_{33} = (1 - K r \cos\phi)^2$.

Les coordonnées orthonormées naturellement associées sont définies par $d\Lambda_i = \sqrt{g_{ii}}\, d\lambda^i$ où $\lambda^i = (r, \theta, s)$.

D'où $\left| \begin{array}{l} d\Lambda_1 = dr \\ d\Lambda_2 = r\, d\theta \\ d\Lambda_3 = (1 - K r \cos\theta)\, ds. \end{array} \right.$

Les vecteurs de base de (Λ_i) sont $\frac{\vec{e_i}}{\sqrt{g_{ii}}}$ donc $\vec{r}, \vec{\phi}$ et $\vec{\tau}$.

Soit $\vec{\theta} = \vec{\phi}$.

Tant que $0 < r < 1/K$ $\;1 - K r \cos\phi$ ne peut pas s'annuler.

Si $r > 1/K$, il existe des valeurs de ϕ pour lesquelles $h_3 = 1 - K r \cos\phi$ s'annule et donc $\vec{e_3} = \frac{\partial x}{\partial s}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial s}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial s}\vec{k} = \vec{0}$

$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial s} = 0$ La transformation de coordonnées n'est alors plus bijective.

On n'emploiera ces coordonnées curvilignes dans la suite seulement pour des points proche de la courbe $(r K \ll 1$.

On introduit la nouvelle variable d'intégration : $\bar{s} = s' - s$ et on va faire des développements de Taylor en $\bar{s}$ pour faire apparaître les parties singulières de $\vec{A}(\vec{x})$.

On va calculer le développement limité de $\dfrac{\vec{X}_s(s')}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|}$

$$\vec{X}_s(s') = \vec{t}(s') = \vec{t}(s) + (s'-s)\,\vec{t}_s(s) + o(\bar{s}^2)$$
$$= \vec{t}(s) + \bar{s}\,K\vec{n} + o(\bar{s}^2)$$

$$\vec{x} - \vec{X}(s') = \left(\vec{X}(s) + r\,\vec{r}(\phi,s)\right) - \left(\vec{X}(s')\right)$$
$$= \left(\vec{X}(s) - \vec{X}(s')\right) + r\,\vec{r}(\phi,s)$$
$$= \left(-\vec{X}_s(s)\,\bar{s} - \frac{\vec{t}_s(s)}{2}\,\bar{s}^2\right) + r\,\vec{r}(\phi,s) + O(\bar{s}^3)$$
$$= -\vec{t}(s)\,\bar{s} - \frac{K}{2}\,\bar{s}^2\,\vec{n} + r\,\vec{r}(\phi,s) + O(\bar{s}^3)$$

$$|\vec{x} - \vec{X}(s')|^2 = \bar{s}^2 + (r^2 \sin^2\phi) + \left(-\frac{K}{2}\,\bar{s}^2 + r\cos\phi\right)^2 + O(\bar{s}^3).$$
$$= \bar{s}^2 + r^2 - K\bar{s}^2\cos\phi + O(\bar{s}^3).$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - X(s')|} \simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{s}^2 + r^2 - K\bar{s}^2\cos\phi}}$$
$$\simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{s}^2 + r^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - K\,\dfrac{\bar{s}^2 r}{s^2 + r^2}\cos\phi}}\right)$$
$$\simeq \frac{1}{\sqrt{r^2 + \bar{s}^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{r\bar{s}^2}{(r^2 + \bar{s}^2)}\,K\cos\phi\right)$$

D'où $$\frac{\vec{t}(s')}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|} \simeq \vec{t}\left[\frac{1}{(r^2 + \bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{r\,\bar{s}^2 . K\cos\phi}{2\,(r^2 + \bar{s}^2)^{3/2}}\right] + \vec{n}\,K\,\frac{\bar{s}}{(r^2 + \bar{s}^2)^{1/2}}$$

