

Sélection des ondes spirales twistées des milieux excitables tridimensionnels.

D. Margerit et D. Barkley

Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK

dmargerit@maths.warwick.ac.uk

barkley@maths.warwick.ac.uk

Résumé

Les milieux excitables, tels que les fibres nerveuses ou le muscle cardiaque, peuvent être modélisés par deux équations de réaction-diffusion dont les concentrations des deux espèces évoluent sur deux temps très différents. Ces équations sont couplées et sont non-linéaires par les termes réactifs. Elles ont des ondes tridimensionnelles solutions qui sont des nappes spirales twistées. Celles-ci tournent autour d'un filament central qui peut lui même se déplacer lentement. Il n'existe quasiment pas de résultats sur la sélection de la fréquence et de la forme de ces nappes dans les milieux tridimensionnels et c'est ce point qui nous a intéressé.

On tire profit de la séparation d'échelles en utilisant une approche par méthodes de perturbations. Les deux premiers ordres asymptotiques de l'onde d'un filament droit twisté sont ainsi obtenus avec une sélection que ce soit pour la fréquence de rotation ou la forme de la nappe spirale. Ces résultats se comparent favorablement avec les simulations numériques directes des équations de réaction-diffusion sous-jacentes, qui ont également été effectuées pour de petites valeurs du paramètre de perturbation. Ceci constitue le premier accord quantitatif entre approches asymptotique et numérique pour la sélection de ces ondes tridimensionnelles et est également le premier accord quantitatif pour les milieux bidimensionnels.

1 Introduction

Un milieu excitable peut être modélisé par la classe générale suivante d'équations de réaction-diffusion :

$$\epsilon^2 \partial u / \partial t = \epsilon^2 \nabla^2 u + f(u, v), \quad (1)$$

$$\partial v / \partial t = \epsilon g(u, v), \quad (2)$$

où $\epsilon \ll 1$, et f and g sont les termes réactifs avec $f(u, v) = u(1-u)(u-u_{th})$ et $g(u, v) = u-v$ où $u_{th} = (v+b)/a$ [1]. L'excitabilité de la solution de ce système provient de la petitesse de ϵ .

En *deux dimensions*, ce système a des ondes solutions qui correspondent à la propagation d'un front et on observe la formation de structures sous la forme d'un *front spiral* qui tourne autour d'un point fixe. En *trois dimensions*, le point central devient une courbe et l'onde spirale devient un rouleau spiral qui s'enroule autour de cette courbe, qui est appelée *filament tourbillon* (Fig.1). Dans une coupe plane perpendiculaire au filament, on observe une onde spirale. Lorsque la phase de cette spirale varie le long du filament, la nappe spirale est twistée et on parle du *twist* du filament. Les fronts d'ondes sont donc des surfaces semi-infinies qui s'enroulent pour former une *nappe spirale* qui tourne autour du filament central.

L'onde spirale 2-D est désormais assez bien connue que ce soit dans les études par approche asymptotique [2, 3, 4, 5, 6] ou numérique [1, 7]. Dans le travail que l'on présente ici on s'intéresse d'une part à la généralisation des résultats précédents au problème tridimensionnel d'un filament droit twisté et à la comparaison quantitative entre les résultats numériques et asymptotiques dans la limite des petits ϵ . Afin d'effectuer cette comparaison, le premier ordre asymptotique qui corrige l'ordre principal a été extrait des équations et sera donné.

La solution asymptotique de (1-2) n'est pas régulière spatialement et le développement solution doit être donné dans trois régions (Fig. 1): deux couches limites dans lesquelles la concentration u change rapidement et la région complémentaire, appelée région extérieure où le système est soit dans l'état excité ($u = 1$) ou réfractaire ($u = 0$). La première couche limite se trouve proche du front (zone *interfaciale*) et la seconde au centre de rotation (zone du *corps*). C'est deux zones se raccordent asymptotiquement avec la zone extérieure. Les

