

DEA MECANIQUE ET ENERGETIQUE
MARGERIT DANIEL

TOURBILLONS ANNEAUX TOURBILLONS

RAPPORT
BIBLIOGRAPHIQUE

TUTEUR: Monsieur BRANCHER

SOMMAIRE

I UN TOUR D'HORIZON EXPERIMENTAL, THEORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE:

11 le phénomène:

12 différentes formations:

13 Méthodes d'observation:

131 Mise en évidence de l'anneau:

132 Observation de l'anneau:

2 La théorie des tourbillons:

21 Introduction:

22 Les grands résultats :

221 Le vecteur tourbillon:

222 Les équations:

223 Le champ de vitesse :

224 Théorèmes de Kelvin et de Lagrange:

225 Ligne,surface tourbillon-théorème d'Helmoltz:

226 Tube tourbillon-Son intensité:

227 Evolution de domaine tourbillon:

2271 Résolution par itération:

2272 Résolution numérique:

2273 Autres résolution:

228 Les invariants:

II THEORIE DES ANNEAUX TOURBILLONS:

1 Modélisation:

11 l'anneau comme distribution de Dirac:

111 Les distributions:

1111 Définition et intérêt:

1112 Distributions de Dirac:

1113 Dérivation et distribution de Dirac:

112 L'anneau tourbillon:

113 Distributions concentrées de tourbillons et de sources Théorie des singularités - Solutions élémentaires :

1131 Ecoulement incompressible bidimensionnel:

1132 Ecoulement incompressible tridimensionnel:

12 l'anneau comme tube fin:

13 l'anneau comme ensemble de lignes fermées:

2 Champ des vitesses:

21 *Anneau indéfiniment délié:*

22 *Anneau de faible section:*

3 Mouvement:

4 Enlacement:

III EXPERIENCES D'ANNEAUX

1 la formation:

2 la structure:

3 les résultats de mesures:

4 différentes expériences:

41 *anneau arrivant sur un plan :*

42 *phénomène de saute mouton:*

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

INTRODUCTION

Un grand nombre d'écoulements fluides possèdent des **domaines tourbillonnaire** qui évoluent dans l'espace et dans le temps. Des tourbillons se détachent sur le bord de fuite d'une aile d'avion, ce qui crée la circulation qui est à l'origine de la portance sur l'aile. D'autres apparaissent lorsque l'on ouvre les portes d'une écluse et viennent éroder la rive. La turbulence elle-même est expliquée par l'interaction de gros tourbillons sur des petits qui dissipent l'énergie. On les retrouve aussi dans les turbines, les jets, l'étude de l'atmosphère terrestre et dans bien d'autres écoulements.

Avant d'étudier le comportement de ces domaines tourbillonnaires complexes, il est intéressant d'étudier les domaines tourbillonnaires les plus simples (on pourrait dire élémentaires) que l'on puisse imaginer et qui s'avèrent être soit des cylindres tourbillons, soit des anneaux tourbillons. En superposant, en généralisant ou en complexifiant les résultats obtenus sur ces domaines simples, on peut penser qu'on pourra alors obtenir des modélisations du comportement d'écoulement tourbillonnaires complexes.

On peut alors adopter divers **modélisations** de cylindres tourbillons ou d'anneaux et développer des calculs analytiques ou numériques dont les résultats seront à comparer avec ceux de **divers expériences** qui auront pu être mises en place pour réaliser au mieux des cylindres ou des anneaux tourbillons.

Pour notre part, après un tour d'horizon expérimentale et théorique sur les tourbillons, on s'intéressera donc plus particulièrement à l'étude des anneaux tourbillons en regardant successivement l'aspect théorique puis expérimental.

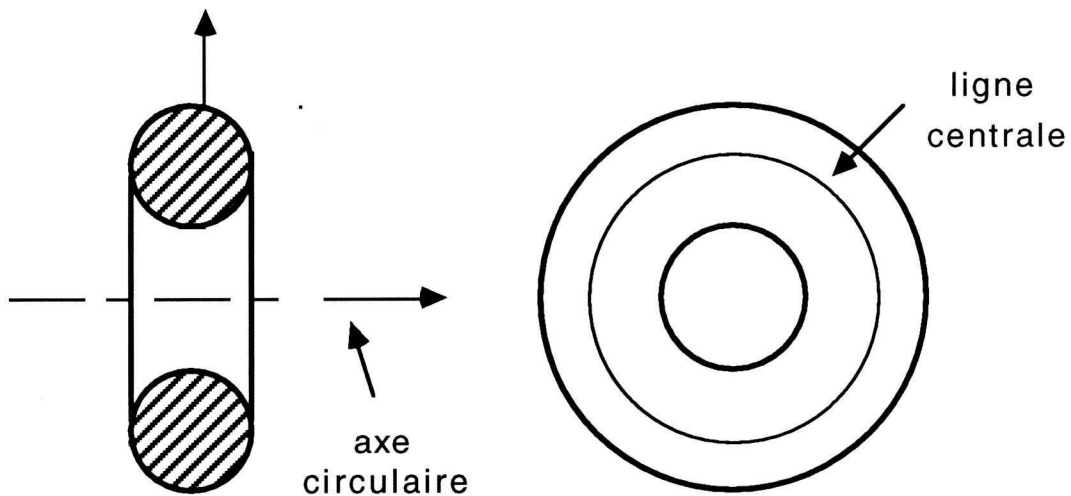
I UN TOUR D'HORIZON EXPERIMENTAL, THEORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE:

Cette première partie à pour but de compléter l'approche des anneaux tourbillons faite en introduction. On va essayer de donner un aperçu de toute l'atmosphère expérimentale, théorique et historique dans laquelle beigne la question des anneaux tourbillons afin de permettre une bonne compréhension de tout ce que l'on peut dire au sujet des anneaux tourbillons. Somme toute, on voudrait prendre un peu de recul, afin de bien aborder le problème.

1 Les méthodes de création et d'observation d'anneaux suivant les auteurs:

11 le phénomène:

On va regrouper ici, sous le nom d'anneau tourbillon toute une classe de phénomènes semblables. Il est possible de différentes façons de créer un volume fluide ayant la forme d'un **tore**. Ce fluide se distingue généralement de son environnement fluide par le fait qu'il possède un **mouvement** de translation d'ensemble dans la direction de son axe, un mouvement de rotation autour de sa ligne centrale et un mouvement radiale.



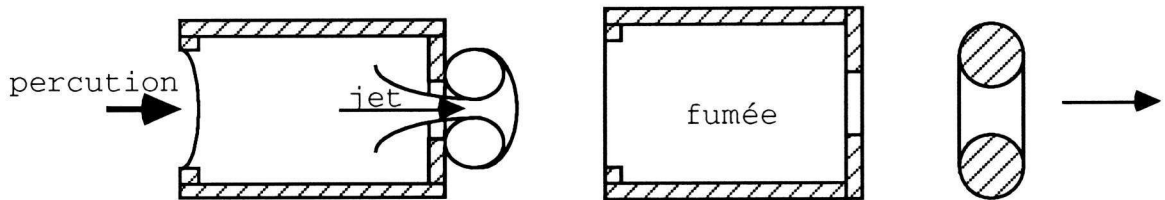
12 différentes formations:

Ce phénomène bien connu est l'objet, depuis fort longtemps, de recherches tant théoriques qu'expérimentales.

Sadron (12) nous présente différentes façons de créer des anneaux dans l'air.