Soit $$F(r, \phi, s, \bar{s}) = \frac{\vec{t}(s + \bar{s})}{|\vec{x} - \vec{X}(s + \bar{s})|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^S \frac{\vec{X}_s\,ds'}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|} \simeq \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-S^-}^{S^+} F(r,\phi,s,\bar{s})\,d\bar{s}$$

où $S^+ + S^- = S$ $\quad S^+ > 0 \quad S^- > 0$. On peut prendre $S^+ = S^- = \frac{S}{2}$.

$$\int_{-S^-}^{S^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} = \left[\ln\left(\bar{s} + \sqrt{r^2+\bar{s}^2}\right)\right]_{-S^-}^{S^+} = \ln \frac{\left(S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}\right)}{\left(-S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}\right)}$$

$$\int_{-S^-}^{S^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \int_{-S^-}^{S^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} + \left[-\frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-S^-}^{S^+}$$

$$= \ln \frac{S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}}{-S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}} - \left(\frac{S^+}{\sqrt{r^2+S^{+2}}} + \frac{S^-}{\sqrt{r^2+S^{-2}}}\right)$$

$$\int_{-S^-}^{S^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}} = \left[\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\right]_{S^-}^{S^+}$$

On a donc :

$$\vec{A}' \sim \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{ \vec{\tau}'\left[\left(1+\frac{rK\cos\phi}{2}\right)\ln \frac{S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}}{-S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}} - \frac{rK\cos\phi}{2}\left(\frac{S^+}{\sqrt{r^2+S^{+2}}} - \frac{S^-}{\sqrt{r^2+S^{-2}}}\right)\right] + \vec{n}'K\left[\sqrt{r^2+(S^+)^2} - \sqrt{r^2+(S^-)^2}\right]\right\}$$

On a
$$\frac{S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}}{-S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}} = \frac{\left(S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}\right)\left(S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}\right)}{\left(-S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}\right)\left(S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}\right)}$$
$$= \frac{\left(S^+ + \sqrt{r^2+S^{+2}}\right)\left(S^- + \sqrt{r^2+S^{-2}}\right)}{r^2}$$

On remplace dans l'expression de $\vec{A}'$, on additionne et on soustrait par $\vec{\tau}'\left(1+\frac{rK\cos\phi}{2}\right)\ln\frac{r^2}{S^2}$.

On a alors $\vec{A}' \sim \vec{A}^s + \vec{A}^f$ où

$$\vec{A}^s = \frac{\Gamma\vec{\tau}'}{2\pi}\ln\frac{S}{r}$$

et
$$A^f = \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\vec{\tau}'\left[\left(1+\frac{rK\cos\phi}{2}\right)\ln\frac{\left(S^+ + \sqrt{r^2+(S^+)^2}\right)\left(S^- + \sqrt{r^2+(S^-)^2}\right)}{S^2} - \frac{rK\cos\phi}{2}\left(\ln\frac{r^2}{S^2} + \frac{S^+}{\sqrt{r^2+(S^+)^2}} + \frac{S^-}{\sqrt{r^2+(S^-)^2}}\right)\right] + \vec{n}'K\left[\sqrt{r^2+(S^+)^2} - \sqrt{r^2+(S^-)^2}\right]\right\}$$

Comme $\lim_{r\to 0} r \ln r = 0$ on voit que A^f n'est pas singulier en $r=0$ alors que $\vec{A}^s$ l'est.

On a $\vec{Q}(x) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. On va rechercher la partie singulière de $\vec{Q}$ en $r=0$.

Si $\vec{A} = \sum_i a^i \vec{E_i}$ on a $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \sum_i b^i \vec{E_i}$ avec :

$$b_1 = \frac{\partial (a^3 \sqrt{g_3})}{\sqrt{g_3}\, \partial \Lambda^2} - \frac{\partial (a^2 \sqrt{g_2})}{\sqrt{g_2}\, \partial \Lambda^3}$$

$$b_2 = \frac{\partial (a^1 \sqrt{g_1})}{\sqrt{g_1}\, \partial \Lambda^3} - \frac{\partial (a^3 \sqrt{g_3})}{\sqrt{g_3}\, \partial \Lambda^1} .$$

$$b_3 = \frac{\partial (a^2 \sqrt{g_2})}{\sqrt{g_2}\, \partial \Lambda^1} - \frac{\partial (a^1 \sqrt{g_1})}{\sqrt{g_1}\, \partial \Lambda^2} .$$