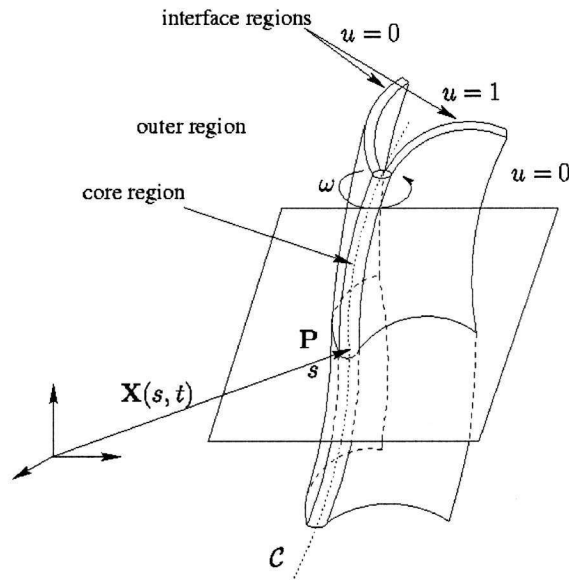


FIG. 1: La courbe centrale C et les différentes régions asymptotiques.

équations (1-2) sont écrites sur des coordonnées adéquates dans chaque région et une dilatation par ϵ de la coordonnée normale aux couches limites est effectuée. Les différents ordres de ces équations sont alors obtenus et résolus dans chacune des régions et la règle de raccord asymptotique entre ces régions est utilisée pour obtenir complètement la solution. On vérifie alors que celle-ci est bien solution des équations originales (1-2) et se raccorde bien jusqu'au premier ordre. Pour le problème que l'on considère ici, la solution de la région extérieure n'est pas différente des solutions 2-D précédemment obtenues. La difficulté du 3-D provient de l'écriture et la résolution des équations pour les deux interfaces et leur raccord avec la région extérieure.

La première étape de l'analyse est géométrique. Le filament est une courbe C qui est paramétrée par s et qui dépend en général du temps t : $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, t)$. La nappe twistée est définie par $u = 1/2$ et est composée de deux surfaces : *le front avant* et *le front arrière*, qui sont décrites respectivement par deux fonctions Φ^\pm telles que $\varphi = \Phi^\pm(r, s, t)$, où (r, φ) sont les coordonnées polaires dans le plan normal au filament. Il est intéressant d'introduire les

quantités $\Psi \equiv r\partial\Phi/\partial r$ et $\chi \equiv \sigma T + \partial\Phi/\partial s$, où T est la torsion du filament et $\sigma \equiv |\partial\mathbf{X}/\partial s|$. Le *twist* $\tau = \chi(r=0)/\sigma$ de la nappe twistée est le taux de rotation de l'interface par unité de longueur le long du filament [7].

2 Les deux premiers ordres d'une nappe twistée stationnaire

Un filament droit de twist constant τ est une solution stationnaire de (1-2), qui tourne à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\Phi}$. L'équation obtenue pour l'interface jusqu'à l'ordre ϵ^2 est la suivante

$$q \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\Psi(1 + \Psi^2)}{r} = r(q + \Psi^2) - \Lambda(q + \Psi^2)^{3/2} + O(\epsilon^2), \quad (3)$$

où $\Lambda = B - \tilde{\epsilon}(5/3)\sqrt{q + \Psi^2}/r$, $q = 1 + \tau^2 r^2$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon/a\omega$, $B = (\mu/\omega)^{3/2}$, $\mu^{3/2} = \sqrt{2}\pi v^s(1 - v^s)/a$ et $v^s = -b + a/2$ est la concentration dite de "calage". Dans (3) toutes les longueurs sont multipliées par $\sqrt{\omega}$. Le membre de gauche provient du Laplacien dans (1) et représente la courbure de l'interface twistée. Le premier terme du membre de droite provient de la dérivée temporelle dans (1) et représente la vitesse normale à l'interface; alors que le second provient du terme réactif dans (1). Comme le champ v à l'ordre ϵ^2 n'est plus constant dans la direction normale à l'interface, la dérivée temporelle dans (2) introduit une correction d'ordre ϵ en Λ qui se comporte comme l'inverse de la vitesse normale à l'interface. Ce terme essentiel et non trivial intervient à cet ordre ϵ . L'angle entre les deux interfaces est donné par $\Delta\Phi = \Phi^- - \Phi^+ = 2\pi(1 - v^s) + O(\epsilon^2)$ et est constant, ce qui explique l'absence de signe \pm pour Ψ dans (3). Le développement de la fréquence est $\omega = \omega^{(0)} + \epsilon\omega^{(1)} + \dots$, où B est donné par $B = B^{(0)}(1 - 3\tilde{\epsilon}D/2) + O(\epsilon^2)$, avec $B^{(0)} = (\mu/\omega^{(0)})^{3/2}$ et $D = a\omega^{(1)}$. Ainsi la fréquence peut s'écrire

