

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

UNIVERSITE DE NANCY I

MARGERIT Daniel  
DEA Mécanique et Énergétique  
Université de Nancy 1

Septembre 1993

# Rapport de Stage DEA:

Une Étude d'un Anneau de Vorticité  
par Développement Asymptotique  
Raccordé

Effectué au LEMTA

Jury:

Tuteur : J.P BRANCHER

Examineurs:

P HUERRE

J.M CHOMAZ

O PAULIQUEN

## REMERCIEMENTS

Je remercie :

- Brancher Jean-Pierre pour le grand nombre de remarques et de conseils qu'il a pu me donner tout au long de ce stage.
- Brancher Pierre pour le travail et la réflexion qu'il a menée afin d'améliorer la sortie graphique en utilisant le logiciel Explorer sur station SiliconGraphic et pour les résultats qu'il a obtenus et que j'ai mis dans ce rapport.
- Les documentalistes , les personnes du service informatique et les techniciens du laboratoire.
- Ainsi que P. Huerre, J.M Chomaz et O Pauliquen qui m'ont fait l'honneur de Participer au Jury.

## SOMMAIRE

### Pages :

- 4 Introduction
- 5 1 Présentation du problème de l'anneau de vorticité
  - 11 Cadre d'étude
  - 12 L'anneau de vorticité
  - 13 Résolution
- 8 2 Repérage et coordonnées
  - 21 Système de coordonnées utilisées
    - 211 Base de Frenet
    - 212 Coordonnées curvilignes locales
  - 22 Repérage et coordonnées curvilignes
    - 221 Coordonnées curvilignes-Variétés
    - 222 Analyse tensorielle
  - 23 Application à nos coordonnées  $(r, \phi, s)$
- 16 3 Le problème extérieur et son développement limité en  $r=0$
- 17 4 Le problème intérieur
- 17 41 Les équations dans le système de coordonnées curvilignes
  - 411 Vitesse relative
  - 412 Conservation de la masse
  - 413 Équation de NavierStokes
  - 414 Conditions aux limites en  $\bar{r} = 0$
- 18 42 Déroulement des calculs
  - 421 Forme des développements asymptotiques
  - 422 Conditions aux limites à l'infini
  - 423 Ordre principal
  - 424 Premier ordre
    - 4241 Partie symétrique. Équations de compatibilités
    - 4242 Partie antisymétrique. Évolution de l'anneau
  - 425 Deuxième ordre
- 27 43 Système complet d'équations

34	5	Résolution numérique du système intégrodifférentiel d'équations
	51	Choix des paramètres
	52	Discrétisation spatiale
	53	Discrétisation temporelle
	54	Algorithmes et programmes
40	6	Exemples de résultats de simulation
41	7	Approche expérimentale d'anneaux tourbillons
	71	Dispositif de formation
	72	Rencontre d'un anneau circulaire et d'un plan
	73	Formation d'un anneau elliptique
43		Conclusion
44		Bibliographie
46		Plan des annexes
		Annexes

## INTRODUCTION

Lors de l'étude des fluides, le champs de vorticité appar t être une grandeur plus fondamentale que le champ des vitesses par de nombreux aspects plus avantageux. Ainsi la résolution des écoulements complexes de fluide par l'approche de la dynamique de la vorticité est l'un des plus fondamentaux moyens de compréhension du mouvement des fluides.

On se propose, dans ce rapport, de présenter le calcul asymptotique de l'anneau de vorticité, que l'on trouve au paragraphe 2 de l'ouvrage de Ting:

### Viscous Vortical Flows (1)

jusqu'à énoncer le système complet des équations d'évolution de l'anneau. On fait ensuite une résolution numérique de ces équations.

On a essayé, dans le corps du rapport, de s'attacher à présenter la démarche et le déroulement global du calcul tout en mettant en relief certains aspects un peu délicats de calcul en coordonnées curvilignes que l'on doit maîtriser. Ainsi, on a rejeté en annexe grand nombre d'intermédiaires de calcul qui n'ont pas été mis par Ting dans son ouvrage (1) et que l'on a donc du retrouver.

Cette méthode asymptotique est d'un grand intérêt. Déjà en deux dimensions, elle a permis à Ting (1) d'étudier très précisément l'évolution de tourbillons le long d'une aile d'avion.

## 1 Présentation du problème de l'anneau de vorticité:

### *1.1 Cadre d'étude:*

L'espace physique est rapport  à l'espace affine euclidien  $E^3$  usuel à trois dimensions et est identifié à  $R^3$  à l'aide du repère orthonormé d'espace affine:  $R: (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Tout point  $M$  peut ainsi être repéré à l'aide de trois coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  qui sont telles que  $\vec{OM} = x_i \vec{e}_i$ . On a utilisé ici la notation indic e d'Einstein.

On se place dans le cadre de la mécanique Newtonienne avec un temps absolu. Le repère  $R$  définit le référentiel galiléen d'étude. Un observateur de ce référentiel voit le point  $O$  ainsi que les vecteurs  $\vec{e}_i$  fixes, c'est à dire indépendant du temps.

On utilise la mécanique des milieux continus en faisant l'hypothèse de continuité du milieu étudié, dont la loi de comportement utilisée est celle du fluide Newtonien.

On a donc l'équation de continuité et de Navier Stokes:

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad}(\vec{v}) = - \frac{\text{grad}(p)}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

où  $\vec{v}(t, x_1, x_2, x_3)$  est le champ des vitesses

$p(t, x_1, x_2, x_3)$  est le champ des pressions

$\nu$ : la viscosité cinématique du fluide       $\rho$ : masse volumique

Pour écrire les deux équations précédentes, on a utilisé la description d'Euler du mouvement

Le champ de vorticité  $\vec{\Omega}$  est défini par la relation  $\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v})$ . Il vérifie donc les équations:

$$\text{div } \vec{\Omega} = 0$$

$$\vec{\Omega}_t - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) = \nu \Delta \vec{\Omega}$$

On utilise alors la décomposition d'Helmoltz:

$$\vec{v} = \text{grad}(\phi) + \text{rot}(\vec{A}) \text{ avec } \text{div}(\vec{A}) = 0$$

On a la condition aux limites:  $\vec{A} \rightarrow 0$  quand  $r = \|\vec{x}\| \rightarrow \infty$

et la condition initiale  $\vec{\Omega}(0, x) = \vec{\Omega}_0(x)$  avec  $\vec{\Omega}_0(x)$  donné

tel que  $\text{div } \vec{\Omega}_0 = 0$   
 On a alors :

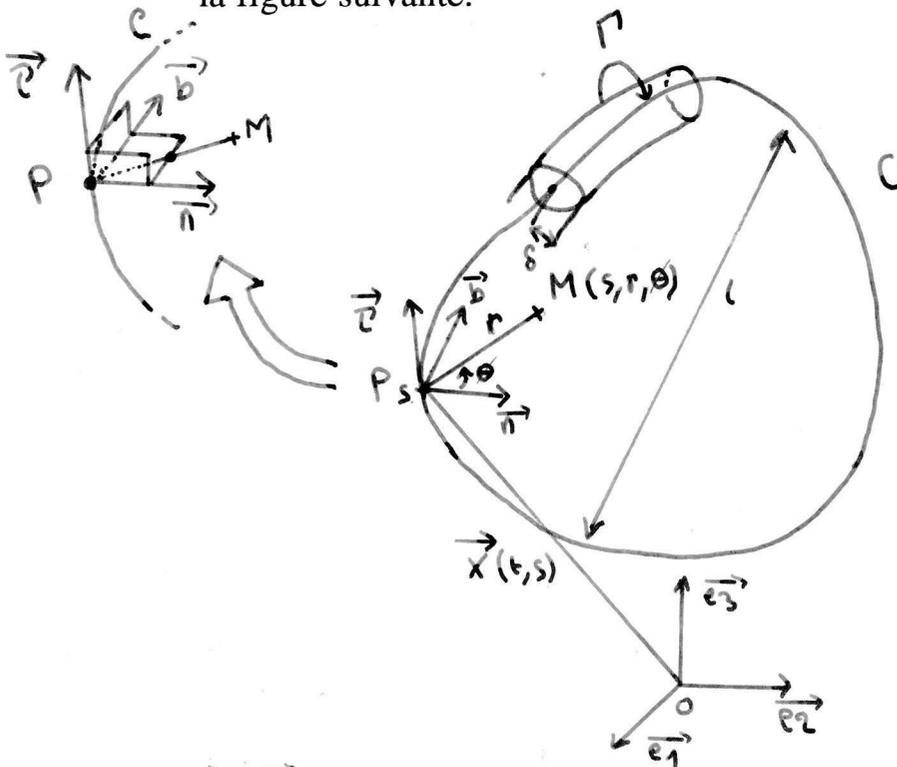
$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\Omega}(t, x')}{|x' - x|} dx'$$

et la formule de Biot et Savart pour la vitesse:

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\Omega}(t, x') \times (x' - x)}{|x' - x|^3} dx'$$

### 12 L'anneau de vorticité:

Dans le paragraphe précedent, il reste à préciser la fonction  $\vec{\Omega}_0(x)$  de la répartition de vorticité. La vorticité est concentrée dans un tube fermé courbe de faible section que l'on appelle anneau de vorticité. Il est repéré à l'aide de sa ligne centrale  $C$ , de son épaisseur  $\delta$  et de sa circulation  $\Gamma$  comme il est représenté sur la figure suivante:



$(\vec{c}, \vec{n}, \vec{b})$  est la base de Frenet sur la courbe  $C$  au point  $P$ .

C est repéré à l'aide du repérage d'abscisse curviligne  $\vec{OP} = \vec{X}(t,s)$ ;  $l$  est une longueur caractéristique et le nombre de Reynolds est défini par  $Re = \Gamma/v$ .

On définit alors un petit paramètre:  $\varepsilon = Re^{-1/2} \ll 1$ . Soit  $U$  la vitesse caractéristique:  $\Gamma = O(Ul)$ .  $\delta/l$  est pris de l'ordre de  $\varepsilon$ :  $\delta/l = O(\varepsilon)$  afin de satisfaire le Principe de moindre dégénérescence. C'est l'ordre habituel d'épaisseur des couches limites de diffusion.

On adopte la condition suivante pour la ligne centrale:

$$(\vec{X}_{,t} - v(t, \vec{X})) \times \vec{\tau} = 0$$

On laisse donc la possibilité au fluide d'avoir sur la fibre une composante de vitesse relative à celle-ci dirigée selon le vecteur tangent. C'est moins restrictif que la condition:

$$\vec{X}_{,t} - v(t, \vec{X}) = 0$$

On rajoute la condition  $\vec{X}_{,t} \cdot \vec{\tau} = 0$  car dans la cinématique de la fibre les déplacements suivant la tangente ne changent pas la topologie de celle-ci.  $\vec{X}_{,t}$  sera pris de l'ordre de  $U$ :  $\vec{X}_{,t} = O(U)$ .

On suppose de plus que  $\vec{\Omega}$  décroît exponentiellement lorsque l'on s'écarte de la ligne centrale et que l'écoulement  $\vec{v}$  est important dans le corps de l'anneau, ce que l'on précisera ultérieurement. L'écoulement extérieur dans lequel est placé l'anneau est supposé potentiel et stationnaire.

### *13 Résolution:*

A cause de la rapide décroissance de la vorticité, loin de l'anneau, l'écoulement est potentiel et ressemble à celui induit par une ligne tourbillon  $C$  d'épaisseur nulle donné par la formule de Biot et Savart. Il apparaît alors qu'il est donc intéressant d'utiliser une méthode de développement asymptotique raccordé pour étudier notre écoulement. On se trouve en présence d'une couche limite de vorticité.

Le problème extérieur est celui de l'écoulement créé par une ligne tourbillon  $C$  de circulation  $\Gamma$ . Il est non visqueux.