Remarquons que $\vec{n} = \cos\phi\, \vec{r} - \sin\phi\, \vec{e}$ et $\vec{b} = \sin\phi\, \vec{r} + \cos\phi\, \vec{e}$.

$$a_1 = K \cos\phi \left[\sqrt{r^2+(s^+)^2} - \sqrt{r^2+(s^-)^2} \right] \frac{\Gamma}{4\pi}$$

$$a_2 = K \sin\phi \left[\sqrt{r^2+(s^+)^2} - \sqrt{r^2+(s^-)^2} \right] \frac{\Gamma}{4\pi}$$

$$a_3 = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\left(1 + \frac{rK\cos\phi}{2}\right) \ln \frac{\left(s^+ + \sqrt{r^2+(s^+)^2}\right)\left(s^- + \sqrt{r^2+(s^-)^2}\right)}{s^2} - \frac{rK\cos\phi}{2} \left(\ln\frac{r^2}{s^2} + \frac{s^+}{\sqrt{r^2+(s^+)^2}} + \frac{s^-}{\sqrt{r^2+(s^-)^2}} \right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{s}{r} .$$

$a^2\sqrt{g_2}$ ne dépend pas de s donc $\dfrac{\partial (a^2\sqrt{g_2})}{\partial \Lambda^3} = \dfrac{1}{(1-Kr\cos\phi)} \dfrac{\partial (a^2\sqrt{g_2})}{\partial s} = 0.$

$a^1\sqrt{g_1}$ ne dépend pas de s donc $\dfrac{\partial}{\partial \Lambda^3} (a^1\sqrt{g_1}) = 0$.

D'où $$b_1 = \frac{\partial\left(a^3\sqrt{g_3}\right)}{\sqrt{g_3}\,\partial\Lambda^2} = \frac{1}{(1-K_2\cos\phi)\,r}\,\frac{\partial\left(a^3(1-K_1\cos\phi)\right)}{\partial\theta}$$

$$b_2 = -\frac{\partial\left(a^3\sqrt{g_3}\right)}{\sqrt{g_3}\,\partial\Lambda^1} = -\frac{1}{(1-K_1\cos\phi)}\,\frac{\partial\left(a^3(1-K_1\cos\phi)\right)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\left(a^2\sqrt{g_2}\right)}{\sqrt{g_2}\,\partial\Lambda^1} = \frac{\partial a^2 r}{r\,\partial r} = \frac{a^2}{r} + \frac{\partial a^2}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial\left(a^1\sqrt{g_1}\right)}{\sqrt{g_1}\,\partial\Lambda^2} = \frac{\partial a^1}{\partial\Lambda^2} = \frac{\partial a^1}{r\,\partial\theta} = \frac{\partial a^1}{r\,\partial\phi} = \frac{a_2}{r}$$ $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\phi}$ car a^1 ne dépend pas de s.

d'où $b_3 = \frac{\partial a^2}{\partial r}$ qui ne diverge pas en $r=0$.

<u>Il n'y a pas de terme **singulier** dirigé suivant $\vec{E}_3 = \vec{c}$</u>

Reste à chercher les termes singuliers dans :

$$b_1 = \frac{1}{(1-K_r\cos\phi)\,r}\,\frac{\partial\left(a^3(1-K_1\cos\phi)\right)}{\partial\theta} = \frac{1}{(1-K_1\cos\phi)\,r}\,\frac{\partial\left(a^3(1-K_2\cos\phi)\right)}{\partial\phi}$$