$$\omega = \mu/B^{(0)2/3} + \epsilon D/a + \dots \quad (4)$$

Lorsque l'on développe $\Psi(r)$ par $\Psi(r) = \Psi^{(0)}(r) + \tilde{\epsilon}\Psi^{(1)}(r) + \dots$, l'équation (3) à l'ordre principal devient

$$q \frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial r} + \frac{\Psi^{(0)}(1 + \Psi^{(0)2})}{r} = r(q + \Psi^{(0)2}) - B^{(0)}(q + \Psi^{(0)2})^{3/2}. \quad (5)$$

Au premier ordre, elle devient

$$q \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} + l(r)\Psi^{(1)} = m(r) = Dm_1(r) + m_2(r), \quad (6)$$

où

$$l(r) = \frac{1}{r} + r\Psi^{(0)} + 3\Psi^{(0)} \left[\frac{\Psi^{(0)}}{r} - r + B^{(0)}\sqrt{q + \Psi^{(0)2}} \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} m_1(r) &= r(q + \Psi^{(0)2}) + B^{(0)}(q + \Psi^{(0)2})^{3/2}, \\ m_2(r) &= \frac{5}{3} \frac{(q + \Psi^{(0)2})^2}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Toutes les longueurs dans (5) et (6) ont été multipliées par $\sqrt{\omega^{(0)}}$.

Lorsque $\tau = 0$, (5) redonne l'équation obtenue par Karma[3] et pour $\tau \neq 0$ elle est en accord avec l'étude de Bernoff [2]. Ces équations sont résolues à l'aide d'un solveur Runge-Kutta et d'une intégration par méthode des trapèzes. On obtient $\Psi^{(0)}$, $\Psi^{(1)}$ ainsi que $B^{(0)}$ et D en fonction de τ^2 (Fig.3-4).

3 Résolution numérique et confrontation asymptotique-numérique

En parallèle à la résolution asymptotique précédente du filament droit twisté, un code a été écrit afin de simuler numériquement cette solution stationnaire par résolution du système d'équations

$$-\omega\epsilon^2\partial u/\partial\varphi = \epsilon^2\Delta u + f(u, v), \quad (9)$$

$$-\omega\partial v/\partial\varphi = \epsilon g(u, v), \quad (10)$$

où $\Delta u = \partial^2 u/\partial r^2 + (1/r)\partial u/\partial r + (q/r^2)\partial^2 u/\partial\varphi^2$.

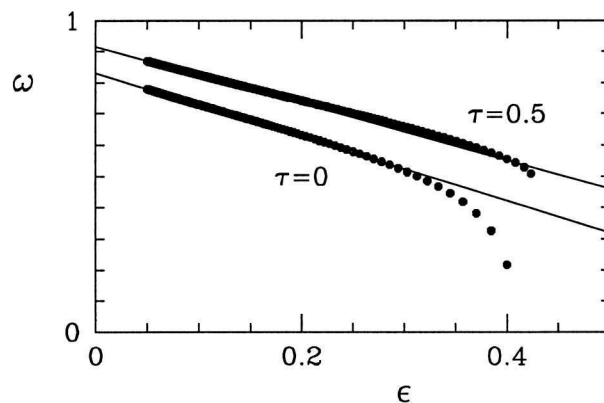


FIG. 2: ω en fonction de ϵ obtenu numériquement ($\bullet\bullet$) pour $\tau = 0$, $\tau = 0.5$. La droite d'extrapolation est également tracée. Ici $a = 0.8$ et $b = 0.1$.