Le problème intérieur est obtenu en dilatant l'anneau à l'aide de  $\varepsilon$ . La solution est recherchée sous la forme d'un développement

asymptotique en  $\varepsilon$ .

Pour relier le problème intérieur et extérieur, on utilise une condition de raccordement.

## 2 Repérage et coordonnées:

### 21 Système de coordonnées utilisées:

#### 211 Base de Frénet:

$\vec{OP} = \vec{X}(s)$  est un paramétrage de la courbe C. La donnée d'une valeur de s permet de positionner un point P sur C. On dit que s est la coordonnée de P. Cette définition d'une coordonnée n'a rien à voir avec la définition des coordonnées d'un point dans un repère. Ici il n'y a pas de repère.

On a les formules de Frénet:

$$\begin{aligned} \vec{X}_s &= \sigma \vec{\tau} & \vec{\tau}_s &= \sigma K \vec{n} & \sigma &= |\vec{X}_s| = \sigma(s) \\ \vec{n}_s &= (T \vec{b} - K \vec{\tau}) \sigma & \vec{b}_s &= -T \sigma \vec{n} \end{aligned}$$

$(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ : base de Frénet

K: courbure      T: torsion

On a utilisé la notation  $:\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \vec{X}_s$  que l'on retrouvera dans toute la suite.

#### 212 Coordonnées curvilignes locales:

On ne cherche plus, comme au 211, à repérer la position d'un point de C mais la position d'un point de l'espace  $E^3$ .

Pour cela, on introduit un système de coordonnées locales  $(r, \phi, s)$ , comme suit. Pour tout point  $M = \vec{x} = \vec{OM}$  proche de C, on peut trouver un point  $P = \vec{X}(s)$  sur la courbe tel que la distance  $|\vec{x} - \vec{X}(s)|$  atteigne son minimum, noté r: **figure page 6**

Le vecteur  $\vec{PM}$  se trouve alors dans le plan normal  $(\vec{n}, \vec{b})$  qui passe par P. On note  $(r, \phi)$  les coordonnées polaires de  $\vec{PM}$  dans ce plan,  $\vec{r}$  le vecteur radial et  $\vec{\phi}$  le vecteur orthoradial.

$$\text{On a donc : } \vec{r} = \vec{r}(\phi, s) = \vec{n}(s) \cos \phi + \vec{b}(s) \sin \phi$$

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}(\phi, s) = -\vec{n}(s) \sin \phi + \vec{b}(s) \cos \phi \quad \phi = \vec{r} \wedge \vec{b}$$

$$\text{et } \vec{x} = \vec{X}(s) + r \vec{r}(\phi, s)$$

$(r, \phi, s)$  permettent de positionner un point M de  $E^3$ .

## 22 Repérage et coordonnées curvilignes:

Pour les deux chapitres qui suivent, on peut se reporter à l'ouvrage (2) dans lequel Sédov utilise les coordonnées curvilignes et les aspects tensoriels dans sa présentation de la Mécanique des milieux continus. Pour un point de vue plus mathématique, on peut consulter les articles de l'Encyclopédie Universalis sur les variétés différentiables et sur le calcul tensoriel (4).

Ces deux articles étant de lecture difficile, on peut conseiller alors l'ouvrage (5) de la bibliographie dans lequel l'auteur fait une bonne présentation progressive accessible pour un niveau de maîtrise ou l'ouvrage de Bass (3).

### 221 Coordonnées Curvilignes-Variétés:

Dans l'espace  $E^3$ , on peut repérer un point  $M$  à l'aide d'une bijection de  $E^3$  dans  $R^3$  qui à tout point  $M$  associe un triplet  $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ . On effectue donc un paramétrage de  $E^3$ , et les valeurs  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont appelées "coordonnées" de  $M$ . On dit qu'on a un système de coordonnées curvilignes. On connaît bien les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, qui sont de ce type.

Ce procédé de repérage est plus général que celui qui procède de la définition des coordonnées d'un point à l'aide d'un repère d'espace affine. On ne s'est pas servi ici, ni de l'aspect affine, ni de l'aspect Euclidien de  $E^3$ . En fait, pour définir un paramétrage comme précédemment, on n'a besoin que de l'aspect topologique (voisinages, ouverts) d'un ensemble et la notion mathématique correspondante est celle de variété d'un espace topologique. On va donner quelques définitions essentielles.

Un espace topologique est un ensemble muni d'une famille d'ouverts. Une application  $f$  d'un espace topologique  $X$  dans un espace topologique  $Y$  est appelée homéomorphisme si elle est continue ainsi que son inverse.

Une variété réelle de dimension  $n$  est un espace topologique séparé  $X$  dont chaque point possède un voisinage ouvert  $V$  homéomorphe à l'ouvert  $U$  de  $R^n$ . Notons  $\varphi$  l'homéomorphisme concerné. Le couple  $(V, \varphi)$  est une carte locale.  $\varphi$  fait correspondre à tout point  $P$  de  $V$  un point  $\xi$  de  $R^n$ . Si  $\xi^i$  sont les fonctions concernées dans  $R^n$ , les  $n$  fonctions:

$$\lambda^i = \xi^i \circ \varphi \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\begin{array}{c}
 P \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \\
 P \xrightarrow{\varphi} \lambda^i
 \end{array}$$

sont dites les fonctions coordonnées dans la carte  $(V, \varphi)$ . On posera  $\varphi = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et on dira simplement que les  $\lambda_i$  sont les coordonnées locales dans  $V$ .

Soit  $X$  une variété différentiable. Il apparaît que le nombre de fonctions coordonnées en un point  $P$  de  $X$  est le même pour tous les systèmes de coordonnées locales en  $P$ . Ce nombre ne dépend pas non plus du point  $P$ . Ce nombre est par définition la dimension de la variété. Cette notion est plus générale que la définition d'une dimension dans un espace vectoriel fini à l'aide de bases.

Si  $X$  est une variété différentiable, on peut définir la notion de sous-variétés de  $X$  qui sont des sous-espaces  $Y$  particuliers de  $X$  et des coordonnées locales sur ces sous-espaces.

De façon générale, on définit l'espace tangent en un point d'une variété comme l'espace des différentielles ou des opérateurs de dérivation. L'espace tangent est un espace vectoriel.

Pour présenter l'espace tangent, plaçons nous plus simplement sur une sous-variété  $V$  de dimension  $p$  de  $E^n$ . Soit  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  deux cartes différentiables au voisinage d'un point  $M$  de  $V$ . Les différentielles de  $\varphi_1$  au point  $\varphi_1^{-1}(M)$  et de  $\varphi_2$  au point  $\varphi_2^{-1}(M)$  sont des applications linéaires de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui ont même image. On dit qu'un vecteur d'origine  $M$  dans  $E^n$  est tangent à  $V$  en  $M$  s'il est parallèle à cette image. Les vecteurs tangents en  $M$  à  $V$  forment un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  dit espace tangent en  $M$  à  $V$ .

Remarquons que les vecteurs tangents à  $E^n$  lui même au point  $M$  sont des vecteurs d'origine  $M$ . L'espace tangent en  $M$  est donc en espace  $(E^n)_M$ . Une sphère est une sous-variété de  $E^3$ .

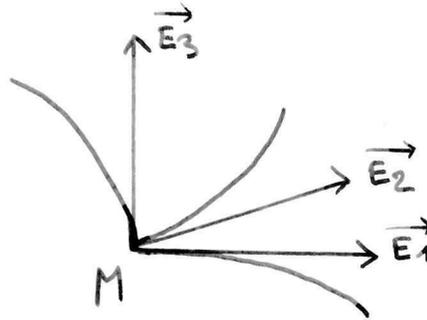
Soit  $E^3$  l'espace euclidien affine,  $R: (O, e_1, e_2, e_3)$  un repère de cet espace et  $(x_i)$  les coordonnées d'un point  $M$  de cet espace. On peut définir un système de coordonnées curvilignes  $\lambda^i$  à l'aide de la relation:

$$x^i = \varphi^i(\lambda^j)$$

Posons  $\vec{E}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \lambda^i} \vec{e}_j$  avec la notation de sommation des

indices. Les vecteurs  $\vec{E}_i$  forment une base de l'espace tangent en  $M$ . On les appelle vecteurs de base. Si on trace les trois

trajectoires où deux des  $\lambda^j$  sont fixés par leur valeur en M et la dernière varie, les vecteurs de base sont les vecteurs tangents à ces trajectoires.



C'est aussi une base des différentielles car on a :

$$d\vec{OM} = dx_i \vec{e}_i = d\lambda_i \vec{E}_i$$

On note  $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^j}$  et  $b_j^i = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j}$ . On a  $\vec{E}_j = a_j^i \vec{e}_i$  et  $d\lambda^i = b_j^i dx^j$ .

On doit noter que les vecteurs de base dépendent de la position où ils sont, ce qui n'est pas le cas de la base ( $\vec{e}_i$ ) des coordonnées cartésiennes.

## 222 Analyse tensorielle:

Pour étudier une variété, on choisit un système de coordonnées dans lequel on fait les calculs. Dans les formules que l'on écrit, on distingue d'une part ce qui dépend du système de coordonnées choisi, et qui est en général dépourvu d'intérêt, et d'autre part ce qui décrit des phénomènes intrinsèques. Tout cela relève du calcul tensoriel sur les variétés.

Pour aborder ces notions il est bon de commencer par le calcul tensoriel sur un espace vectoriel avec des coordonnées définies à l'aide de bases vectorielles ( (3) Ch VI ). On a alors la recherche d'êtres intrinsèques dans les changements de coordonnées associées aux changements de base.

Les êtres intrinsèques définis sont les scalaires, les "vecteurs" et les tenseurs. On voit ici qu'il ne faut pas confondre la notion de vecteur comme élément d'un espace vectoriel et la notion tensorielle de vecteur qui est quelque peu différente.

Si l'espace est euclidien, on définit des coordonnées covariantes d'un vecteur. Ce sont les projections orthogonales

sur les vecteurs de la base. Les projections habituelles parallèlement aux vecteurs de la base donnent les coordonnées courantes qui sont dites contravariantes.

Si la base est orthonormée et qu'on se limite à des bases de ce type on voit que coordonnées covariantes et contravariantes sont égales. Il n'y a plus de distinction à faire. C'est le cas des vecteurs et des tenseurs que l'on appelle cartésiens. En recherchant les êtres intrinsèques, on construit l'algèbre tensorielle de l'espace vectoriel (ou d'un module qui est une généralisation d'un espace vectoriel).

Sur les variétés, on s'intéresse alors aux algèbres tensorielles des espaces tangents qui sont des espaces vectoriels. On exprime alors les tenseurs sur les systèmes de coordonnées locales et les vecteurs de base. Si la variété est l'espace vectoriel  $E^3$ , on peut faire du calcul tensoriel sur son algèbre tensorielle associée car c'est un espace vectoriel et aussi sur les algèbres tensorielles des espaces tangents si on voit  $E^3$  comme une variété.

Le produit scalaire sur l'espace permet de définir  $g_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$ .  $(g_{ij})$  est dit tenseur métrique du système de coordonnées curvilignes. Il dépend des points de l'espace. Si on peut trouver un système de coordonnées, tel qu'en tout point de l'espace  $(g_{ij})$  est la matrice unité, l'espace est dit euclidien. Dans un espace affine euclidien un tel système de coordonnées correspond aux coordonnées dans un repère cartésien. Soit  $g = g_{11} g_{22} g_{33}$  le déterminant de  $(g_{ij})$ . La base des vecteurs de base est orthogonale si  $g_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . Il est intéressant de se placer dans des coordonnées orthogonales car pour de telles bases il existe des formulaires (6) ou (3).