La boîte de Tait:

Dans une boîte percée d'un trou sur une face et possédant une membrane sur la face opposée, on met de la fumée. On expulse la fumée en un jet limité en percutant la membrane. Le jet s'enroule alors en un anneau de fumée. C'est par ce même procédé que les fumeurs arrivent de créer des anneaux de fumée par expulsion de la fumée qui était dans leur bouche.

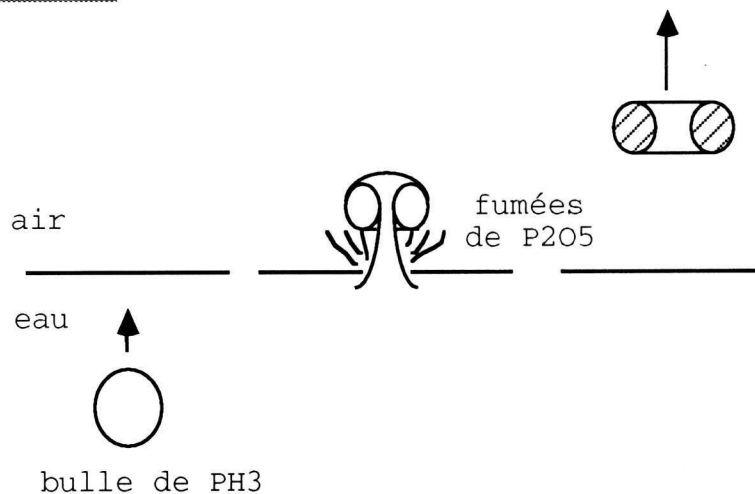


Le même procédé peut-être utilisé pour les liquides.

Le canon paragrêle:

La combustion produit de la fumée et l'explosion augmente brusquement le volume du gaz ce qui expulse la fumée selon un jet qui s'enroule aussi en un anneau.

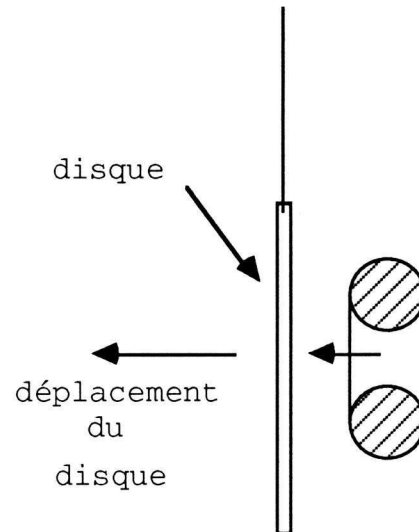
Explosion de bulle:



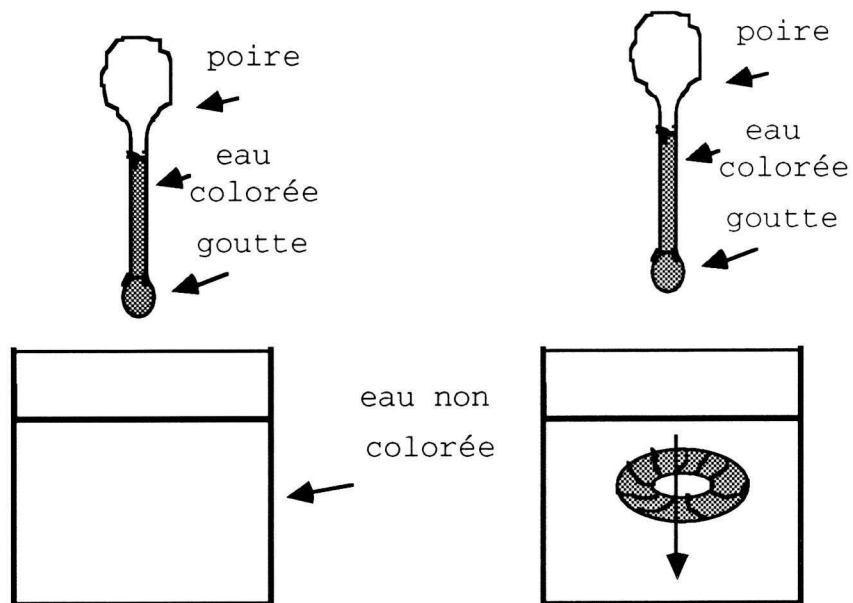
Le PH₃ réagit avec l'air pour former du P₂O₅ qui est expulsé dans l'air et forme un anneau.

Déplacement d'un disque:

L'anneau est ici créé par le déplacement d'un disque.



Par chute de goutte:



La goutte colorée, lorsqu'elle arrive dans l'eau s'enroule en un anneau coloré.

13 Méthodes d'observation:

Ce qui suit se trouve dans les articles (10) (11) (12)

131 Mise en évidence de l'anneau:

Elle est généralement faite par la **coloration** du fluide qui compose l'anneau et qui se déplace .Le problème de cette coloration est qu'elle ne permet pas de suivre le mouvement local des particules colorées car on ne voit bien que le mouvement de translation d'ensemble et le mouvement radial. Le mouvement de rotation autour de la ligne centrale se devine ou se voit mais n'est pas mesurable avec la coloration.

De plus on n'est pas assuré que toutes les particules en mouvement sont colorées .On voit que les particules colorées sont en mouvement mais d'autres peuvent l'être aussi. L'anneau pourrait à priori avoir un diamètre supérieur à celui de l'anneau coloré, ce qui est observé dans l'expérience. L'anneau coloré n'est pas tout à fait l'anneau tourbillon.

L'important dans la dénomination d'anneau tourbillon n'est pas la coloration mais le fait d'avoir une masse fluide de la forme d'un tore se distinguant par son **mouvement** comme on l'a défini à la page 2. Une coloration immobile en forme d'anneau n'est pas un anneau tourbillon!

Au lieu d'utiliser une coloration du liquide, on peut repérer le mouvement à l'aide d'un liquide dans lequel sont parsemées des petites particules (de la poudre d'aluminium par exemple). On peut alors observer le mouvement en observant le mouvement des particules. On peut ainsi observer les anneaux tourbillons, mesurer précisément les vitesses ainsi que le diamètre réel de l'anneau.

132 Observation de l'anneau:

D'abord il y a l'**observation visuelle** qui permet d'avoir des ordres de grandeur des dimensions, des vitesses et du temps du phénomène. Pour avoir des mesures plus précises, on peut faire des **photographies** ou même **filmer** le phénomène avec une camera rapide.

Une photographie avec un long temps d'exposition permet de voir l'augmentation de diamètre.

On peut aussi observer l'anneau en regardant sa trace (ou empreinte) sur un grillage plan recouvert d'une mince pellicule liquide placé sur le trajet de l'anneau et que l'anneau peut traverser sans déformation.

Dans de l'eau avec des particules d'aluminium, l'oeil perçoit les **lignes de circulation** alors qu'une plaque photographique enregistre les **trajectoires** des particules et qu'une pose très courte donne les **lignes instantanées de courant**. Marty de cette façon arrive de mesurer les vitesses

des particules autour de la ligne centrale.

On vient de voir comment expérimentalement se manifeste le phénomène d'anneau tourbillon.

2 La théorie des tourbillons:

21 introduction:

Sous le nom de **théorie des tourbillons**, on regroupe toute une série de développements qui ont rapport au champ du rotationnel des vitesses d'un fluide qui souvent est parfait.