La figure 2 montre l'évolution de $\omega = \mu/B^{(0)2/3} + \epsilon D/a + \dots$ avec ϵ obtenue dans ces simulations qui ont été effectuées jusqu'à une valeur de $\epsilon = 0.05$. L'extrapolation de ces courbes jusqu'à $\epsilon = 0$ donne la valeur de $\omega^{(0)}$ et donc de $B^{(0)}$. L'estimation de leur pente donne accès à $\omega^{(1)}$ et donc à D . L'évolution de $B^{(0)}$ et de D avec τ^2/μ a été ainsi déduite des résultats numériques et représentée par des points sur la figure 3, où les résultats de l'étude asymptotique sont représentés par une ligne pleine. Contrairement à ce que peut faire croire la figure 2, l'influence des ordres supérieurs se fait sentir dès $\epsilon = 0.05$ et il faut être très méticuleux dans l'estimation de D dont la valeur est entachée d'une incertitude (Fig. 3). La courbe $\Psi(r)$ obtenue numériquement pour de petites valeurs de ϵ a aussi été extrapolée. Elle est représentée par des points sur la figure 4 et est comparée avec les résultats asymptotiques en traits pleins. La forme des spirales a été trouvée numériquement pour $\epsilon = 0.1$, $a = 0.8$, $b = 0.1$ et est représentée sur la figure 5 par la courbe noire pour $\tau = 0$: (a) et (c) et pour $\tau = 0.5$: (b) et (d). La courbe blanche que l'on a superposée sur ces figures est la forme de la spirale obtenue par méthode asymptotique. Sur les figures

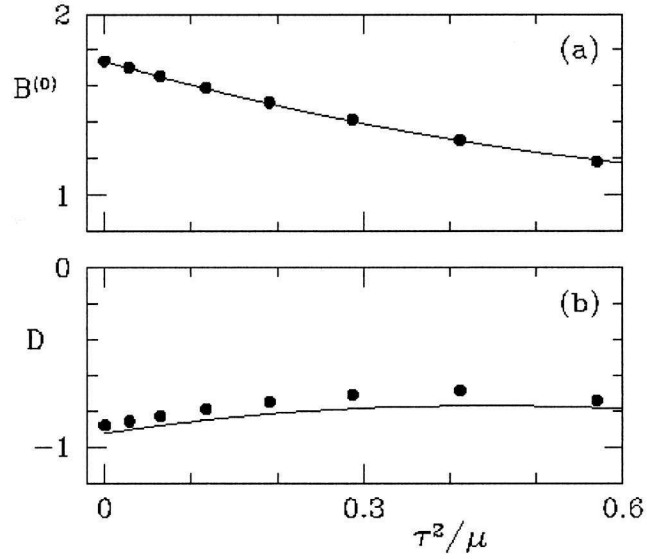


FIG. 3: (a) $B^{(0)}$ et (b) D en fonction de τ^2/μ obtenu numériquement ($\bullet\bullet$) et par méthode asymptotique (—).

(a) et (b) est représenté la forme obtenue en ne tenant compte que de l'ordre principal. Sur les figures (c) et (d), on voit l'importance de tenir en compte la correction du premier ordre afin d'obtenir une bonne comparaison quantitative avec les résultats numériques.

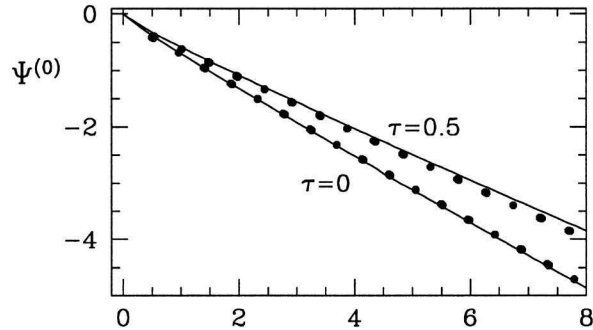


FIG. 4: $\Psi^{(0)}$ obtenu numériquement ($\bullet\bullet$) et par méthode asymptotique (—).