A des coordonnées orthogonales  $(\lambda_i)$  de vecteurs de base  $(\vec{e}_i)$  est associé des coordonnées orthonormales  $(\Lambda_i)$  par les

$$\text{formules: } \vec{\xi}_i = \frac{\vec{E}_i}{\sqrt{g_{ij}}} \text{ et } d\Lambda_i = \sqrt{g_{ij}} d\lambda^i.$$

Dans le repère  $R(0, \vec{e}_i)$  on peut définir comme on a l'habitude de le faire les tenseurs  $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{V})$ ,  $\text{div}(\vec{V})$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$  et  $\Delta f$ . Ces êtres sont des grandeurs intrinsèques et dans le système de coordonnées  $(\lambda_i)$  on les exprime en fonction des coordonnées  $\lambda_i$  et sur la base des vecteurs de base  $(\vec{E}_i)$ . Il ne faut pas oublier

que les vecteurs de base sont fonctions des coordonnées curvilignes.

Ainsi:

$$df = (\overrightarrow{\text{grad}f})^i d\Lambda^i \text{ d'où } \overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial \Lambda^i} \text{ sur } (\vec{\xi}_i).$$

$$d\vec{V} = (\overrightarrow{\text{grad}\vec{V}})^{ij} d\Lambda^j \vec{\xi}_i.$$

D'où, si  $\vec{V} = a^i \vec{\xi}_i$ ,  $d\vec{V} = da^i \vec{\xi}_i + a^j d\vec{\xi}_i$ .

Après des calculs de dérivées composées, on arrive à la formule ((7)) :

$$(\overrightarrow{\text{grad}\vec{V}})^{ij} = t_j^i = \frac{\partial a^i}{\partial \Lambda^j} - \frac{a^j}{2g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial \Lambda^i} + \delta_j^i \frac{a^l}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial \Lambda^l}$$

$$\text{div}\vec{V} = \sum_i t_j^i \text{ d'où } \text{div}\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \Lambda^i} \left( a^i \sqrt{\frac{g}{g_{ii}}} \right)$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}f}) \text{ d'où } \Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \Lambda^i} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{ii}} \frac{\partial f}{\partial \Lambda^i} \right)$$

On accède alors à  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$  grâce à la formule  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (\overrightarrow{\text{grad}\vec{V}}) - (\overrightarrow{\text{grad}\vec{V}})^T$  puis à  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$  grâce à la formule  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot \vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \times \vec{W}$ .

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{aligned} & \frac{\partial(a^3 \sqrt{g_{33}})}{\sqrt{g_{33}} \partial \Lambda^2} - \frac{\partial(a^2 \sqrt{g_{22}})}{\sqrt{g_{22}} \partial \Lambda^3} \\ & \frac{\partial(a^1 \sqrt{g_{11}})}{\sqrt{g_{11}} \partial \Lambda^3} - \frac{\partial(a^3 \sqrt{g_{33}})}{\sqrt{g_{33}} \partial \Lambda^1} \text{ sur } (\vec{\xi}_i). \\ & \frac{\partial(a^2 \sqrt{g_{22}})}{\sqrt{g_{22}} \partial \Lambda^1} - \frac{\partial(a^1 \sqrt{g_{11}})}{\sqrt{g_{11}} \partial \Lambda^2} \end{aligned}$$

23 Application à nos coordonnées ( r, φ, s ):

On applique ce qui précède aux coordonnées ( r, φ, s ) définies au paragraphe 21. On choisit ici  $\sigma = 1$ .

$$\vec{x} = \vec{X}(s) + r \vec{r}(\phi, s)$$

$$\text{d'où } d\vec{x} = d(\vec{X}(s) + r \vec{r}(\phi, s))$$

$$= d\vec{X}(s) + \vec{r} dr + r d\vec{r}$$

$$d\vec{x} = \vec{X}_s ds + \vec{r} dr + r(\vec{n}_s \cos \phi + \vec{b}_s \sin \phi) ds + r(-\vec{n} \sin \phi + \vec{b} \cos \phi) d\phi$$

$$= \vec{\tau} ds + \vec{r} dr + r((T \vec{b} - K \vec{\tau}) \cos \phi - T \vec{n} \sin \phi) ds$$

$$+ r(-\vec{n} \sin \phi + \vec{b} \cos \phi) d\theta$$

$$d\vec{x} = \vec{\tau} ds + \vec{r} dr + r T ds \phi - r K \vec{\tau} \cos \phi ds + r \phi d\theta$$

$$d\vec{x} = \vec{r} dr + \phi r (d\phi + T ds) + \vec{\tau} (1 - r K \cos \phi) ds$$

On pose:  $h_3 = 1 - r K \cos \phi$

Alors:  $d\vec{x} = dr \vec{E}_1 + d\phi \vec{E}_2 + ds \vec{E}_3$  d'où:

$$\vec{E}_1 = \vec{r} \quad \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_3 = 0$$

$$\vec{E}_2 = r \phi \quad \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_3 = r^2 T \neq 0$$

$$\vec{E}_3 = r T \phi + h_3 \vec{\tau}$$

Les coordonnées ( r, φ, s ) ne sont pas orthogonales.

On obtient des coordonnées orthogonales ( r, θ, s ) en définissant θ

par:  $\theta = \phi - \theta_0(s)$  où  $d\theta_0 = -T(s) ds$

On a alors:  $d\vec{x} = \vec{r} dr + \phi r d\theta + \vec{\tau} h_3 ds$  et:

$$\vec{E}_1 = \vec{r} \quad \vec{E}_3 = \vec{\tau} h_3$$

$$\vec{E}_2 = r \phi \quad \text{vecteurs de base de } (r, \theta, s)$$

Soit  $g_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$  la matrice métrique.

$$\text{on a : } g_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad g_1 = g_{11} = 1$$

$$g_2 = g_{22} = r^2 \quad g_3 = g_{33} = h_3^2$$

Les coordonnées orthonormées (  $\Lambda_i$  ) naturellement associées aux

(  $\lambda_i$  ) = ( r, θ, s ) sont définies par  $d\Lambda^i = \sqrt{g_{ii}} d\lambda^i$ .

D'où  $d\Lambda_1 = dr \quad d\Lambda_2 = r d\theta \quad d\Lambda_3 = h_3 ds$

Les vecteurs de base de (  $\Lambda_i$  ) sont  $\vec{r}$ ,  $\vec{\phi}$  et  $\vec{\tau}$ . On définit

$\vec{\theta} = \vec{\phi}$ . Tant que  $0 < r < \frac{1}{K}$ ,  $1 - Kr \cos \phi$  ne peut pas s'annuler. Si  $r > \frac{1}{K}$ , il existe des valeurs de  $\phi$  pour lesquelles  $h_3 = 1 - r K \cos \phi$  s'annule et donc  $\vec{E}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial s} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial s} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial s} \vec{e}_3 = 0$ . Comme

$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{\partial x_3}{\partial s} = 0$ , la transformation de coordonnées n'est alors plus bijective. On emploiera donc ces coordonnées curvilignes dans la suite seulement pour des points proches de C ( $rK \ll 1$ ).

### 3 Le problème extérieur et son développement limité en $r=0$ :

Le problème extérieur est celui de l'écoulement créé par une ligne tourbillon  $C$  de circulation  $\Gamma$ .

La formule de Biot et Savart nous donne la solution:

$$\vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{X}(s)}{|\vec{x} - \vec{X}|} \quad \text{où } \vec{A} \text{ est le potentiel vecteur.}$$

Si  $s$  est l'abscisse curviligne sur  $C$ , on a  $\vec{X}(s+S) = \vec{X}(s)$  où  $S$  est la longueur de l'anneau.

Il vient donc: 
$$\vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^S \frac{\vec{X}_s(s')}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|} ds'$$

C'est la solution du problème extérieur. Loin de  $C$ , il est possible de donner un développement multipolaire de l'écoulement.

Lorsque l'on voudra raccorder cette solution avec la solution intérieure, il nous faudra un développement limité de cette solution extérieure lorsqu'on est très proche de  $C$ . C'est ce que l'on a développé dans l'annexe 2. Si  $\vec{Q}_e(x) = \text{rot } \vec{A}$  est la vitesse de l'écoulement extérieur on aboutit au développement suivant:

$$\vec{Q}_e(x) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\phi} + \frac{\Gamma K}{4\pi} \ln \frac{S}{r} \vec{b} + \frac{\Gamma K \cos \phi}{4\pi} \vec{\phi} + \vec{Q}_f \quad (1)$$

où  $\vec{Q}_f$  est le terme régulier constant et  $K$  la courbure.

C'est le développement limité recherché de la solution extérieure en  $r=0$ .

Soient  $\vec{Q}_s$  le terme singulier de ce développement et  $\vec{Q}_2$  le terme du à l'écoulement potentiel  $\phi(x)$ , on a alors l'expression suivante de la vitesse

en  $r=0$ : 
$$\vec{V} = \vec{Q}_e(x) = \vec{Q}_s + \vec{Q}_f + \vec{Q}_2$$

$\vec{Q}_f$  est déterminé dans l'annexe 2 car on en aura besoin.

#### 4 Le problème intérieur:

On définit le problème intérieur en utilisant la variable de dilatation

$$\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$$

41 Les équations dans le système de coordonnées curvilignes:

Pour développer le problème intérieur, il nous faudra écrire l'équation de continuité et celle de Navier Stokes sur les coordonnées  $(r, \theta, s)$ . Le détail de la démarche et des calculs pour obtenir ces formules est fait à l'annexe 1.

411 Vitesse relative:

La ligne centrale est repérée par la fonction  $\bar{X}(s)$  et le changement de coordonnées est défini comme on l'a précédemment vu par la relation:  $\vec{x} = \bar{X}(s) + r \vec{r}(\phi, s)$

$\vec{v}$  est la vitesse du fluide. On fait apparaître une vitesse relative

$$\vec{v} \text{ en posant: } \boxed{\vec{v} = \dot{X}(t, s) + \vec{V}}$$

On décompose  $\vec{V}$  sur  $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ :  $\vec{V} = u \vec{r} + v \vec{\theta} + \omega \vec{\tau}$

$u \vec{r}$ : vitesse radiale.

$v \vec{\theta}$ : vitesse circonférentielle.

$\omega \vec{\tau}$ : vitesse axiale.

412 conservation de la masse:

L'expression  $\text{div } \vec{v} = 0$  devient dans notre système de coordonnées:

$$\boxed{(u r h_3)_r + (h_3 v)_\theta + r \omega_s + r \dot{X}_s \cdot \vec{\tau} = 0} \quad (2)$$

413 Équation de NavierStokes:

L'équation de NavierStokes devient:

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\dot{X}_s}{h_3} (\omega - r \vec{r}_t \cdot \vec{\tau}) + \frac{d^R \mathbf{V}}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}p} + \frac{v}{h_3} \left( \frac{1}{h_3} \dot{X}_s \right)_s + v \Delta \vec{V}} \quad (3)$$

où on n'a pas remplacé les expressions des termes:  $\frac{d^R \mathbf{V}}{dt}$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}p}$  et  $\Delta \vec{V}$  que l'on trouve dans l'annexe 1.

Par exemple:

$$\vec{\text{grad}} p = \left( \varepsilon^{-1} \frac{\partial p}{\partial \bar{r}}, \frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial \bar{\lambda}} \right)_{\vec{r}, \phi, \vec{\tau}} \quad (4)$$

Il est à noter que toutes les dérivées en temps sont des dérivées dans le référentiel d'étude R qui est le référentiel du laboratoire.