Il est important également d'avoir toujours à l'esprit la palette d'outils mathématiques qu'utilise la mécanique macroscopique des fluides pour s'exprimer (modélisation et résolution) : géométrie différentielle (analyse tensorielle, développements asymptotiques,...); analyse fonctionnelle (dérivation, intégration, théorie des distributions,...) et analyse numérique.

22 Les grands résultats :

La petite présentation de la théorie des tourbillons, qui va suivre, s'appuie sur les ouvrages (6) (7) et (8) de la bibliographie.

221 Le vecteur tourbillon:

Soit $\vec{V}(\vec{x},t)$ le champ des vitesses. Soit le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ tel que:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V})$$

et soit le vecteur vortacité :

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{V}) = 2 \vec{\Omega}$$

$\vec{V} = V_i = (u, v, w)$ et $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \omega_i = (\xi, \eta, \zeta)$ dans un repère cartésien

M est en $\vec{x} = x_i = (x, y, z)$ à l'instant t et en $\vec{a} = a_\alpha = (a, b, c)$ à l'instant t_0

Σ le fluide à l'instant t et Σ_0 à t_0

222 Les équations:

$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$: champ des vitesses

P: pression

\vec{f} : force par unité de masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (1)$$

On note $\frac{\partial}{\partial t}$ l'opérateur de dérivation partielle.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(P) + \vec{f} \quad (2)$$

D'où : $\operatorname{div}(\vec{\omega}) = 0 \quad (3)$ et :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{V} \wedge \vec{\omega}) + \nu \Delta \vec{\omega} + \operatorname{rot}(\vec{f}) \quad (4)$$

En utilisant (3) et (1) dans (4), si $\operatorname{rot}(\vec{f}) = 0$ et $\mu = 0$, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\frac{d \omega_i}{d t} = \omega_j V_{i,j}$$

En coordonnées de Lagrange :

la conservation de la masse est $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_\alpha} \right| \quad (6)$

Pour les liquides $\rho = \rho_0$

En écrivant $\operatorname{rot}_a(\vec{f}) = 0$ et à partir de (2) et (6), on obtient, si $\mu = 0$, les équations de Cauchy :

$$\omega_j = \omega_0^j x_{i,\alpha} \delta_{\alpha j}$$

C'est les intégrales des équations de Helmholtz .

223 Le champ de vitesse :

On suppose $\mu = 0$ et $\operatorname{rot}(\vec{f}) = 0$

Il faut bien voir que le fait de calculer la solution fluide parfait correspond à calculer la solution visqueuse au première ordre même si c'est un problème à perturbation singulière et que le première ordre peut s'écarter de la solution

expérimentale: vitesse induite à distance et non de proche en proche par viscosité. Avoir le première ordre c'est déjà avoir une partie du résultat.

Si on a le champ des vitesses en tout point de Σ à l'instant t , on en déduit immédiatement le champ de vorticité par passage au rotationnel. Inversement, supposons connu le champ des tourbillons. On peut alors trouver l'unique champ de vitesse associé (ce qui n'est à priori pas évident).

On a $\text{div}(\vec{V})=0$ et $\text{rot}(\vec{V})=\vec{\omega}$. On voit l'analogie avec l'électromagnétisme pour lequel on a :

$$\text{div}(\vec{B})=0 \text{ et } \text{rot}(\vec{B})=4\pi\vec{I}$$

\vec{B} : champ magnétique \vec{I} : densité volumique de courant

Soit \vec{A} tel que $\text{rot}(\vec{A})=\vec{V}$ et $\text{div}(\vec{A})=0$. On a alors $-\Delta\vec{A}=\vec{\omega}$ d'où

$$\vec{A}=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\vec{\omega}(\vec{\epsilon})}{|\vec{x}-\vec{\epsilon}|}d\epsilon \qquad \vec{V}=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\vec{\omega}(\vec{\epsilon})\Lambda(\vec{x}-\vec{\epsilon})}{|\vec{x}-\vec{\epsilon}|^3}d\epsilon$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\vec{V}=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\vec{\omega}'\Lambda r}{r^3}d\tau'=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\Lambda\vec{\omega}'d\tau'$$

en notant $\vec{r}=\vec{x}-\vec{\epsilon}$. C'est la formule de Biot et Savart.

On voit que, si on a le champ $\vec{\omega}$ à l'instant t , on trouve le champ \vec{V} à l'instant t et inversement. Au lieu de prendre comme inconnues d'Euler les vitesses $\vec{V}(\vec{x},t)$, on peut donc prendre les vecteurs tourbillons $\vec{\omega}(\vec{x},t)$. C'est alors une nouvelle description eulerienne du fluide que l'on peut faire et dont le développement n'est autre que la théorie des tourbillons.

224 Théorèmes de Kelvin et de Lagrange:

Dans la suite on se place dans le cas $\text{rot}(f)=0$ et $v=0$ sauf mention contraire.

Soit C_t une courbe mati rielle fermée et $\Gamma=\oint_{C_t}\vec{V}\cdot d\vec{l}$ la circulation de la vitesse sur cette courbe.

Théorème de Kelvin:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Théorème de Lagrange:

Si à un instant t_0 il y a un potentiel des vitesses dans D_{t_0} (c'est à dire $\vec{\omega}_{t_0} = 0$ dans D_{t_0}), alors il y aura un potentiel à tout instant dans D_t pour $t > t_0$.

225 Ligne surface tourbillon-théorème d'Helmoltz:

Une **ligne tourbillon** est une ligne pour laquelle $\vec{\omega}$ est tangent en tout point. Une **surface tourbillon** est une surface engendrée par les lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe donnée.

Théorème d'Helmoltz:

Les surfaces (ou lignes) de tourbillons se conservent, ce sont des surfaces (ou lignes) fluides. Le champ $\vec{\omega}$ est gelé dans la matière et se déplace avec elle.

226 Tube tourbillon-Son intensité:

Un **tube tourbillon** est une surface tourbillon construite sur une courbe fermée. C'est donc une **surface fluide matérielle**.

La circulation sur une ligne tracée sur une surface tourbillon est nulle dès que la ligne peut se ramener à un point par déformation continue sur la surface.

Théorème:

La circulation pour les lignes fermées entourant une fois le tube est constante dans le temps et le long du tube. On appelle intensité du tube la valeur constante de cette circulation.

L'invariance dans le temps découle du théorème de Kelvin. Pour constater l'invariance le long du tube, il suffit d'écrire que la circulation est nulle sur la ligne composée qu'indique la figure ci-dessous:



Corollaire:

Un tube tourbillonnaire ne peut se terminer au milieu du fluide. Il se ferme sur lui-même comme un anneau, ou bien il s'étend jusqu'à une paroi, ou jusqu'à l'infini, ou jusqu'à une surface de discontinuité. C'est ce que l'on a déjà signalé dans l'introduction.

Comme le fluide est incompressible et que le tube tourbillon est un tube matériel, son **volume** est une quantité qui se conserve aussi dans le temps.

227 Evolution de domaine tourbillon:

Soit Σ le domaine fluide. Supposons connu la cinématique de Σ à l'instant t_0 , soit par la donnée du champ de vitesse, soit par celle du champ de vorticité.

Si le fluide ne subit aucune force extérieure, les équations locales de la dynamique ne comportent que des grandeurs cinématiques et permettent de déduire la cinématique à l'instant t ultérieur. La cinématique à l'instant t_0 est donc la condition initial du système d'équations.