et $$b_2 = -\frac{1}{(1-K_1\cos\phi)}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(a^3(1-K_2\cos\phi)\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{r}\left(-\frac{\Gamma r}{4\pi}\frac{K}{2}\frac{\partial \cos\phi}{\partial\phi}\ln\frac{r^2}{S^2}\times 1 + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{S}{r}\times\frac{\partial -Kr\cos\phi}{\partial\phi}\right) + \text{termes convergents.}$$

$$= \left(+\frac{\Gamma}{4\pi}K\sin\phi\ln\frac{r}{S} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{S}{r}K\sin\phi\right) + \text{termes convergents.}$$

$$= \underline{\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{S}{r}K\sin\phi + \text{termes convergents}}.$$

$$b_2 = -\left(\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\frac{K\cos\phi}{2}\ln\frac{r^2}{S^2}\times 1\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{S}{r}\times(1-K_1\cos\phi)\right)\right)$$

$$+ \text{termes convergents.}$$

$$b_2 = -\frac{\Gamma}{4\pi} K\cos\phi \ln\frac{S}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\frac{S}{r} K\cos\phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{S}\right)\left(-\frac{S}{r^2}\right) \times 1 + \text{termes convergents}$$

$$= +\frac{\Gamma}{4\pi} K\cos\phi \ln\frac{S}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} + \text{termes convergents.}$$

D'où $\vec{Q}(x) = \left(\frac{\Gamma}{4\pi} \ln\frac{S}{r} K\sin\phi\right)\vec{r} + \left(\frac{\Gamma}{4\pi} K\cos\phi \ln\frac{S}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\right)\vec{\phi}$ + termes convergents.

$$= +\frac{\Gamma}{4\pi} \ln\frac{S}{r} K\left(\sin\phi\,\vec{r} + \cos\phi\,\vec{\phi}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{\phi} + \text{termes convergents}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \ln\frac{S}{r} K\vec{b} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{\phi} + \text{termes convergents.}$$

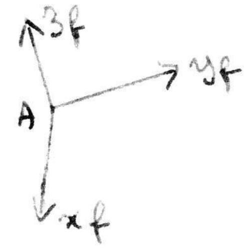
$$\boxed{\vec{Q}(x) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{\phi} + \frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{S}{r}\vec{b} + \text{termes convergents en } r = 0}$$

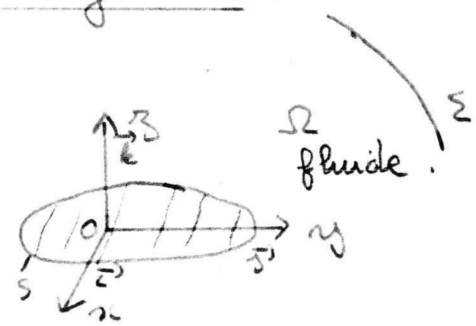
Annexe 4

Mouvement d'un disque tournant dans un écoulement uniforme

I forces exercées sur un obstacle en mouvement non stationnaire - masse ajoutées :

a) Repère :





R_f : Référentiel galliléen d'étude

(A, x_f, y_f, z_f) base de projection fixe dans R_f.

(O, x, y, z) base de projection liée au solide donc mobile dans R_f.

R : Référentiel lié au solide. (dans lequel (O, x, y, z) est fixe)

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On projettera toujours sur (O, x, y, z)

b) vitesses : on est dans le référentielle fixe R_f.

- vitesse du solide :

Elle est déterminée par la vitesse du point O $\vec{v_0}(t)$ et le vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$.

On a alors en tout point du solide :

$$\vec{v_s} = \vec{v_0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}.$$

- vitesse du fluide : c'est le champ de vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ On a $\vec{v} = \vec{0}$ en $r = +\infty$.

(Si le solide se déplace dans un fluide en écoulement $\vec{v_f} = \vec{v_\infty}$ par exemple, on se ramène à ce cas par soustraction)

c) Energie cinétique du fluide :

$$T_{fl} = \int_{\Omega} \rho \frac{v^2}{2} \, dV.$$

Soit $\vec{v} = \vec{grad}\, \varphi$. On se place donc dans le cas d'un écoulement potentiel.