414 Conditions aux limites en  $\bar{r} = 0$

De  $(\dot{X} - \vec{v}(t, X)) \times \vec{\tau} = 0$  et  $\dot{X} \cdot \vec{\tau} = 0$  en  $\bar{r} = 0$  il ressort:

$$\boxed{u = v = 0} \text{ et } \boxed{\dot{X} \cdot \vec{\tau} = 0} \text{ en } \bar{r} = 0 \quad (5)$$

42 *Déroulement des calculs:*

On a la solution extérieure et son développement limité en  $r=0$ , qui va nous donner la condition de raccordement c'est à dire la condition aux limites en  $\bar{r} = \infty$  du problème intérieur. On a les équations et la condition aux limites en  $\bar{r} = 0$  du problème intérieur. On n'a encore pas exactement fixé les conditions initiales du problème.

On va chercher une solution du problème intérieur sous la forme d'un développement asymptotique en  $\varepsilon$ .

L'objectif de la résolution est de déterminer un système complet d'équations de l'évolution de la ligne centrale C de l'anneau. On va résoudre le problème intérieur aux différents ordres successifs jusqu'à l'obtention d'un tel système. Au préalable il faudra bien sûr se donner la forme de ces développements asymptotiques en  $\varepsilon$  que l'on va chercher.

421 Forme des développements asymptotiques:

Il est supposé qu'on a les développements suivants:

$$\begin{aligned} u(t, \bar{r}, \theta, s, \varepsilon) &= u^{(1)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \varepsilon u^{(2)} + \dots \\ v(t, \bar{r}, \theta, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} v^{(0)}(t, \bar{r}, \theta, s) + v^{(1)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \varepsilon v^{(2)} + \dots \\ \omega(t, \bar{r}, \theta, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \omega^{(0)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \omega^{(1)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \varepsilon \omega^{(2)} + \dots \\ p(t, \bar{r}, \theta, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} p^{(0)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \varepsilon^{-1} p^{(1)}(t, \bar{r}, \theta, s) + p^{(2)} + \dots \\ \Omega(t, \bar{r}, \theta, s, \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} \Omega^{(0)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \varepsilon^{-1} \Omega^{(1)}(t, \bar{r}, \theta, s) + \dots \end{aligned}$$

$$x(t, s, \varepsilon) = x^{(0)}(t, s) + \varepsilon x^{(1)}(t, s) + \dots$$

$$h_3(\varepsilon) = h_3^{(0)}(t, s) + \varepsilon h_3^{(1)}(t, s) + \dots$$

$$= \sigma^{(0)}(t, s) + \varepsilon (\sigma^{(1)} - \sigma^{(0)} K^{(0)} \bar{r} \cos \phi^{(0)}) + \dots$$

où  $\sigma^{(0)} = |X_s^{(0)}|$ ,  $\phi^{(0)} = \theta + \theta_0^{(0)}$  et  $\theta_0^{(0)} = - \int \sigma^{(0)} T^{(0)} ds$

Les termes d'indice  $(0)$  sont dits ordre principal, ceux d'indice  $(1)$ : premier ordre et ceux d'indice  $(2)$ : deuxième ordre.  
On remplace ces développements dans (2) (3) (A3') (A3'') (A3''') et (A4).

422 Conditions aux limites en  $\bar{r} = \infty$ :

C'est d'abord la condition de raccordement (1). A ceci se rajoute la décroissance exponentielle de la vorticité et la limite nulle de la pression.

423 Ordre principal:

En regardant les termes en  $\varepsilon^{-1}$  dans l'équation de continuité (2) il vient facilement:

$$v_\theta^{(0)} = 0 \text{ c'est à dire } v^{(0)} = v^{(0)}(t, \bar{r}, s)$$

Les termes en  $\varepsilon^{-3}$  dans les équations de Navier Stokes (3) (A3') (A3'') (A3''') donnent une relation vectorielle dans laquelle n'intervient que  $\vec{\tau}^{(0)}$ ,  $\vec{\theta}^{(0)}$  et  $\vec{r}^{(0)}$  et pas  $\vec{\tau}^{(1)}$ ,  $\vec{\theta}^{(1)}$  et  $\vec{r}^{(1)}$ . Elle donne donc en projection sur  $\vec{\tau}^{(0)}$ ,  $\vec{\theta}^{(0)}$  et  $\vec{r}^{(0)}$ :

$\omega_\theta^{(0)} v^{(0)} = 0$ $p_\theta^{(0)} = 0$ $\frac{[v^{(0)}]^2}{\bar{r}} = p \frac{^{(0)}}{\bar{r}}$	(6')
---	------

c'est à dire

$$\begin{aligned}
 \omega^{(0)} &= \omega^{(0)}(t, \bar{r}, s) \\
 p^{(0)} &= p^{(0)}(t, \bar{r}, s) \\
 p^{(0)} &= - \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{[v^{(0)}(t, \bar{r}', s)]^2}{\bar{r}'} d\bar{r}' \quad (6)
 \end{aligned}$$

et les termes en  $\varepsilon^{-2}$  dans (A4) donnent:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^{(0)} &= 0 \\
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\theta})^{(0)} &= -\omega \frac{1}{r} \\
 (\vec{\Omega} \cdot \vec{\tau})^{(0)} &= \frac{\Lambda}{r} \left[ \frac{1}{r} v^{(0)} \right] \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

On note  $\zeta(t, \bar{r}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\tau}$  la composante axiale de la vorticité. La

condition de raccordement donne:  $v^{(0)} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$  en  $\bar{r} = \infty$ .

Ces formules ne permettent pas de déterminer complètement l'ordre principal de l'écoulement interne:

$u^{(0)}, v^{(0)}, \omega^{(0)}, \zeta^{(0)}$ . Les renseignements qu'elles donnent sur cet écoulement seront pris en compte dans la suite en simplifiant les calculs à l'aide de celles-ci. On cherchera un écoulement qui vérifie ces conditions.

De plus ces formules ne nous apportent aucun renseignement sur l'évolution de la ligne centrale C de l'anneau. Il va falloir écrire les formules au premier ordre.

424 Le Premier ordre:

Les termes en  $\varepsilon^0$  de l'équation de continuité donnent :

$$\frac{1}{r} \left[ v_{\theta}^{(1)} + (\bar{r} u^{(1)}) \frac{1}{r} \right] = - \frac{1}{\sigma^{(0)}} \omega_S^{(0)} - (\omega K \sin \phi)^{(0)} \quad (7)$$

Les termes en  $\varepsilon^{-2}$  de l'équation de Navier Stokes (3),(A3') (A3'') (A3''') donnent une équation vectorielle dans laquelle n'interviennent que  $\vec{\tau}^{(0)}$ ,  $\vec{\theta}^{(0)}$  et  $\vec{r}^{(0)}$  car les coefficients devant les vecteurs  $\vec{\tau}^{(1)}$ ,  $\vec{\theta}^{(1)}$  et  $\vec{r}^{(1)}$  sont les expressions des équations (6') trouvées à l'ordre principal et donc sont nuls. Ces équations projetées sur  $\vec{\tau}^{(4)}$ ,  $\vec{\theta}^{(1)}$  et  $\vec{r}^{(1)}$  donnent donc:

$$v^{(0)} u_{\theta}^{(1)} - 2 v^{(0)} v^{(1)} + \bar{r} p \frac{1}{r} = - (\omega^2 K \bar{r} \cos \phi)^{(0)} \quad (7')$$

$$u^{(1)} v \frac{1}{r} + \frac{v^{(0)}}{r} v_{\theta}^{(1)} + \frac{v^{(0)} u^{(1)}}{r} + \frac{1}{r} p_{\theta}^{(1)} = - \frac{\omega^{(0)}}{\sigma^{(0)}} v_S^{(0)} + (\omega^2 K \bar{r} \sin \phi)^{(0)} \quad (7'')$$

$$u^{(1)} \omega \frac{1}{r} + \frac{v^{(0)}}{r} \omega_{\theta}^{(1)} = - \frac{1}{\sigma^{(0)}} (p_S^{(0)} + \omega^{(0)} \omega_S^{(0)}) - (\omega v K \sin \phi)^{(0)} \quad (7''')$$

On s'est servi des équations (6) pour simplifier certains termes.

4241 Partie symétrique- Équations de Compatibilité:

Toute fonction  $f(\theta)$  de la variable  $\theta$  peut être décomposée

suivant le schéma:  $f(\theta) = f_c + f_a(\theta)$  où  $f_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$  ne

dépend plus de  $\theta$ .  $f_c$  est dite partie symétrique et  $f_a$  partie antisymétrique.

Lorsqu'on intègre les équations (7), (7''') et (7'') on obtient trois équations dans lesquelles le seul terme d'ordre 1 est  $u_C^{(1)}$ :

$$NB: v_{\theta}^2 = \omega_{\theta}^2 = 0$$

$$\sigma^{(0)} \left( \bar{r} u_C^{(1)} \right)_{\bar{r}} + \bar{r} \omega_S^{(0)} = 0 \quad (8)$$

$$\sigma^{(0)} \omega_{\bar{r}}^{(0)} u_C^{(1)} + \omega^{(0)} \omega_S^{(0)} = 2 \int_{\bar{r}}^{\infty} \frac{v^{(0)} v_S^{(0)}}{\bar{r}'} d\bar{r}' \quad (8')$$

$$\sigma^{(0)} \left( \bar{r} v^{(0)} \right)_{\bar{r}} u_C^{(1)} + \bar{r} \omega^{(0)} v_S^{(0)} = 0 \quad (8'')$$

On élimine  $u_C^{(1)}$  dans (8') et (8'') avec le  $u_C^{(1)}$  de (8) et on obtient alors deux équations avec uniquement les termes principaux  $u^{(0)}, v^{(0)}, \omega^{(0)}$  de l'écoulement interne. Dans ces équations, le paramètre temps  $t$  n'apparaît pas: les équations sont stationnaires. Comme ce système n'admet pas une solution unique, on peut construire toute une cinématique possible d'évolution de la partie principale de l'écoulement interne.

Ces équations sont appelées équations de Compatibilité puisqu'elles ne permettent pas de trouver l'évolution de l'ordre principal de l'écoulement interne.

Si la condition initiale ne vérifie pas ces conditions de compatibilité, il faut abandonner l'étude asymptotique à une échelle de temps que l'on est en train de faire et recourir à une étude asymptotique à deux échelles de temps.

#### 4242 Partie antisymétrique- Évolution de l'anneau C:

Dans le cas où  $v^{(0)}$  et  $\omega^{(0)}$  sont indépendant par rapport à  $\theta$  et  $s$ :  $v^{(0)} = v^{(0)}(t, \bar{r})$  et  $\omega^{(0)} = \omega^{(0)}(t, \bar{r})$ , on peut trouver une solution au système (7) des équations au premier ordre. Dans la suite, on se placera donc dans cette situation. Les équations de compatibilité issues de (8), (8'), (8'') sont alors vérifiées automatiquement.

On va décrire ici brièvement le cheminement des calculs que l'on a développés en annexes 4. A l'aide de l'équation de continuité (7) on introduit une fonction de courant  $\Psi$ . On remarque que  $\omega^{(1)}$  n'apparaît que dans l'équation (7'''). On élimine donc la pression entre (7') et (7'') en utilisant l'égalité des dérivées croisées de  $P$  en  $\theta$  et  $s$ . On obtient une équation en  $\Psi$  que l'on résout en utilisant les conditions aux limites en  $\bar{r} = 0$  à l'aide d'un développement en série de Fourier. On fait

et  $u_C^{(1)} = 0$

alors le développement limité de cette solution en  $\bar{r} = \infty$  qu'on égalise à la condition aux limites en  $\bar{r} = \infty$  (condition de raccordement). On obtient alors la relation suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}^{(0)} \cdot \vec{b}^{(0)} = \frac{\Gamma K^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} + Q_0 \cdot \vec{b}^{(0)} + K^{(0)} C^* \\ \dot{X}^{(0)} \cdot \vec{n}^{(0)} = Q_0 \cdot \vec{n}^{(0)} \\ \dot{X}^{(0)} \cdot \vec{\tau}^{(0)} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

avec  $\vec{V} = \vec{Q}_e(x) = \vec{Q}_s + \vec{Q}_f + \vec{Q}_2$

$$Q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} (\vec{Q}_f + \vec{Q}_2)$$

$$\begin{aligned} C^*(t) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( 4\pi^2 \int_0^{\bar{r}} \xi [v^{(0)}(t, \xi)]^2 d\xi - \ln \bar{r} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ &\quad - \frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^\infty \xi [\omega^{(0)}(t, \xi)]^2 d\xi \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} [Cv(t) + C\omega(t)] \end{aligned}$$

La relation (9) donne l'évolution de C en fonction de l'ordre principal de l'écoulement interne. Comme l'évolution de l'ordre principal de l'écoulement interne n'est pas connu, il va falloir développer les calculs au deuxième ordre.