Supposons que la cinématique soit donnée à l'instant t_0 par la présence d'un domaine tourbillonnaire D_{t_0} dans Σ_{t_0} . On a déjà une idée des évolutions possibles. Elles doivent satisfaire les théorèmes précédant des chapitre 224 225 et 226. Pour avoir une évolution plus précise de D_t , il faut résoudre le système d'équations dynamiques avec la condition initiale.

2271 Résolution par itération:

Villat (7) propose une première façon de déterminer l'évolution de D_{t_0} . Il part de la constatation que le problème revient à déterminer trois fonctions $x(a,b,c)$, $y(a,b,c)$ et $z(a,b,c)$ vérifiant les conditions initiales :

$$x(a,b,c,t_0)=a, y(a,b,c,t_0)=b \text{ et } z(a,b,c,t_0)=c \quad (1)$$

dans le volume D_{t_0} , et vérifiant les formules de Cauchy et les équations intégrales de la formule de Biot Il propose alors une méthode de résolution du problème par itérations successives.

2272 Résolution numérique:

On peut résoudre numériquement l'équation de Navier-Stokes.

2273 Autres résolution:

L'ellipse:

Le problème se résout dans le cas d'une ellipse possédant une vorticité uniforme ω . Il apparait que le problème est complètement satisfait si on imagine que la limite elliptique tourne sans changement de forme à la vitesse constante N. Le développement est fait en annexe et on obtient:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad N = \frac{ab}{(a+b)^2} \omega$$

n tourbillons: ((6),(8))

Un tourbillon ponctuel d'intensité Γ placé à l'origine du plan est la répartition de vorticité telle que la fonction de courant Ψ de l'écoulement soit :

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log(r)$$

où r est la distance à l'origine. (une meilleur présentation plus complète sera faite en II)

Soient n tourbillons ponctuels du plan. Le tourbillon i d'intensité Γ_i est en (x_i, y_i) . La fonction de l'écoulement est :

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^n \Gamma_i \log[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]$$

Le mouvement du j -ième tourbillon se calcul en considérant qu'il est placé dans l'écoulement induit par les $n-1$ autres tourbillons. Cet écoulement a pour fonction de courant :

$$\psi_j(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j}^n \Gamma_i \log[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]$$

On a donc les équations du mouvement:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial \psi_j}{\partial x}$$

Posons:

$$r_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \quad W = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_j \Gamma_i \Gamma_j \log(r_{ij})$$

et $q_j = \sqrt{\Gamma_j} x_j \quad p_j = \sqrt{\Gamma_j} y_j$

On a alors :

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p_j} \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial q_j}$$

On reconnaît les équations d'un système hamiltonien où W est l'hamiltonien du système. Tous les propriétés et les résultats de tels systèmes sont donc applicables pour notre problème.

Le cas particulier de deux tourbillons est traité en annexe.

.....disque tourbillon dans un écoulement uniforme:

Un disque tourbillon d'intensité uniforme est placé dans un écoulement uniforme de vitesse V_0 .

En considérant le disque tourbillon comme un disque matériel en rotation et en lui appliquant la force de portance de Joukovski de l'écoulement stationnaire à chaque instant, on trouve que le disque décrit une cycloïde. Ce calcul est développé en annexe.

228 Les invariants:

On définit:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho V^2 dx \quad \frac{dE_C}{dt} = -\mu \int_{\Sigma} |\vec{\omega}|^2 dx = 0 \text{ si } \mu=0$$

et l'ensrophie:

$$\Omega_s = \int_{\Sigma} |\vec{\omega}|^2 dx$$

$\vec{V} \cdot \vec{\omega}$ s'appelle la densité volumique d'hélicité et

$$I = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\omega} dx$$

l'hélicité de Σ .

On a $\frac{dI}{dt} = 0$ si $\partial\Sigma$ est une surface tourbillon close.

Dans le plan, on a :

$d\tau = \text{constant}$ où $d\tau$ est l'élément de volume

$$\frac{d}{dt} \int_{R^2} \omega d\tau = 0$$

(théorème de Kélevin)

$$\frac{d}{dt} \int_{R^2} x_i \omega d\tau = 0$$

Soit le point:

$$X_i = \frac{\int x_i \omega \, d\tau}{\int \omega \, d\tau}$$

dit centre de vorticité.

Le centre de vorticité est donc invariant.(calculs en annexe)

On a :

$$\frac{E_C}{2} = \int \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\tau$$

où (u,v,w) est le vecteur vitesse

Ceci termine la liste des généralités que l'on peut dire sur les tourbillons. On doit toujours avoir ces renseignements à l'esprit lorsque dans la suite on étudie plus particulièrement les anneaux tourbillons.

II THEORIE DES ANNEAUX TOURBILLONS:

Nous sommes donc près pour l'étude théorique des anneaux tourbillons. Nous allons développer ce que l'on vient de voir à ce cas particulier. En plus de ces renseignements, dans cette partie, nous allons nous servir essentiellement des ouvrages (7), (8), (9) et (11) de la bibliographie, ainsi que des ouvrages (1), (2) et (3) pour les parties plus mathématiques.

1 Modélisation:

Ce chapitre se propose de définir théoriquement l'anneau tourbillon.Plusieurs approches complémentaires sont faites.

11 l'anneau comme distribution de Dirac:

Après un 'rappel' sur les distributions, nous allons définir l'anneau tourbillon. Pour finir, nous verrons l'importance et la situation des distributions de Dirac tourbillon (et donc celle de l'anneau) dans la résolution des écoulements fluides.

111 Les distributions:

Ce paragraphe est adressé à tout ceux, qui (comme moi avant l'étude des anneaux tourbillons) ne connaissent que la distribution de Dirac sur une variété ponctuelle (c'est à dire le Dirac ponctuel).

1111 Définition et intérêt:

Donnons les définitions utiles de quelques structures d'espace vectoriel.

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme induite. Dans de tels espaces on a des bases orthonormées. Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est appelé espace vectoriel normé complet ou espace de Banach. Un espace préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert. L'intérêt de travailler dans un espace complet est qu'on peut alors montrer l'existence de la limite d'une suite (et donc d'un algorithme numérique) sans connaître la valeur de la limite.

L'espace des applications continues de E dans R, $L(E, R) = E'$, est appelé le dual topologique de E. Le dual d'un espace de Banach est un espace de Banach. L'intérêt du dual E' est de permettre la définition d'une topologie de semi-normes sur E à l'aide du dual. Si l'espace est réflexif ($E = E'$) et infini la boule unité est "faiblement compact" alors qu'elle n'est pas compact. C'est donc un outil pour montrer l'existence de solutions.

Soit $D(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment différentiables et à support compact sur \mathbb{R}^N . $D(\mathbb{R}^N)$ est appelé espace des fonctions test. On appelle distribution tout élément du dual $D'(\mathbb{R}^N)$ de $D(\mathbb{R}^N)$. Si ϕ est dans $D(\mathbb{R}^N)$, et T est dans $D'(\mathbb{R}^N)$ on note

$\langle T, \varphi \rangle$ l'image de φ par T . C'est en utilisant les distributions qu'on peut démontrer l'existence de solutions pour les problèmes différentiels aux limites de la mécanique des fluides. Le principe de mise en dualité avec l'espace de fonctions test fournit les formulations faibles et variationnelles qui sont à la base d'algorithmes de résolution. On introduit des espaces de Hilbert de distributions appelés espace de Sobolev dans lesquels on cherche les solutions.