On peut poser $\varphi = 0$ en $r = +\infty$.
On a $div(\varphi \vec{V}) = \varphi \, div \vec{V} + \vec{grad}\, \varphi . \vec{V} = \vec{V} . \vec{V}$ car $div \vec{V} = 0$.
d'où $V^2 = div(\varphi \vec{V})$ et

$$T_{fl} = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} div(\varphi \vec{V}) \, dV = \frac{\rho}{2} \int_{S + \Sigma} \varphi \vec{V} . \vec{n_e} \, dS = \frac{\rho}{2} \int_{S} \varphi . \frac{\partial \varphi}{\partial n_e} dS \text{ car } \vec{V} \to 0 \text{ en } \infty$$

où $\vec{n_e}$ est la normale extérieure au fluide.
Soit $\vec{n} = -\vec{n_e}$ la normale extérieure au solide.

d) Conditions aux limites sur S :
C'est l'imperméabilité $\vec{v_s}|_S . \vec{n} = \vec{v}|_S . \vec{n}$.

D'où
$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = \vec{v}|_S . \vec{n} = \vec{v_s}|_S . \vec{n} = (\vec{v_0} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r})|_S . \vec{n}.$$
$$= \vec{v_0} . \vec{n} + \vec{\Omega} . (\vec{r} \wedge \vec{n})|_S .$$

e) Equation - Séparation de variable :
On a donc
$$\Delta \varphi = 0$$
$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = \vec{v_0}(t) . \vec{n} + \vec{\Omega}(t) . (\vec{r} \wedge \vec{n})|_S$$

La linéarité de l'équation et la forme de la condition aux limites font que l'on recherche φ sous la forme :

F en 2D et 3D ← à résoudre déterminer pour

→ solu particulière φ_p $\varphi' = \varphi - \varphi_p$ $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi' = 0 \\ \left.\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right|_S = 0 \end{array} \right.$ dt fixé

$$\boxed{\varphi = \varphi(x,y,z,t) = v_{0i}(t)\,\varphi_i(x,y,z) + \omega_i(t)\,\varphi_{i+3}(x,y,z)} \quad i = 1 \text{ à } 3$$

avec $\Delta \varphi_j = 0$ $\quad \varphi_j \to 0$ en $+\infty$ $\quad j = 1$ à 6.

et sur S $\quad \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \dfrac{v_{0i}\, n_i}{v_{0i}} = n_i \qquad \dfrac{\partial \varphi_{i+3}}{\partial n} = \dfrac{\Omega_i\, (\vec{r}\wedge\vec{n})_i}{\Omega_i} = (\vec{r}\wedge\vec{n})_i \qquad i = 1$ à 3.

Soit $v^i = v_{0i}$ et $v^{i+3} = \omega_i$ $\quad i = 1$ à 3.
v^j est dite vitesse généralisée.
On a $\boxed{\varphi = v^j \varphi_j}$ $\quad j = 1$ à 6.

f) <u>masse ajoutée</u>.

On a alors : $T_{fl} = -\dfrac{\rho}{2} \displaystyle\int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS$

$$= \frac{1}{2} v^i v^k \left(-\rho \int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\right) dS = \boxed{\frac{1}{2} v^i v^k \lambda_{ik} = T_{fl}}$$

où l'on a posé $\boxed{\lambda_{ik} = -\rho \displaystyle\int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}\, dS}$ masses généralisées.

g) <u>Forces</u> :

Soient R_i^{fl} et $M_{i/O}^{fl}$ les projections sur (O,x,y,z) de la force et du moment par rapport à O exercés par le fluide sur le corps dans le référentiel R_f.

Soient Q_i^{fl} et $K_i^{fl}{}_{/O}$ la quantité de mouvement et le moment par rapport à O de la quantité de mouvement sur (O,x,y,z) dans R_f.

Il y a égalité entre le torseur dynamique et le torseur des forces extérieures.

On note $\dfrac{d_f}{dt}$ la dérivation temporelle dans R_f et $\dfrac{d}{dt}$

la dérivation dans R.