425 Deuxième ordre:

En écrivant les équations au deuxième ordre, tout en se servant des résultats du premier ordre et de la partie principale trouvés précédemment, Ting (1) arrive, après avoir intégré les équations par rapport à  $\theta$ , à deux équations ne faisant intervenir que l'ordre principal et l'ordre 1. Ce sont deux relation de compatibilité. Il se sert alors de la périodicité en  $s$ :  $X(t, s+S_0, \varepsilon) = X(t, s, \varepsilon)$  pour simplifier un grand nombre de termes, dont tous les

termes d'ordre 1, en intégrant par rapport à s ces deux équations. Il arrive alors aux deux équations suivantes: ( voir annexe 5 ).

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_t^{(0)} - \bar{v} \frac{1}{r} \left( \bar{r} \omega \frac{(0)}{r} \right) \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} \bar{r}^3 \left( \frac{\omega^{(0)}}{r^2} \right) \frac{\dot{S}^{(0)}}{r S^{(0)}} \\ v_t^{(0)} - \bar{v} \left[ \frac{1}{r} \left( \bar{r} \omega \frac{(0)}{r} \right) \frac{1}{r} - \frac{v^{(0)}}{r^2} \right] &= \frac{1}{2} \left( \bar{r} v^{(0)} \right) \frac{\dot{S}^{(0)}}{r S^{(0)}} \end{aligned}} \quad (10)$$

où  $\bar{v} = \frac{v}{U \epsilon^2}$  et où  $S^{(0)}(t)$  est la longueur de la ligne centrale déterminée à partir de  $\sigma^{(0)}$ .

Ces deux équations donnent l'ordre principal de l'écoulement interne de l'anneau en fonction de l'évolution de la ligne centrale C de l'anneau.

Les équations (9) et (10) forment un système complet d'équations d'évolution de la ligne centrale et d'évolution de l'écoulement interne en partie principale. Il y a couplage entre les deux phénomènes.

Afin de n'avoir plus qu'un système d'équations d'évolution de la ligne centrale C de l'anneau, Ting résout les équations (10) et trouve une solution en fonction de  $S^{(0)}(t)$  qu'il injecte dans les équations (9), afin d'obtenir le système d'équations recherchées.

Il résout (10) au moyen du changement de variables:

$$\eta = \frac{\bar{r}}{\sqrt{4 \bar{v} \tau_2(t)}} \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{S^{(0)}(t)}$$

$$\tau_1 = \int_0^t S^{(0)}(t') dt' + \tau_{10}$$

où  $\tau_{10}$  est une constante qu'on peut choisir arbitrairement; et du changement de fonctions:

$$W(\eta, \tau_1) = \tau_1 \omega^{(0)} S^{(0)} \quad \text{et} \quad Z(\eta, \tau_1) = \tau_1 \frac{\zeta^{(0)}}{S^{(0)}}$$

$$y_0 = \frac{1}{\bar{v}} \left( \bar{r} v^{(0)} \right) \frac{1}{r}$$

Les équations (10) se ramènent alors à une même équation:

$$\boxed{4 \tau_1 X_{\tau_1} = \frac{1}{\eta} [(\eta X_{\eta})_{\eta} + (2 \eta^2 X)_{\eta}]} \quad (11)$$

où  $X$  représente ou bien  $Z$  ou bien  $W$ .

Il faut remarquer que les équations d'évolution de la ligne centrale (9) ne font intervenir que des termes de dérivation de degré 1 par rapport au temps:  $\dot{X}$  alors que dans les équations de Navier Stokes, on a des dérivées secondes  $\ddot{X}$ . Une singularité est donc apparue; on ne pourra pas et imposer la position initiale et la vitesse initiale de la ligne centrale. Dans la suite, on choisit de prendre la position initiale comme condition initiale. La vitesse initiale est alors déterminée par la solution du système d'équations. Si elle ne correspond pas à la vitesse initiale que l'on voulait imposer, il faudrait alors faire une analyse à deux échelles de temps.

L'équation (11) est résolue au moyen de la séparation de variables:  $X(\tau_1, \eta) = T(\tau_1) \psi(\eta)$ . L'équation différentielle vérifiée par  $\psi$  est ramenée à l'équation de Laguerre au moyen du changement  $\xi = \eta^2$  et  $B(\xi) = e^{\xi} \psi(\sqrt{\xi})$  dont les solutions sont les polynômes de Laguerre:

$$B(\xi) = L_n(\xi) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} \frac{\xi^m}{m!} \quad \text{où} \quad \binom{n}{m} = C_n^m$$

$$\text{Ces polynômes vérifient: } \int_0^{\infty} e^{-\xi} L_n(\xi) L_m(\xi) d\xi = \delta_{nm}$$

Il est important de remarquer que lors de l'obtention de l'équation (11), on peut faire un choix différent de la constante  $\tau_{10}$  lors de la transformation de chacune des équations de (10).

Pour l'équation en  $\omega^{(0)}$  on choisit la constante  $\tau_{10}^{\omega}$  et pour celle en  $v^{(0)}$  la constante  $\tau_{10}^v = \tau_{10}$ .

Ting fait alors le développement en série suivant des fonctions propres:

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{S^{(0)}} e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\eta^2) \tau_1^{-(n+1)}$$

$$\zeta^{(0)} = S^{(0)} e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n L_n(\eta^2) \tau_1^{-(n+1)}$$

et donc:

$$v^{(0)} = \frac{2\bar{v}}{r} \left[ D_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\tau_1^n} (L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)) \right]$$

On choisit  $\tau_{10}^{\omega}$  et  $\tau_{10}^v = \tau_{10}$  de telle sorte que  $C_1 = D_1 = 0$ . On dit qu'on a fait un choix optimal des constantes (annexe 6).

On remplace alors les expressions précédentes de  $\omega^{(0)}$  et  $v^{(0)}$  dans les expressions de  $C_v(t)$  et  $C_{\omega}(t)$  (annexe 6). Le mouvement du filament est déterminé par la configuration initiale de sa ligne centrale  $X(0,s)$  et les profils initiaux  $\omega^{(0)}(0, \bar{r})$  et  $\zeta^{(0)}(0, \bar{r})$  qui sont eux même complètement déterminés par les constantes  $C_n$  et  $D_n$ .

On appelle solution similaire un anneau tel qu'initialement  $C_n = D_n = 0$  pour  $n \geq 1$  et  $\tau_{10}^{\omega} = \tau_{10}^v = \tau_{10}$ . Si cette condition est vérifiée initialement, elle est alors vérifiée à chaque instant puisque  $C_n$  et  $D_n$  sont calculés avec la configuration initiale à  $t=0$ .

Le mouvement du filament dans le cas de la solution similaire est complètement déterminée par la configuration initiale de sa ligne centrale  $X(0,s)$ , le petit paramètre  $\varepsilon$  et les trois constantes: la circulation  $\Gamma$ , le flux axial initial

$$m(0) = 2\pi \int_0^{\infty} \bar{r} \omega^{(0)}(0, \bar{r}) d\bar{r} \text{ et la dimension effective initiale}$$

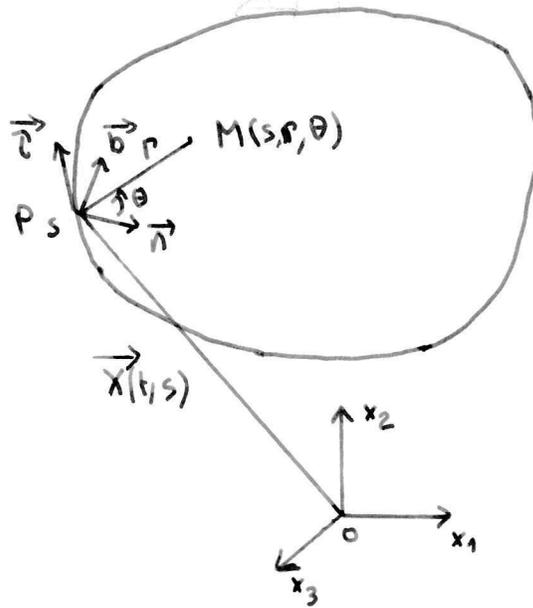
de la section de l'anneau  $\delta(0)$  où  $\delta(t) = \varepsilon \sqrt{4\bar{v} \tau_2(t)}$  est la dimension effective de l'anneau. La donnée de ces trois constantes détermine la structure initiale d'anneau similaire.

Le système d'équations dans ce cas est plus simple; on n'a que les premiers termes dans les expressions générales de  $C_v(t)$  et  $C_{\omega}(t)$  en fonction de  $C_n$  et  $D_n$  (annexe 6).

### 43 Système complet d'équations:

Dans cette partie on va écrire le système complet d'équations d'évolution de l'anneau que l'on peut trouver dans l'Annexe A3 du livre de Ting (1).

On considère un anneau de vorticité de circulation  $\Gamma$ . Un point P de sa ligne centrale C est repéré par la relation  $\vec{OP} = \vec{X}(t, s)$ . Il est placé dans un écoulement potentiel extérieur  $\phi(x)$ . On ne met pas ici l'indice <sup>(0)</sup> car tous les termes des équations qui suivent sont des termes principaux des développements asymptotiques.



Un point M de l'espace est repéré par les coordonnées locales  $(r, \phi, s)$  déterminées par la relation:

$$\vec{OM} = \vec{x} = \vec{X}(t, s) + r \vec{r}(t, s)$$

$\vec{r}$  est le vecteur radial unitaire dans le plan  $(\vec{n}, \vec{b})$

$(r, \phi)$  sont les coordonnées polaires dans  $(\vec{n}, \vec{b})$

$r$  est la distance minimale de M à la fibre C.

On a le système complet d'équations suivant:

- Les données:

+ ligne centrale à  $t=0$ :

$$\vec{X}(0, s) \text{ avec } \vec{X}(0, s+2\pi) = \vec{X}(0, s) \text{ et } 0 \leq s \leq 2\pi$$

d'où une longueur caractéristique  $l$ .

+ viscosité cinématique:  $\nu$

+circulation autour de la fibre:  $\Gamma$ .

on en déduit le petit paramètre  $\varepsilon = \sqrt{\frac{V}{\Gamma}}$  qui doit être inférieur à 1.

+les profils initiaux de vorticité  $\zeta$  et de vitesse axiale  $\omega$ :

$$\zeta(0, \vec{x}) = \varepsilon^{-2} \zeta_0(\bar{r}) \text{ et } \omega(0, \vec{x}) = \varepsilon^{-1} \omega_0(\bar{r})$$

où  $\bar{r} = \frac{r}{\varepsilon}$ . Ils décroissent exponentiellement en  $\bar{r}$ . On doit

$$\text{avoir } \Gamma = 2\pi \int_0^\infty \bar{r} \zeta_0(\bar{r}) d\bar{r}.$$

+le potentiel d'écoulement extérieur  $\phi(x)$ . Il donne une vitesse caractéristique  $U$  et on doit avoir  $U = O(\Gamma)$ .