On peut définir des "distributions vectorielles" en considérant les applications linéaires continues de $D(\mathbb{R}^N)$ dans \mathbb{R}^P . On définit ainsi $\vec{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\langle \vec{T}, \varphi \rangle = \vec{a}$.

En physique on est naturellement conduit à calculer des expressions de la forme $\langle T, \varphi \rangle$. $\langle T, r^2 \rangle$ est un moment d'inertie et $\left\langle T, \left| \frac{1}{x-b} \right| \right\rangle$ un potentiel newtonien. L'analogie entre distribution mathématique et "physique" n'est pas à démontrer. Les distributions mathématiques constituent une définition mathématique correcte (ou adéquate) des "distributions" rencontrées en physique.

Ainsi on définit les distributions surfaciques de masse par: $\langle T, \varphi \rangle = \int \rho(x) \varphi(x) dS$ où $\rho(x)$ est la densité superficielle de masse et les distributions surfaciques de doublet par $\langle T, \varphi \rangle = \int \rho(x) \frac{dx}{dn} dS$ où $\rho(x)$ est la densité superficielle de doublet

La formulation intégrale des équations locales de la mécanique suggère des définitions des grandeurs physiques (sources et champs) par leurs effets. Par exemple en électromagnétisme la densité de charge est déterminée à partir de la charge mesurée dans un certain volume. Le schéma sous-jacent est "fonctionnel" et est à la base du concept mathématique de distribution comme fonctionnelle définie par ses effets sur des fonctions test.

1112 Distributions de Dirac:

Soit le changement de variables $\tau : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$
 $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

Soit J le déterminant du jacobien de cette transformation.

A φ de $D(\mathbb{R}^N)$ est associé φ' de $D(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi'(\vec{x}') = \varphi(\vec{x})$

A T de $D'(\mathbb{R}^N)$ est associé T' de $D'(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T', \varphi' |J| \rangle$$

Soit (V) une variété de \mathbb{R}^N de dimension p muni de coordonnées locales et (V') son image par $\tau : (V) \rightarrow (V')$ telle que (V') soit un pavé de \mathbb{R}^p .

La distribution de Dirac sur la variété (V) (ou distribution concentrée) $\delta_{(V)}$ est définie par :

$$\langle \delta_{(V)}, \varphi \rangle = \int_{V'} \left[\varphi'(\vec{x}') |J_1(\vec{x}')| \dots |J_p(\vec{x}')| \right]_{x'_{p+1}=0, \dots, x'_N=0} dx'_1 \dots dx'_p$$

Ainsi on a comme cas particuliers:

-le Dirac à support ponctuel en \vec{a} : $\langle \delta_{(\vec{a})}, \varphi \rangle = \varphi(\vec{a})$

-le Dirac à support linéique sur une courbe C :

$$\langle \delta_{(C)}, \varphi \rangle = \int_C \varphi(s) ds$$

où s est l'abscisse curviligne.

-le Dirac à support surfacique sur S :

$$\langle \delta_{(S)}, \varphi \rangle = \int_S \varphi(\vec{x}) d\vec{\tau}$$

Interprétation de $\delta_{(C)}$:

on définit le tube centré sur C comme le domaine engendré par un cercle V_j de rayon $1/j$. Soit F_j la fonction nulle à l'extérieur du tube et de valeur constante à l'intérieur telle que

$$\int_{x \text{ dans } V_j} F_j(x) ds = 1$$

On a $\delta_{(C)} := \lim_{j \rightarrow \infty} T F_j$

Les distributions ont donc aussi l'intérêt de remplacer les calculs de limites par des calculs de distributions.

1113 Dérivation et distribution de Dirac:

On définit la dérivée par:

$$\langle T_{,i}, \varphi \rangle = - \langle T, \varphi_{,i} \rangle \text{ pour tout } \varphi \text{ de } D(\mathbb{R}^N)$$

On définit la distribution Tf par

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \varphi(x) dx$$

Si f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui subit un saut de valeur σ_0 en 0 .

On a $T'f = T\{f'\} + \sigma_0 \delta_0$ où $\{f'\}$ est la dérivée normale de f pour $x < 0$ et $x > 0$. Si f est défini sur \mathbb{R}^N et est discontinue sur la surface S on a:

$$\frac{\partial Tf}{\partial x_i} = T \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sigma_0 \cos(\theta_i) \delta(S)$$

$\cos(\theta_i)$ est la projection suivant x_i de la normale à S .

De la même façon l'expression de ΔTf fait intervenir des Diracs $\delta(S)$

Les dérivées de distribution associées à des fonctions ayant des discontinuités concentrées font donc apparaître des Diracs concentrés. On définit alors le gradient, la divergence et le rotationnel de distributions.

112 L'anneau tourbillon:

Soit C_0 une courbe fermée.

On définit l'anneau tourbillon d'intensité Γ (ou filet tourbillon ou encore tube indéfiniment délié) comme le champ de vorticité $\vec{\omega}$ tel que : $T\vec{\omega} = \Gamma \delta_{C_0} \vec{\tau}$ où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire

tangent en un point de C_0 et $\langle \delta_{C_0}, \varphi \rangle = \oint_{C_0} \varphi ds$.



C_0

113 Distributions concentrées de tourbillons et de sources Théorie des singularités - Solutions élémentaires :

Nous allons nous intéresser à l'importance qu'ont les distributions concentrées de tourbillons et de source dans la résolution des écoulements fluides. En mécanique des fluides, tout cela relève de la théorie des singularités que l'on peut trouver dans l'ouvrage (4).

On a vu qu'on pouvait avoir les mêmes équations que l'électrodynamique et donc on trouve dans l'ouvrage (3) des renseignements utiles et similaires.

Soit L un opérateur de dérivation dans $D'(\mathbb{R}^N)$. Notons δ^0 une distribution dont les N composantes, non toutes nulles, sont égales soit à 0 soit à δ_0 .

On appelle solution élémentaire d'un opérateur L une distribution E telle que $L(E) = \delta^0$.

Soit C un domaine de \mathbb{R}^N . Soit $L(r) = f$ l'équation locale à résoudre à l'extérieur de C (à cette équation est associée d'éventuelles discontinuités physiques). Cela revient à chercher la distribution Tr telle que $L(Tr) - f$ soit nulle à l'extérieur de C . Pour construire une distribution solution de ce problème, il suffit, dans le cas où L est un opérateur linéaire, d'effectuer la somme des produits de convolution $T = E \times \Sigma_c + E^* \times f$ où:

- X est le produit de convolution
- E est une solution élémentaire de l'opérateur L
- Σ_c est une distribution de support contenu dans C .
- E^* est une solution élémentaire de l'opérateur L correspondant à l'équation $L(E) = \delta^*$ où δ^* est une distribution qui a les mêmes composantes nulles que f et dont les autres sont égales à δ_0 .

Le choix de Σ_c se portera sur une distribution dont l'"action": $E \times \Sigma_c$ est suffisamment "efficace" sur les conditions aux limites à satisfaire. Souvent on a $\Sigma_c = \delta_{\partial C}$.

1131 Ecoulement incompressible bidimensionnel:

$$\operatorname{div}(\vec{V})=0 \quad \operatorname{rot}(\vec{V})=0$$

et

$$\lim_{\|\vec{OM}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}(M)\| = 0$$

Première solution élémentaire:

C'est la solution de

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \delta_0 \quad \operatorname{rot}(\vec{V}) = 0$$

et

$$\lim_{\|\vec{OM}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}(M)\| = 0$$

Comme $\operatorname{div}(\vec{V})$ est la densité de production volumique de fluide, c'est donc la production unitaire de masse centrée à l'origine. On dit que cet écoulement est engendré par une source ponctuelle unitaire.