On a donc :

résultante dynamique $= \dfrac{d_f \vec{Q}^{ff}}{dt} = -\vec{R}^{ff}$

et moment dynamique en O $= \dfrac{d_f \vec{K}^{ff}_{/O}}{dt} + \vec{v_0} \wedge \vec{Q_{ff}} = -\vec{M}^{ff}_{/O}$.

On a $\dfrac{d_f \vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}$ $\quad \dfrac{d_f \vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}$ et $\dfrac{d_f \vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}$

$\dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \dfrac{d\vec{k}}{dt} = 0$.

(Remarque : dans R_f $\vec{v}(M) = \dfrac{d_f \vec{OM}}{dt}$ et dans R $(\vec{v})_R(M) = \dfrac{d\,\vec{OM}}{dt}$).

On a donc $\dfrac{d_f \vec{Q}_{ff}}{dt} = \dfrac{d\,\vec{Q_{ff}}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{Q_{ff}}$ et $\dfrac{d_f \vec{K}^{ff}_{/O}}{dt} = \dfrac{d\,\vec{K}_{/O}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{K}_{ff/O}$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R}^{ff} &= -\frac{d}{dt}\vec{Q_{ff}} - \vec{\Omega} \wedge \vec{Q_{ff}} \\ \text{et} \quad \vec{M}^{ff}_{/O} &= -\frac{d\,\vec{K}^{ff}_{/O}}{dt} - \vec{\Omega} \wedge \vec{K_{ff/O}} - \vec{v_0} \wedge \vec{Q_{ff}} \end{aligned}} \quad (1)$$

On va montrer que l'on a les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{ffx} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_1} & Q_{ffy} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_2} & Q_{ffz} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_3} \\ K_{ffx} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_4} & K_{ffy} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_5} & K_{ffz} &= \frac{\partial T_{ff}}{\partial v_6} \end{aligned}} \quad (2)$$

Remarquons au préalable que la matrice (λ_{ik}) est symétrique si le fluide est illimité.

$\boxed{\lambda_{ik} = \lambda_{ki}}$.

En effet la seconde formule de Green donne :

$$\int_\Omega (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i)\, dV = \int_{S+\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_e} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e} \right) dS$$

Or $\Delta \varphi_i = 0$ et l'intégrale sur Σ s'annule en l'infini d'où.

$$\int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_e}\, dS = \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\, dS .$$

c'est le résultat recherché.

$$T_{fl} = \frac{1}{2} v_i v_k \lambda_{ik} \text{ d'où } \frac{\partial T_{fl}}{\partial v_i} = v_i \lambda_{ii} + \sum_{k \neq i} v_k \lambda_{ik} .$$
$$= v_k \lambda_{ik} .$$

$$\frac{\partial T_{fl}}{\partial v_i} = v_k \lambda_{ik}$$
$$= v_k \lambda_{ki} = +v_k \rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e}\, dS$$

• $i = 1$ à 3 :

$$\frac{\partial T_{fl}}{\partial v_i} = +v_k \rho \int_S \varphi_k n_i\, dS$$

car sur S on a $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e} = n_i$ si $i = 1$ à 3.

$$= +v_k \rho \int_S \varphi_k \vec{x_i} \cdot \vec{n_e}\, dS \quad \text{où } (\vec{x_i}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

$$= + v_k \rho \int_\Omega \mathrm{div}(\varphi_k \vec{x_i})\, dV$$
$$= +v_k \rho \int_\Omega (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi_k)\, \vec{x_i}\, dV \text{ car } \mathrm{div}\, \vec{x_i} = 0 .$$

$$= + \int_\Omega \rho \vec{v} \cdot \vec{x_i}\, dV = + Q_i^{fl}$$

• $i = 3$ à 6 :

$$\frac{\partial T_{fl}}{\partial v_i} = v_k \rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e}\, dS = v_k \rho \int_S \varphi_k (\vec{r} \wedge \vec{n_e})_{i-3}\, dS$$

car sur S on a $\frac{\partial \varphi_i}{\partial n_e} = (\vec{r} \wedge \vec{n_e})_{i-3}$ si $i = 3$ à 6.