-L'équation principale:

$$\vec{X}_t(t,s) = Q^*(t, X(s)) + \frac{\Gamma K(s)}{4\pi} \left[ \ln \frac{1}{\varepsilon} + Cv(t) \right] \vec{b}(s) + \frac{\Gamma K(s)}{4\pi} C\omega(t) \vec{b}(s)$$

-Les équations annexes:

+ formules de Frénet:

$$\sigma = |\vec{X}_s|$$

$$\vec{X}_s = \sigma \vec{\tau} \quad \vec{X}_s \times \vec{X}_{ss} = \sigma^3 \vec{b} K$$

$$\vec{b} \times \vec{\tau} = \vec{n} \quad T = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \vec{b}}{\partial s} \cdot \vec{n}$$

+écoulement du à  $\phi(X)$ :  $\vec{Q}_2 = \vec{\nabla} \phi(X)$  en  $X$  de  $C$ .

+partie régulière de l'intégrale de Biot et Savart:

$$Q_f(t,s) = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} G(t,s+\bar{s},s) d\bar{s} + [\ln(2\sqrt{S_+ S_-}) - 1] K(s) \vec{b}(s) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad G(t, s', s) &= F(t, s', s) - \frac{K(s)}{2} \frac{\vec{b}(s)}{|\lambda(t, s', s)|} \quad \text{si } s' \neq s \\ &= \frac{\vec{\tau}(s) \times \vec{B}(s)}{3} \operatorname{sgn}(s' - s) \sigma(s') \quad \text{si } s' = \pm 0 \end{aligned}$$

$$F(t, s', s) = \frac{X(t, s') - X(t, s)}{|X(t, s') - X(t, s)|^3} \times X_S(t, s')$$

$$\lambda(t, s', s) = \int_s^{s'} \sigma(t, s^*) ds^* \quad \vec{B}(s) = \frac{\partial K}{\partial s}(s) \frac{\vec{n}(s)}{\sigma(s)} + K(s) T(s) \vec{b}(s)$$

$$S_{\pm} = \lambda(t, s \pm \pi, s) . \text{ On a: } S(t) = S_+(t, s) + S_-(t, s) = \int_0^{2\pi} |\sigma(t, s)| ds$$

+terme  $Q^*$ :

$$Q^* = (Q_2 + Q_f) \cdot \vec{\tau} \cdot ((Q_2 + Q_f) \cdot \vec{\tau})$$

+terme  $C_V(t)$ :

$$\delta(t) = \left[ 4v \frac{\tau_1(t)}{S(t)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_1 = \int_0^t S(t') dt' + \tau_{10}$$

$$\tau_{10} = \frac{\pi S_0}{2 \Gamma \bar{v}} \int_0^{\infty} \zeta_0(\bar{r}) \bar{r}^3 d\bar{r} \quad \text{avec } \bar{v} = \frac{v}{\varepsilon^2} = \Gamma$$

*pas d'unité qq de  $S_0$  :  $\delta_0$  est en  $D_0$ .  
 $S_0$  =  $\frac{1}{\text{m}^2 \text{s}}$  mais  $\frac{1}{3} \frac{1}{\text{m}^2 \text{s}}$ ...*

$$C_V(t) = \ln\left(\frac{1}{\delta(t)}\right) + \frac{1}{2} [1 + \gamma - \ln 2] + 4\pi \sum_{n=1}^N \alpha_n \tau_1^{-n}(t) + 8\pi^2 \sum_{n=2}^N \gamma_n \tau_1^{-n}(t)$$

où :

$$\bar{\delta}(t) = \frac{\delta(t)}{\varepsilon} \quad \gamma = 0,577215 \text{ est le nombre d'Euler}$$

$$\alpha_n = \frac{\bar{v}}{\Gamma} D_n \sum_{j=1}^n q_{n,j} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right) (j-1)!$$

$$\gamma_h = \sum_{m=1}^{h-1} \left(\frac{\bar{v}}{\Gamma}\right)^2 D_m D_{h-m} \beta_{m,h-m}$$

$$\beta_{n,h} = \sum_{i=1}^n q_{n,i} \sum_{j=1}^h \frac{(i+j-1)!}{2^{i+j}} q_{h,i}$$

$$q_{n,k} = p_{n-1,k} - p_{n,k} \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } p_{n-1,n} = 0 \text{ par définition.}$$

$p_{n,k}$  : coefficient de  $x^k$  dans le polynôme  $L_n(x)$  de Laguerre.

$$p_{n,k} = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k!} \text{ et } p_{n-1,n} = 0 \text{ par définition}$$

On explicitera  $D_n$  et  $N$  dans la suite.

+terme  $C_\omega(t)$  :

$$\delta^\omega(t) = \left[ 4v \frac{\tau_1^\omega(t)}{S(t)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_1^\omega = \int_0^t S(t') dt' + \tau_{10}^\omega$$

$$\tau_{10}^\omega = \frac{\pi S_0}{2 m(0) \bar{v}} \int_0^\infty \omega_0(\bar{r}) \bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$m(0) = 2\pi \int_0^\infty \bar{r} \omega_0(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$C_\omega(t) = -\frac{16\pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1^\omega} \sum_{n=0}^N \omega_n (\tau_1^\omega)^{-n}(t)$$

où

$$\omega_n = \sum_{m=0}^n C_m C_{n-m} P_{m,n-m}$$

$$P_{n,i} = \sum_{j=0}^i p_{i,j} \sum_{k=0}^n \frac{(j+k)!}{2^{j+k+1}} p_{n,k}$$

+  $C_n, D_n$  :

$$C_n = 2 S_0 (\tau_{10}^\omega)^{n+1} \int_0^\infty \omega_0(\bar{r}) L_n(\eta^2) \eta d\eta$$

$$D_n = \frac{2}{S_0} (\tau_{10}^\omega)^{n+1} \int_0^\infty \zeta_0(\bar{r}) L_n(\eta^2) \eta d\eta$$

$$\bar{r} = \eta \left[ 4 \bar{v} \frac{\tau_{10}}{S_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad S_0 = S(0)$$

$n+1$  est le nombre de termes utilisés dans:

$$\omega = \frac{1}{S} e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\eta^2) (\tau_1)^{-(n+1)}$$

$$\zeta = S e^{-\eta^2} \sum_{n=0}^{\infty} D_n L_n(\eta^2) (\tau_1)^{-(n+1)}$$

afin de satisfaire les profils initiaux  $\omega_0(\bar{r})$  et  $\zeta_0(\bar{r})$  de façon convenable.

On aurait pu faire le choix de prendre qu'une seule constante  $\tau_{10}$  afin d'annuler que  $D_1$ . Le système qui en découle s'obtient à partir du précédent en faisant les changements suivant:

$$\tau_{10}^{\omega} \rightarrow \tau_{10} \quad \tau_1^{\omega} \rightarrow \tau_1 \quad \delta^{\omega} \rightarrow \delta$$

On remarque que :  $C_0 = m(0) \frac{(S_0)^2}{4 \Gamma \pi}$

$$D_0 = \frac{1}{4 \pi}$$

Dans le cas d'un anneau similaire ( on a des données initiales correspondantes ), on n'a que le premier terme dans les expressions de  $C_v$  et  $C_{\omega}$  c'est à dire:

$$C_v(t) = \ln\left(\frac{1}{\delta(t)}\right) + \frac{1}{2} [1 + \gamma - \ln 2]$$

$$C_{\omega}(t) = - \frac{16 \pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1} (C_0)^2 P_{0,0} = - 2 \frac{(m(0))^2}{\Gamma^2 \delta^2} \left[ \frac{S_0}{S(t)} \right]^4$$

Il suffit alors de donner  $m(0), \Gamma, X(0, s)$  et  $\delta(0)$ .

On vérifie facilement l'homogénéité dimensionnelle de toutes les formules sachant que:

$u, v, \omega$  sont en  $m s^{-1}$ ;  $\Gamma$  en  $m^2 s^{-1}$ ;  $\tau_2$  en  $s$ ;  $\tau_1$  en  $m s^{-1}$  et  $\zeta$  en  $s^{-1}$ .

On peut faire une petite variante à ces équations en écrivant:

$$\vec{X}_t(t, s) = Q^*(t, X(s)) + \frac{\Gamma K(s)}{4 \pi} \left[ \ln \frac{1}{K \delta(t)} + C_v(t) \right] \vec{b}(s) + \frac{\Gamma K(s)}{4 \pi} C_{\omega}(t) \vec{b}(s)$$

mais alors

$$Q_f(t, s) = \frac{\Gamma}{4 \pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} G(t, s + \bar{s}, s) d\bar{s} + [\ln(K(2\sqrt{S_+ S_-})) - 1] K(s) \vec{b}(s) \right]$$

et on supprime le terme  $-\ln(\bar{\delta}(t))$  dans l'expression de  $C_V(t)$ . On n'a plus alors de logarithme de longueurs mais de constantes ce qui peut être avantageux.

On peut aussi traiter l'évolution simultanée de plusieurs anneaux simplement par superposition.  $Q_2$  devient :

$$Q_2 = \nabla\phi + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\text{nbra}} \Gamma_j \int_{C_j} \frac{X_j - X}{|X_j - X|^3} \wedge X_{j,s} ds$$

où nbra est le nombre d'anneaux.

-limitation de la méthode:

Il est à souligner que l'analyse asymptotique précédente a été formulée sous la condition que l'épaisseur effective  $\bar{\delta}(t)$  du corps du filament est bien inférieure aux autres longueurs caractéristiques de l'écoulement et que le filament a la forme d'un tore fin de longueur fini.

On définit trois autres échelles de longueurs:

1. le rayon minimum de courbure sur la ligne centrale C:  $R_{\min}$ .
2. le minimum de distance  $d_{ij}$  entre deux lignes centrales  $C_i$  et  $C_j$  si on a plusieurs anneaux.
3. le minimum de distance  $d_{\min}$  entre deux points "distincts" de C, où on définit deux points "distincts" de C par la condition que la longueur de l'arc entre eux le long de C est finie c'est à dire plus grande que  $\pi R_{\min}$ .

Les trois conditions suivantes doivent donc être satisfaites:

$\left( \frac{R_{\min}}{\delta_i} \right) \gg 1 \quad i=1, \dots, N$
$\left( \frac{d_{\min}}{2\delta_i} \right) \gg 1 \quad i=1, \dots, N$
$\left( \frac{d_{ij}}{\delta_i + \delta_j} \right) \gg 1 \quad i, j = 1, \dots, N \quad i \neq j$

où N est le nombre d'anneaux.

## 5 Résolution numérique du système intégrodifférentiel d'équations

On veut résoudre numériquement le système d'équations précédemment énoncé. On se place dans le cas de l'anneau similaire. On utilise donc les deux expressions:

$$C_v(t) = \ln\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) + \frac{1}{2}[1 + \gamma - \ln 2]$$

$$\text{et } C_\omega(t) = -2 \frac{m_0^2}{\Gamma} \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \left(\frac{S_0}{S}\right)^4$$

Il est important de bien voir que la méthode asymptotique impose que certains ordres de grandeurs soient respectés. Soit  $l$  la longueur caractéristique et  $U$  la vitesse caractéristique.

$$+ \delta^{(0)} = O(\varepsilon l) \text{ Or } \delta^{(0)} = \varepsilon \sqrt{4 \Gamma \tau_{20}} \text{ et } \tau_{20} = \frac{\tau_{10}}{S} \text{ avec } S = O(1)$$

$$\text{d'où } 4 \Gamma \tau_{10} = O(l^3)$$

$$\text{et donc } \boxed{4 \Gamma \tau_{20} = O(l^2)}$$

$$+ \bar{r} = O(1) \text{ et } \zeta^{(0)} = O\left(\frac{U}{l}\right) \text{ d'après le développement asymptotique.}$$

$$\text{Comme } \Gamma = 2 \pi \int_0^\infty \bar{r} \zeta^{(0)}(t, \bar{r}) d\bar{r} \text{ on a donc } \Gamma = O(Ul),$$

$$\text{et comme } m_0 = 2 \pi \int_0^\infty \bar{r} \omega^{(0)}(t, \bar{r}) d\bar{r} \text{ on a aussi } m_0 = O(Ul^2).$$

$$\text{Il vient donc } \boxed{m_0 = O(\Gamma l)}$$

### *51 Choix des paramètres:*

La structure d'anneau similaire est déterminée si on se donne les 4 paramètres :  $\varepsilon, \Gamma, \tau_{20}$  et  $m_0$  ainsi que le profil initial (d'où  $l$ ). Ces paramètres doivent vérifier les ordres de grandeur précédents.