On trouve $\vec{V} = \operatorname{grad}(\varphi)$ avec $\varphi = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$ (c'est la solution de $\Delta\varphi = \delta_0$ dans \mathbb{R}^2)

Deuxième solution élémentaire:

Soit $\vec{\zeta}$ le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de calcul et orienté tel que le trièdre formé par le dièdre du plan et $\vec{\zeta}$ soit direct.

C'est la solution de :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad \vec{\zeta} \cdot \operatorname{rot}(\vec{V}) = \delta_0$$

et

$$\lim_{\|\vec{OM}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}(M)\| = 0$$

Comme $\vec{\zeta} \cdot \operatorname{rot}(\vec{V})$ est la densité de production de circulation de vitesse, c'est donc une production unitaire de circulation centrée à l'origine.

On dit que cet écoulement est engendré par un tourbillon ponctuel unitaire placé à l'origine.

On trouve $\vec{V} = \operatorname{rot}(\psi \vec{\zeta})$ avec $\psi = -\frac{1}{2\pi} \ln(r)$

On dit que ces deux solutions élémentaires sont des singularités ponctuelles. Dans le plan on définit une vitesse complexe $V = u + iv$.

On définit alors une source d'intensité q , un tourbillon d'intensité c et une singularité source-tourbillon ponctuelle. On définit aussi une répartition de singularité source-tourbillon sur une surface ou sur une courbe en

faisant la convolution de la singularité source-tourbillon ponctuelle par δ_C ou δ_S .

1132. Ecoulement incompressible tridimensionnel:

Première solution élémentaire : la source ponctuelle

On a alors $\varphi = -\frac{1}{4\pi r}$ et on définit des sources réparties.

Deuxième solution élémentaire :

Soit $\vec{\zeta}$ le vecteur unitaire donné. Il n'existe pas de solution au problème :

$$\operatorname{div}(\vec{V})=0 \quad \operatorname{rot}(\vec{V}) = \delta_0 \vec{\zeta}$$

et

$$\lim_{\|\vec{OM}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}(M)\| = 0$$

Soit

$$\vec{X} = \int_v \operatorname{rot}(\vec{V}) \, d\tau = \int_s \vec{dS} \wedge \vec{V}$$

$\operatorname{rot}(\vec{V})$ s'interprète comme la densité de production de vecteur \vec{X} .

On peut cependant définir un champ de vitesse conservatif et à rotationnel concentré sur une ligne L donnée.

$$\operatorname{div}(\vec{V})=0 \quad \operatorname{rot}(\vec{V}) = \delta_L \vec{\zeta} \quad \lim_{\|\vec{OM}\| \rightarrow \infty} \|\vec{V}(M)\| = 0$$

si $\vec{\zeta}$ est un champ de vecteurs tangent à L et de module constant et si L est une courbe fermée où admettant deux branches à l'infini. Soit $\gamma = \|\vec{\zeta}\| = \text{constante}$.

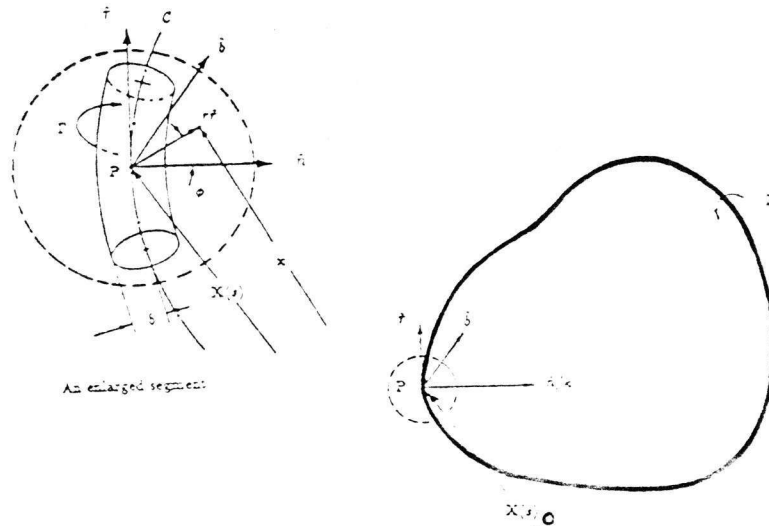
On définit également des surfaces tourbillonnaires dans certaines conditions, et des doublets sources ponctuels et répartis.

On a donc vu une définition de l'anneau tourbillon comme distribution concentrée et que cette solution fait partie des écoulements élémentaires qui servent dans les calculs de mécanique des fluides.

12 l'anneau comme tube fin:

On peut considérer que l'anneau est un tore de vorticité ayant une faible section (filament tourbillon)

Plus précisément (figure suivante), la vorticité est concentrée dans un tube fin caractérisé par sa **ligne centrale** et son épaisseur de tube 2δ telle que $\delta/l=O(\varepsilon)$ où ε est un petit paramètre et l une longueur caractéristique. Des précisions complémentaires pourront être introduites selon les besoins des calculs.



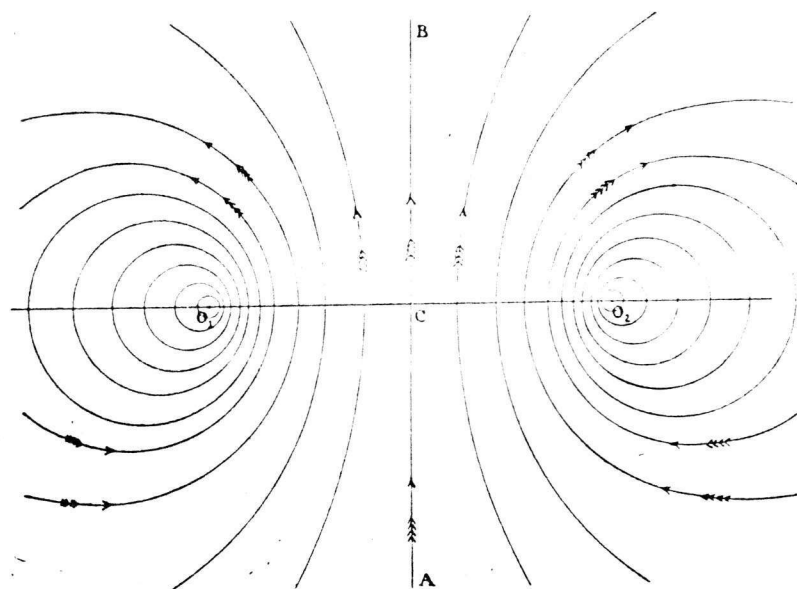
A cause de la décroissance rapide de la vorticité loin de la ligne centrale, l'écoulement loin du filament à une distance $r/\delta \gg 1$ est potentiel. Il ressemble à celui induit par un filet tourbillon de courbe C . D'où une méthode de développement limité **raccordé** pour étudier cette écoulement en posant $r^*=r/\varepsilon$ (solution intérieure et extérieure). Le calcul et la modélisation du paragraphe 11 est la solution extérieur du calcul de notre nouvelle modélisation.

13 l'anneau comme ensemble de lignes fermées:

C'est l'approche expérimentale de Bouasse.