$$= v_k \rho \int_S \varphi_k (\vec{r} \wedge \vec{n_e}) \cdot \vec{x}_{i-3}\, dS \quad \text{où } (\vec{x_i}) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) .$$

$$\frac{\partial T^{fl}}{\partial v_i} = v^k \rho \int_S \varphi_k (\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{n_e}\, dS.$$

$$= v^k \rho \int_\Omega \operatorname{div}[\varphi_k (\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r})]\, dV$$

$$= v^k \rho \int_\Omega \varphi_k \operatorname{div}(\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r}) + (\vec{\operatorname{grad}}\, \varphi_k)(\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r})\, dV.$$

$$\operatorname{div}(\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\operatorname{rot} \vec{x_{i-3}}) - \vec{x_{i-3}} \cdot (\vec{\operatorname{rot}}\, \vec{r}).$$
$$= - \vec{x_{i-3}} \cdot \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{r} = 0 \quad \text{car } \vec{\operatorname{rot}}\, \vec{r} = 0.$$

D'où

$$\frac{\partial T^{fl}}{\partial v_i} = v^k \rho \int_\Omega (\vec{\operatorname{grad}}\, \varphi_k)(\vec{x_{i-3}} \wedge \vec{r})\, dV.$$

$$= v^k \rho \int_\Omega (\vec{r} \wedge \vec{\operatorname{grad}}\, \varphi_k) \cdot \vec{x_{i-3}}\, dV.$$

$$= \int_\Omega (\vec{r} \wedge \rho v^k \vec{\operatorname{grad}}\, \varphi_k) \cdot \vec{x_{i-3}}\, dV = \int_\Omega (\vec{r} \wedge \rho \vec{v}) \cdot \vec{x_{i-3}}\, dV.$$

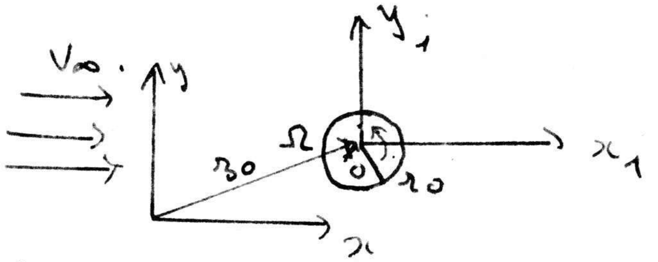
$$= \Gamma^{fl}_{i-3}.$$

On a donc démontré les formules (2).
On remplace alors les expressions de (2) dans (1) et on obtient alors les expressions générales suivantes pour les forces et les moments :

$$\boxed{\begin{aligned}
-R^{fl}_x &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{ox}} + \left(\Omega_y \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oz}} - \Omega_z \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oy}}\right) \\
-R^{fl}_y &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oy}} + \left(\Omega_z \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{ox}} - \Omega_x \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oz}}\right) \\
-R^{fl}_z &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oz}} + \left(\Omega_x \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{oy}} - \Omega_y \frac{\partial T^{fl}}{\partial v_{ox}}\right)
\end{aligned}} \qquad (3)$$

II Mouvement d'un disque tournant dans un écoulement uniforme :

Dans un écoulement uniforme de vitesse $\vec{V_\infty}$, on place un disque tournant à la vitesse angulaire Ω_0



z_0 complexe repérant la position de O.

L'étude du paragraphe I nous donne une énergie cinétique due à l'instationnarité :

$$T_{fl} = \frac{1}{2}\lambda(v_{0x}^2 + v_{0y}^2) = \frac{1}{2}\lambda \vec{V_0}^2 .$$

où $\lambda = -\rho \int_{r=r_0} \varphi_x \frac{\partial \varphi_x}{\partial r} r\, d\theta$.