Dans la plus part des simulations on pourra choisir les données suivantes:

$$\varepsilon = 0.03 \quad m_0 = 0$$

$$\Gamma = 5 \quad \tau_{10} = S_0 \quad \text{avec } l=O(4)$$

Ces données vérifient bien les ordres de grandeur.

Voici un autre choix des paramètres:

$$\varepsilon = 10^{-10} \quad m_0 = 0$$

$$\Gamma = 5 \quad \tau_{10} = S_0 \quad \text{avec } l=O(4)$$

Dans ce cas de choix des paramètres le système d'équations se simplifie en:

$$\boxed{X_t = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) K \vec{b}} \quad \text{équation simplifiée.}$$

On a alors  $X_t = O\left(U \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$  et  $u^{(1)} = O\left(U \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$  dans le développement asymptotique, au lieu des ordres de grandeurs  $X_t = O(U)$  et  $u^{(1)} = O(u^{(0)}) = O(U)$ . Le résultat du développement asymptotique appliqué à ce cas n'est donc qu'approximatif.

On présentera souvent dans la suite la méthode numérique sur cette équation simplifiée.

### 52 Discrétisation spatiale:

On discrétise l'espace en choisissant  $N$  points sur la fibre à l'aide d'un pas d'abscisse  $ds = \frac{2\pi}{N}$



$X^i(t) = X((i-1)ds, t)$  ( $i=1$  à  $N$ ) sont les  $N$  points choisis.

On utilise alors sur cette discrétisation un schéma spatial de différences finies en approximant les dérivées premières en un point  $i$  par :

$$\frac{\partial a}{\partial x}(X^i) \approx \frac{a(X^{i+1}) - a(X^{i-1})}{2 ds}$$

et les dérivées secondes par:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(X^i) \approx \frac{a(X^{i+1}) - 2a(X^i) + a(X^{i-1}))}{ds^2}$$

Les intégrales spatiales sont calculées par la méthode des trapèzes.

Soit  $\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi}$ , nous allons présenter la méthode de résolution sur l'équation simplifiée:

$$X_{,t} = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) K \vec{b} = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{X_s \wedge X_{ss}}{|X_s|^3}$$

avec  $X(t,0) = X(t,2\pi)$

Pour  $i = 2, \dots, N-1$  l'équation discrétisée devient:

$$X_{,t}^i = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left[ \frac{X^{i+1} - X^{i-1}}{2 ds} \wedge \frac{X^{i+1} - 2X^i + X^{i-1}}{ds^2} \right] / \left| \frac{X^{i+1} - X^{i-1}}{2 ds} \right|^3$$

D'où  $N-2$  relations.

Pour  $i = 1$ :

$$X_{,t}^1 = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left[ \frac{X^2 - X^N}{2 ds} \wedge \frac{X^2 - 2X^1 + X^N}{ds^2} \right] / \left| \frac{X^2 - X^N}{2 ds} \right|^3$$

Pour  $i = N$ :

$$X_{,t}^N = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left[ \frac{X^1 - X^{N-1}}{2 ds} \wedge \frac{X^1 - 2X^N + X^{N-1}}{ds^2} \right] / \left| \frac{X^1 - X^{N-1}}{2 ds} \right|^3$$

On a donc un système différentiel en temps de  $N$  équations et de  $N$  fonctions inconnues.

### 53 Discrétisation temporelle:

On discrétise l'opérateur  $X_{,t}^i$  par une méthode d'Euler:

$$dt \quad est \quad le \quad pas \quad de \quad temps .$$

$$X_{,t}^i = \frac{X^{i,k+1} - X^{i,k}}{dt} \quad \text{où } t = (k+1) dt.$$

Les intégrales temporelles sont calculées par la méthode des trapèzes.

Suivant que l'on prenne le deuxième membre des équations différentielles au temps  $k \, dt$  ou au temps  $(k+1) \, dt$ , on a un schéma dit explicite ou dit implicite.

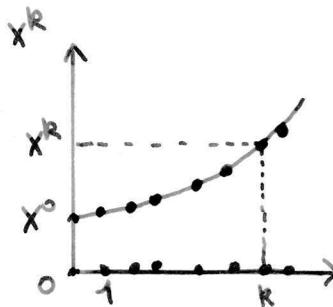
Pour l'équation simplifiée, on a:

$$\frac{X^{i,k+1} - X^{i,k}}{dt} = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\left[ \frac{X^{i+1,*} - X^{i-1,*}}{2 \, ds} \wedge \frac{X^{i+1,*} - 2 X^{i,*} + X^{i-1,*}}{ds^2} \right]}{\left| \frac{X^{i+1,*} - X^{i-1,*}}{2 \, ds} \right|^3}$$

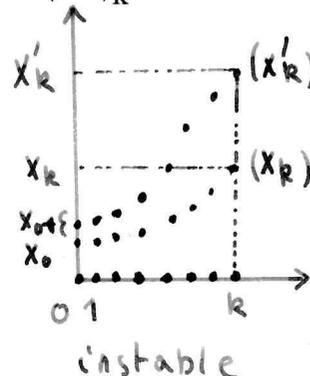
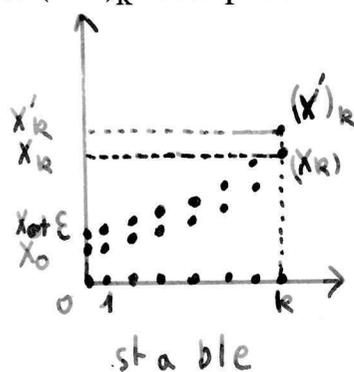
si  $* = k$  : le schéma est explicite

si  $* = k+1$  : le schéma est implicite

La discrétisation en temps entraîne l'apparition d'une suite  $X^k$  qui discrétise l'évolution dans le temps. Le premier terme  $X^0$  de la suite est déterminé par la condition initiale.



Le procédé récursif de la suite est dit stable si, lorsque l'on perturbe faiblement la valeur initiale :  $X'_0 = X_0 + \varepsilon$ , la nouvelle suite  $(X'_k)$  reste proche de la suite  $(X_k)$  de valeur initiale  $X_0$ .



Un schéma numérique est dit stable si son procédé récursif l'est. Il faut que le schéma numérique soit stable car l'informatique utilise des nombres tronqués (nombre fini de chiffres) et donc entraîne des perturbations à chaque pas de l'itération.

Remarque: la stabilité définie ci-dessus est l'analogie de la stabilité des équations différentielles ou aux dérivées partielles vis à vis de leurs conditions initiales. Si le procédé récursif est non linéaire, il faut faire une étude linéaire de la stabilité comme on fait d'habitude pour les équations différentielles.

On ne fera pas l'étude de stabilité ici. Comme les schémas numériques implicites sont généralement plus stables que les schémas explicites, on choisit d'utiliser un schéma implicite.

Il faut alors résoudre un système d'équations non linéaires. On le fait par une méthode itérative de recherche de zéro. Sur l'équation simplifiée cela donne:

$$X_{j=0}^i = X^{i,k}$$

$$\frac{X_{j+1}^i - X^{i,k}}{dt} = \alpha \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\left[ \frac{X_j^{i+1} - X_j^{i-1}}{2 ds} \wedge \frac{X_j^{i+1} - 2 X_j^i + X_j^{i-1}}{ds^2} \right]}{\left| \frac{X_j^{i+1} - X_j^{i-1}}{2 ds} \right|^3} \quad (1)$$

On a donc une suite  $X_j$  que l'on itère jusqu'à avoir convergence.

La limite obtenue est le zéro cherché:  $X^{i,k+1}$ .

Cette résolution est de type Jacobi: on calcule  $X_{j+1}$  à partir de  $X_j$ . Dans notre programme, on a utilisé une méthode de type Gauss-Seidel qui est une variante de la précédente: lorsque l'on a

$X_j$ , on calcule  $X_{j+1}^1$  à l'aide de (1) puis on fait l'affectation

$X_j^1 := X_{j+1}^1$ , puis on continue avec  $X_{j+1}^2$  et ainsi de suite jusqu'à N. Cette méthode a l'avantage d'accélérer la convergence.

#### 54 Algorithmes et programmes:

On se sert de trois programmes:

+ initial.f:

C'est un programme fortran qui crée une configuration de profils initiaux d'anneaux tourbillons et la range dans le fichier profil.dat.

+ pmultianneaux.f:

C'est aussi un programme fortran. Il utilise les données du fichier profil.dat pour déterminer les différents anneaux de la configuration initiale., puis il calcule l'évolution des anneaux et enregistre dans le fichier pass.m un certain nombre de configurations d'évolution trouvées.

+ xpdessin.m:

C'est un programme matlab qui charge les données du fichier pass.m et fait divers représentations graphiques des configurations d'évolution obtenues.

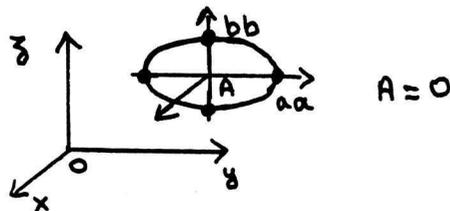
Il faut noter que l'obtention de l'état actuel de ces trois programmes est le résultat d'une incessante amélioration pour n'avoir que trois programmes généraux valables pour n'importe quels profils initiaux et n'importe quel nombre de ceux-ci. Avant d'arriver à cette situation, on est passé par des programmes plus restrictifs et différents suivant les profils ou le nombre d'anneaux.

Il faut avoir un peu cette vision à l'esprit pour profiter pleinement de la commodité d'emploi, de structuration et de lecture facile, qu'apporte la situation actuelle.

Les programmes, leurs algorithmes, ainsi que l'explication de leurs procédures sont donnés dans les annexes 9 à 13.

## 6 Exemples de résultats de simulation:

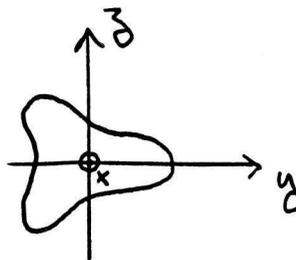
Dans ce chapitre, on a mis les résultats d'évolution d'une ellipse et d'un trefle de vorticité.



L'ellipse est dans un plan, son grand axe est :  $aa=2$ , son petit axe :  $bb=1.5$ . On a choisit  $\Gamma=5$   $\epsilon=0.03$  et  $\tau_{20}=1$ . On observe une progression de l'ellipse selon l'axe des x et une oscillation de celle-ci avec une demi-période (inversion entre petit et grand axe) de 4.5 et une période de 12. On retrouve donc les résultats de Ting. La période n'est pas le double de la demi-période à cause de la diffusion visqueuse.

L'unité de la période est déterminée par le choix de l'unité de longueur sur le profil initial et le choix de l'unité de la circulation  $\Gamma$ . Si on considère que  $aa= 2$  cm et que  $\Gamma=5$  cm/s alors la période est en secondes.

On trouve les graphiques dans les pages suivantes. Les résultats en blanc sur fond noir sont les graphiques obtenus avec le logiciel Explorer sur station SiliconGraphics.