En théorie, on distingue le **tourbillon**: zone de vorticité, le **corps du tourbillon**: zone où les lignes de courant sont fermées et l'**atmosphère**(extérieur du corps). Mais dans la l'expérience, on ne peut distinguer le corps et le tourbillon qu'il contient. Bouasse propose alors une définition du tourbillon comme un volume où les lignes de courant sont fermées ou à peu près telles. Pour lui le tourbillon est le corps.

L'anneau tourbillon est donc représenté par la représentation de ses lignes de courants fermées autour d'une ligne centrale:



2 Champ des vitesses:

On s'intéresse au champ des vitesses créé par l'anneau tourbillon.

21 Anneau indéfiniment délié:

Il est préférable de faire un calcul en distributions que de faire des limites. Comme:

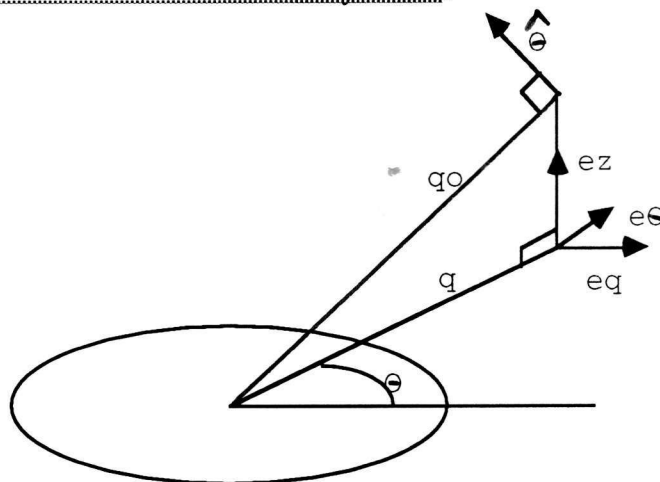
$$\vec{\omega}(\varepsilon) = \Gamma \delta_C \vec{\tau}$$

on a:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}(\varepsilon)}{|\mathbf{x}-\varepsilon|} d\varepsilon = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{\tau}}{|\mathbf{x}-\varepsilon|} ds$$

On peut soit faire un calcul simple sur un anneau circulaire ou un calcul en coordonnées curvilignes si la fibre n'est pas circulaire

anneau circulaire(cercle de rayon a):



On utilise les coordonnées cylindriques (q, θ, z) et le repère associé $(\vec{e}_q, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On a alors $\vec{V} = (s, 0, w)$:

$$s = -\frac{1}{q} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad w = \frac{1}{q} \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

avec

$$\psi = q A_\theta = \frac{\Gamma q a}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\varepsilon)}{\sqrt{z^2 + q^2 + a^2 - 2 a q \cos(\varepsilon)}} d\varepsilon$$

On va développer le résultat par rapport à $q=a$. Pour cela, on pose

$q_0^2 = (a-q)^2 + z^2$ et on développe par rapport à $q_0=0$

On trouve $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1$ avec

$$\vec{V}_0 = \frac{\Gamma}{2\pi q_0} \hat{\theta}$$

et la vitesse induite

$$\vec{V}_1 = \frac{\Gamma}{2\pi a} \log\left(\frac{1}{q_0}\right) \vec{e}_z$$

anneau quelconque:

On utilise désormais les coordonnées curvilignes de la figure du paragraphe 12

s est l'abscisse curviligne

Soit $\theta = \phi - \theta_0(s)$ avec

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial s} = -\sigma T \quad \sigma = |X(s)|$$

et T la torsion de C :

$$T = -\hat{b} \cdot \frac{\hat{n}}{\sigma}$$

Soit (r, θ, s) les coordonnées respectivement radiales, angulaire et tangentielles. Soit $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\tau}$ la base vectorielle correspondante. On a: (voir annexe)

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} + \frac{\Gamma \kappa}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) \hat{b} + \frac{\Gamma \kappa}{4\pi} \cos(\theta) \hat{\theta} + \dots$$

où

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

Cette formule généralise la précédente.

22 Anneau de faible section:

Ting_Klein propose une méthode de développement asymptotique raccordée sur l'anneau vu comme un tube fin.

3 Mouvement:

D'après ce que l'on a vu au II3, on pourrait utiliser une méthode d'itération successives ou une méthode numérique.

Ting_Klein propose une méthode de développement asymptotique raccordée sur l'anneau vu comme un tube fin. (L'étude de l'anneau circulaire montre que sa section ne reste pas circulaire d'où l'utilisation de coordonnées curvilignes).

4 Enlacement:

Il peut être intéressant d'étudier le comportement de deux anneaux enlacés. On trouve des éléments de réponse à cette question dans (2) et (9).

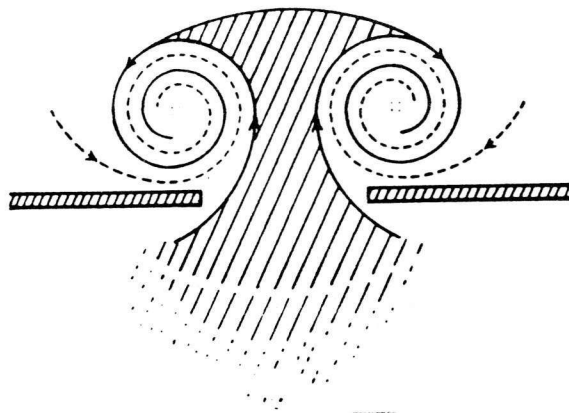
Nous venons de voir différentes modélisations possibles de l'anneau tourbillon.

III EXPERIENCES D'ANNEAUX

Nous allons nous intéresser aux anneaux tourbillons d'un point de vue expérimental. Nous nous servons pour ce qui suit des ouvrages expérimentaux cités en bibliographie.

1 la formation:

Il semble vraisemblable d'admettre que c'est le frottement des parties superficielles du jet coloré sur l'air ou le liquide initialement immobile et l'entourant qui produit la rotation.

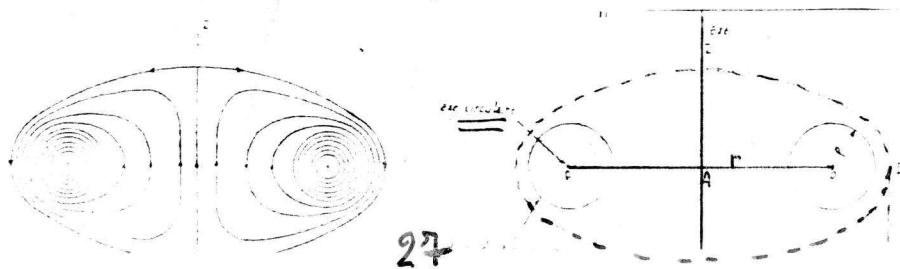


L'anneau ne se forme pas exclusivement avec l'air expulsé dans le jet. L'air extérieur est entraînée dans le corps de l'anneau.

2 la structure:

Expérimentalement le tourbillon est défini au sens de Bouasse ainsi que l'on a vu dans le II 13.