4 Conclusion

Les fréquences de rotation ω ainsi que la forme des spirales obtenues par simulations numériques du système d'équations de réaction diffusion sont en accord avec les résultats asymptotiques. Le résultat ainsi obtenu [8] donne la première comparaison quantitative entre résultat asymptotique et résultat numérique pour le problème tridimensionnel du filament droit twisté mais également pour la spirale bidimensionnelle pour laquelle ce résultat n'avait pas été obtenu. Soulignons l'importance du premier ordre afin de corriger l'ordre principal et d'obtenir une bonne comparaison quantitative avec les simulations numériques. Pour ce filament twisté stationnaire, nous avons également une description

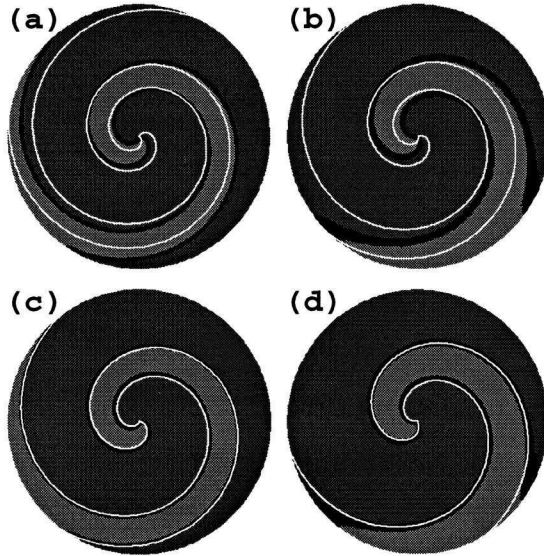


FIG. 5: Forme de la spirale: (a) et (c) pour $\tau = 0$, (b) et (d) pour $\tau = 0.5$. La courbe blanche est le résultat asymptotique: (a) et (b) à l'ordre principal et (c) et (d) avec la correction d'ordre 1. Ici $a = 0.8$ et $b = 0.1$.

asymptotique de tous les champs à l'ordre principal et au premier ordre dans la région de l'interface et la région extérieure, que l'on n'a pas donnée dans cet article.

Il serait intéressant de résoudre les deux premiers ordres asymptotiques dans le corps et de les comparer également avec les simulations numériques. C'est une étude qui semble importante avant de résoudre les équations du corps pour un filament courbe [8] et d'effectuer une comparaison quantitative entre résultats asymptotiques et numériques pour le problème du mouvement d'un filament courbe.

Références

- [1] D. Barkley. A model for fast computer simulation of waves in excitable media. *Physica D*, 49:61–70, 1991.
- [2] A.J. Bernoff. Spiral wave solutions for reaction-diffusion equations in a fast reaction/slow diffusion limit. *Physica D*, 53:125–150, 1991.
- [3] A. Karma. Scaling regime of spiral wave propagation in single-diffusive media. *Physical Review Letters*, 68(3):397–400, 1992.
- [4] D.A. Kessler, H. Levine, and W. Reynolds. Spiral-core in singly diffusive excitable media. *Physical Review Letters*, 68(3):401–404, 1992.
- [5] D.A. Kessler, H. Levine, and W. Reynolds. Spiral-core meandering in excitable media. *Physical Review A*, 46(8):5264–5267, 1992.
- [6] D.A. Kessler, H. Levine, and W. Reynolds. Theory of the spiral core in excitable media. *Physica D*, 70:115–139, 1994.
- [7] A. T. Winfree. Stable particle-like solutions to the nonlinear wave equations of three-dimensional excitable media. *SIAM Review*, 32(1):1–53, March 1990.
- [8] D. Margerit and D. Barkley. Selection of twisted scroll waves in three-dimensional excitable media. *Submitted to Phys. Rev. Lett.*, 2000.