Comme $\varphi_x = -\frac{r_0^2}{r}\cos\theta$ on a :

$$\lambda = -\rho \int_0^{2\pi} (-r_0\cos\theta)\frac{\partial \varphi_x}{\partial r}\Big|_{r=r_0} r_0\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} r_0 \cos\theta(\cos\theta) r_0\, d\theta$$

$$= \rho r_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta = \rho r_0^2 \frac{2\pi}{2} = \pi \rho r_0^2$$

$$\lambda = \pi\rho r_0^2 .$$

Sur le disque s'exerce donc la force $-\lambda \frac{d\vec{V_0}}{dt}$ due à l'instationnarité.
La circulation donne la force de portance : $\rho\Gamma \vec{e_3} \wedge \vec{\Omega}$

On a donc $\underline{(m+\lambda) z_0'' = -i\rho\Gamma(V_\infty - z_0')}$

où m est la masse du disque.

La vitesse du fluide en un point z du plan est donnée par :

$$V_e = V_\infty - \frac{(V_\infty - \bar{z}_0')}{(z-z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi(z-z_0)}.$$

Dans le disque la vitesse est :

$$V_i = V_\infty - \Omega(\overline{z-z_0})\,i = V_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi r_0^2}(\overline{z-z_0})$$

On voit donc que si $z_0' \neq V_\infty$ on a $V_i(z=z_0+r_0e^{i\theta}) \neq V_e(z=z_0+r_0e^{i\theta})$

Comme on a assuré la continuité de la composante normale de la vitesse à la surface du disque, c'est donc la composante tangentielle de la vitesse qui subit un saut.

Si l'on remplace le disque solide par le même <u>fluide en mouvement de rotation</u> en bloc l'interface devient une surface libre et la discontinuité de vitesse correspond à une discontinuité de pression. La surface libre ne peut donc pas rester en équilibre.

Annexe 5

Interaction de deux filets tourbillons

Soit un filet tourbillon de circulation Γ_1 situé en T_1 et un autre de circulation Γ_2 situé en T_2, normaux à un plan. Soit G le centre de vorticité de ces deux tourbillons. Comme c'est un point invariant on le prend comme origine du repère du plan.

$T_1(x_1, y_1)$ et $T_2(x_2, y_2)$ dans le repère.

$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log(r)$

Dans ce cas particulier, on a :

$$\Psi_1(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\Gamma_2 \log\left[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2\right]$$

et

$$\Psi_2(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\Gamma_1 \log\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right].$$

On a :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \qquad\qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}.$$

Soit $r^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = L^2$

On a $\frac{dr^2}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)(x_1-x_2) + \left(\frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}\right)(y_1-y_2).$

Comme $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma_2\, 2(y_1-y_2)}{L^2}$ $\quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\Gamma_2\, 2(x_1-x_2)$

$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma_1\, 2(y_1-y_2)}{L^2}$ $\quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{4\pi}\Gamma_1\, 2(x_1-x_2)$

On a donc $\frac{dr^2}{dt} = 0$ d'où $\underline{r = L = cst}$.

Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$: on constate que

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt}.$$

il y a translation d'une vitesse $\vec{v}$. Or l'expression de la vitesse complexe dans le plan complexe induit par un tourbillon ponctuel est $u - iv = \frac{-i\Gamma}{2\pi z}$ d'où

$\boxed{V = \frac{\Gamma_1}{2\pi L}}$. $\vec{V}$ vecteur normal à $\overrightarrow{T_1T_2}$

Si $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$:

G vérifie $\Gamma_1 \overrightarrow{GT_1} + \Gamma_2 \overrightarrow{GT_2} = \vec{0}$

d'où $(\Gamma_1 + \Gamma_2)\overrightarrow{GT_1} + \Gamma_2 \overrightarrow{T_1T_2} = 0$ $\quad T_2 T_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_2} GT_1$.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma_2}{L^2} 2(y_1 - y_2) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{L^2}(y_1)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma_2}{L^2} 2(x_1 - x_2) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{L^2}(x_1)$$

Il y a une rotation autour de G à la vitesse $\boxed{\Omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi L^2}}$