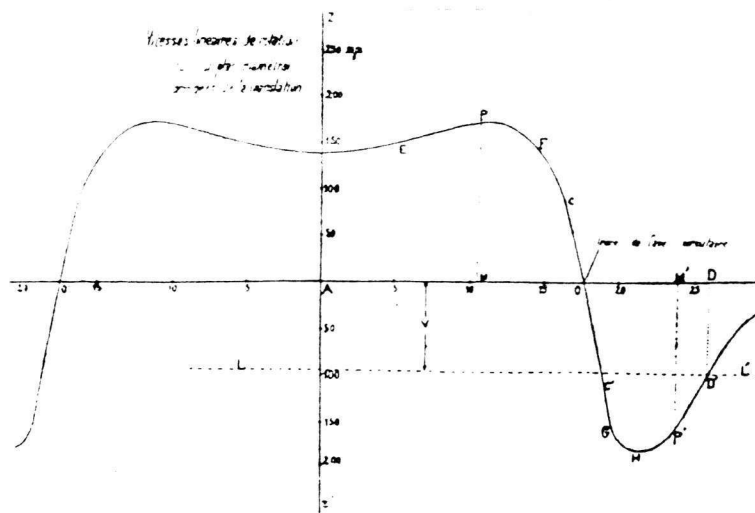
Plusieurs expériences nous montrent que "l'anneau" est un tore sans trou comme sur la figure suivante:



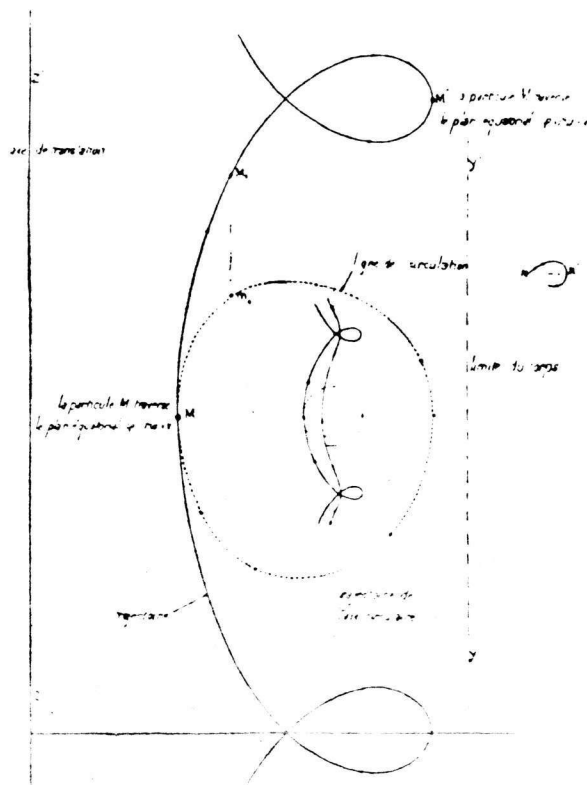
Si l'anneau passe dans un nuage de fumée, il en ressort un ellipsoïde qui se propage. Le tore sans trou est le seul à pouvoir expliquer les traces laissées par l'anneau. Les mesures de vitesse donnent des lignes de courant d'un tore sans trou. Plus simplement, si on utilise des poussières d'aluminium au lieu de coloration, on voit un ellipsoïde et non un anneau!

3 les résultats de mesures:

Marty a fait des mesures à l'aide d'un suivi de particules d'aluminium (par photographies). Il a obtenu comme vitesse de rotation autour de la ligne centrale dans le référentiel de l'anneau:



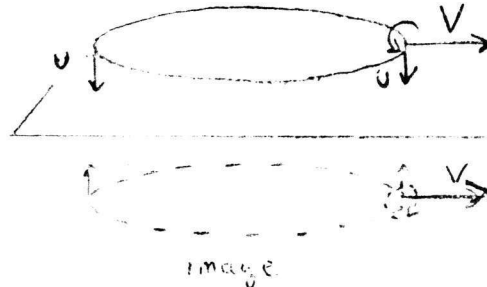
De plus, il a tracé les trajectoires des particules. Ce sont des cycloïdes (on en déduit les lignes de courant)



4 différentes expériences:

41 anneau arrivant sur un plan :

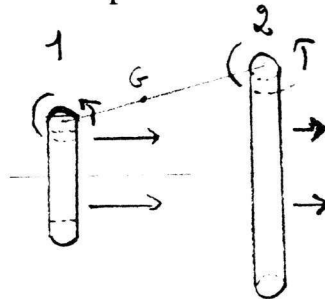
L'anneau lorsqu'il arrive sur un plan voit son diamètre augmenter. On a une explication simple du phénomène à l'aide de la théorie des images. Tout se passe comme si il y avait un deuxième anneau symétrique du premier par rapport au plan.



Une petite portion d'anneau avec son symétrique sur l'anneau image forment deux filets liés dont la somme des circulations est nulle. Il y a donc translation des deux portions suivant une direction normale à un plan passant par les deux filets donc une direction radiale par rapport à l'anneau. En tout point de l'anneau il existe une vitesse radiale qui augmente le rayon de l'anneau.

42 phénomène de saute mouton:

On lance deux anneaux 1 et 2 dans le même sens, l'anneau 2 avec une vitesse supérieure à l'anneau 1.



On regarde l'interaction de deux portions de l'anneau 1 et 2 les plus proches l'une de l'autre. Il y a rotation autour du centre de vorticité des deux portions d'où diminution du diamètre du premier anneau et augmentation de celui du deuxième. L'anneau 1 voit sa vitesse augmenter et l'anneau 2 voit la sienne diminuer jusqu'à ce que le premier anneau passe dans le second, le dépasse puis le phénomène s'inverse. Expérimentalement, on peut arriver à faire passer 1 à travers 2, mais on ne constate pas de répétition du phénomène.

CONCLUSION

Tout au long des pages qui précèdent, nous avons pris connaissance des différents phénomènes expérimentaux qui ont rapport aux anneaux tourbillons. On s'est muni de la théorie des tourbillons , ainsi que des outils mathématiques appropriés et des modélisations d'écoulement pour bien modéliser le phénomène d'anneau tourbillon à l'aide de schémas adéquats.

Il serait intéressant d'étudier plus profondément la possibilité expérimentale d'enlacement d'anneaux ou de formation d'un anneau a l'aide du laché d'une goutte de liquide magnétique. On aurait alors un contrôle de l'anneau à l'aide d'un champ magnétique.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages "mathématiques:

- *(1) L.Schwartz Méthodes mathématiques pour les sciences physiques. Hermann 1965
- *(2) J.Bousquet Méthode des singularités.
Chapitre2:éléments de la théorie des distributions
Cepadues-Editions 1990
- *(3) M.Samuelides Analyse fonctionnelle.
Cepadues-Editions 1989

Ouvrages de mécanique des fluides:

- *(4) GK.Batchelor Introduction to fluid mechanics.
- *(5) J.Bousquet Méthode des singularités.
Cepadues-Editions 1990

Ouvrages sur la théorie des tourbillons:

- *(6) H.Poincaré Théorie des tourbillons. 1891
- *(7) H.Villat Leçons sur la Théorie des tourbillons.
Gauthier-Villars et Cie, éditeurs 1930
- *(8) JP.Brancher Dynamique des tourbillons
(polycopier manuscrit)
- *(9) Ting Vortex filaments.

Ouvrages expérimentaux sur les anneaux tourbillons:

- *(10) L.Marty Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement des fluides(Jets.Tourbillons circulaires.Effet soupape)
Thèse présentée à la faculté des sciences de Toulouse.
Deuxième partie:tourbillon circulaire.
1930
- *(11) H.Bouasse TOURBILLONS -forces acoustiques
circulations diverses
Tome1 Ch. 1 à 6
dont ch 6: tourbillons des fumeurs
Librairie Delagrave.1931
- *(12) C.Sadron Etat actuel des recherches expérimentales sur les anneaux.de tourbillons dans les gaz.
Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air
Edition Gauthier-Villars 1933