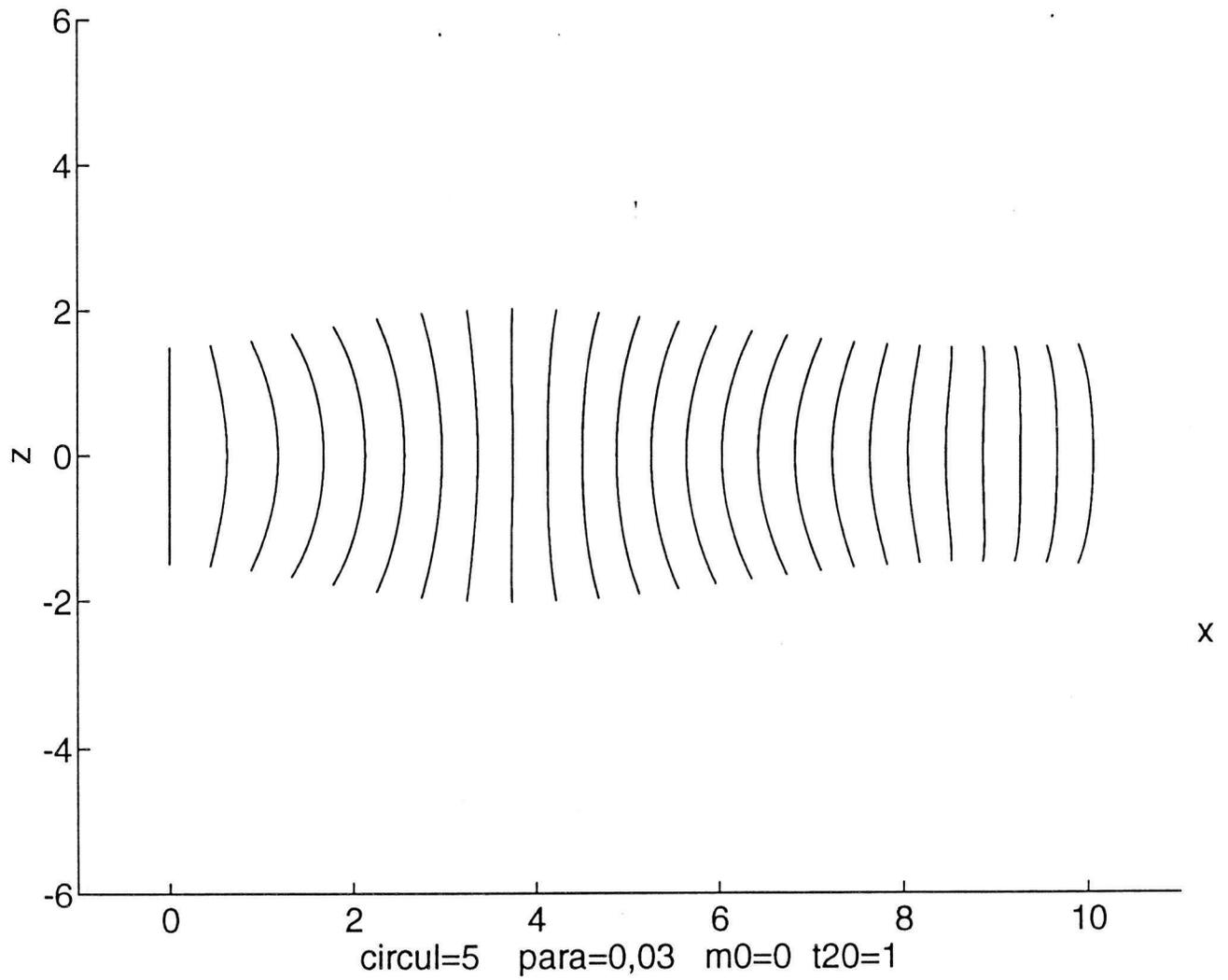
Le trefle est aussi un profil plan . Il a pour equation polaire:

$$r = 6 ( 1 + 0.025 * \cos ( 3 \theta ) )$$

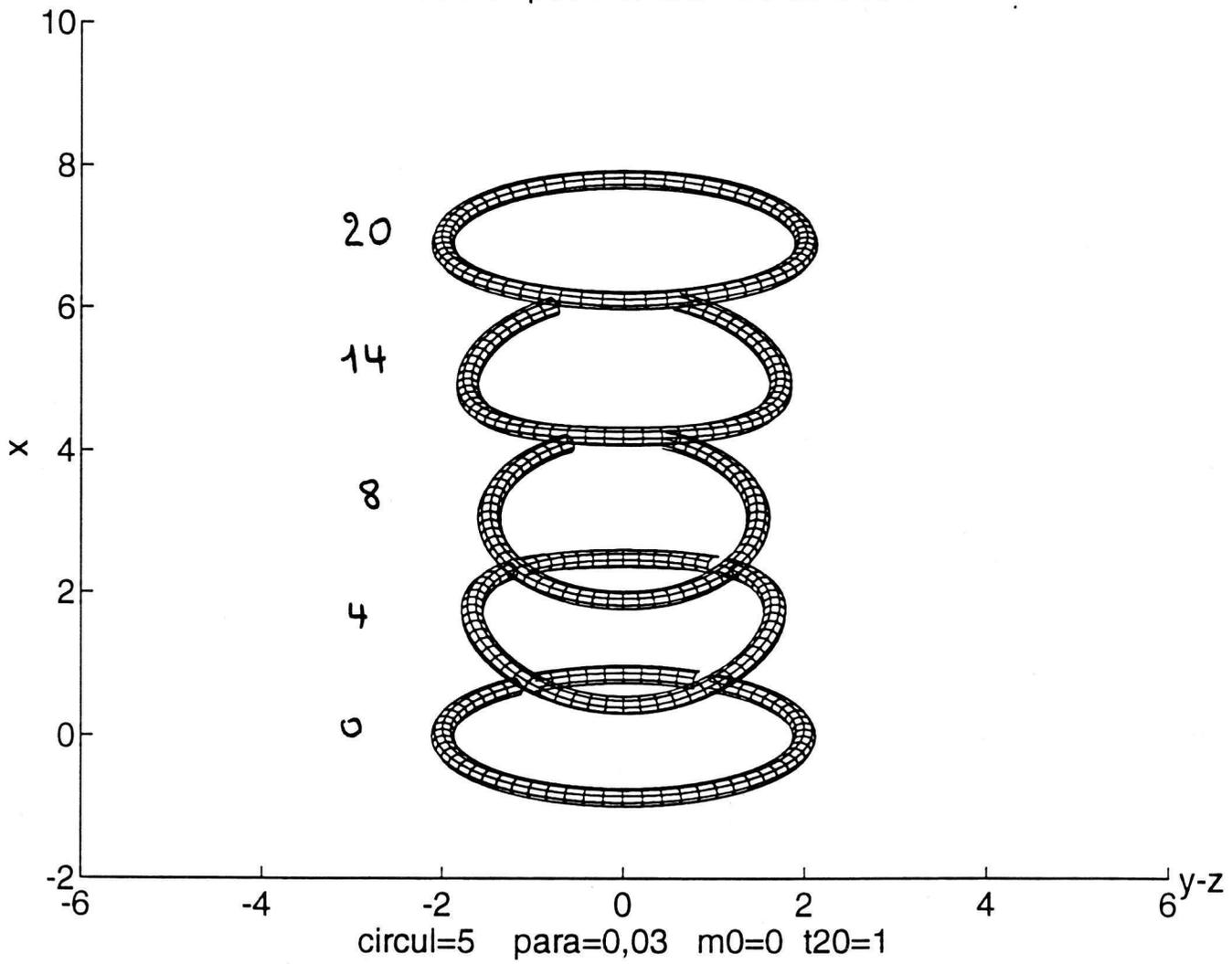
On a choisit  $\Gamma=5$   $\epsilon=0.03$  et  $\tau_{20}=1$ . On observe une inversion du trefle initial au temps  $t=14$ . On trouve les graphiques dans les pages suivantes.

La totalité des résultats graphiques des simulations sont donnés à l'annexe 14.

vue de l' ellipse :  $a=2$   $b=1.5$   $dt=58e-2$

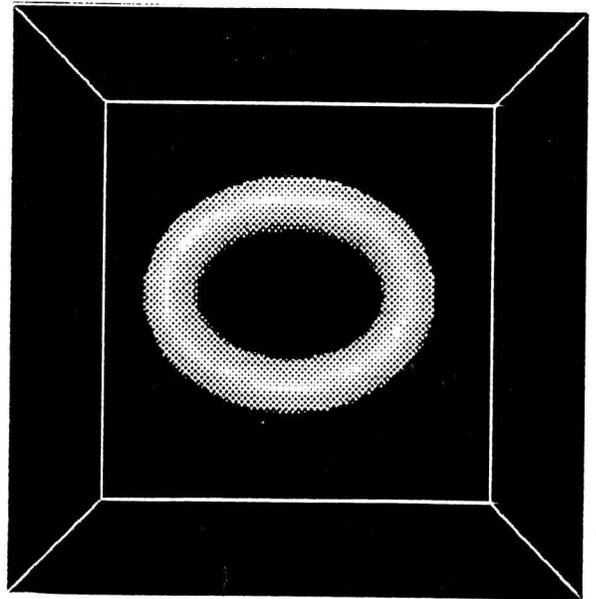
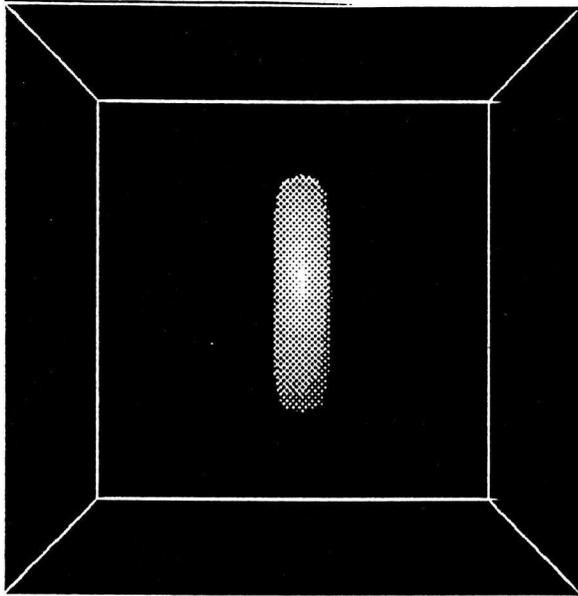


vues de l' ellipse : a=2 b=1.5 dt=58e-2

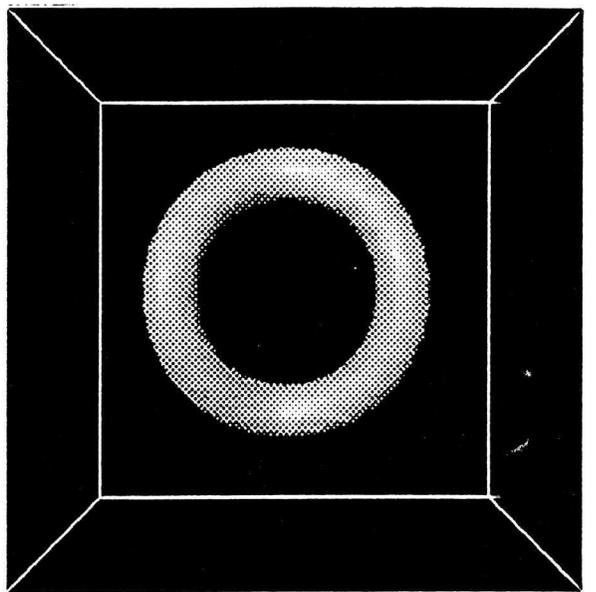
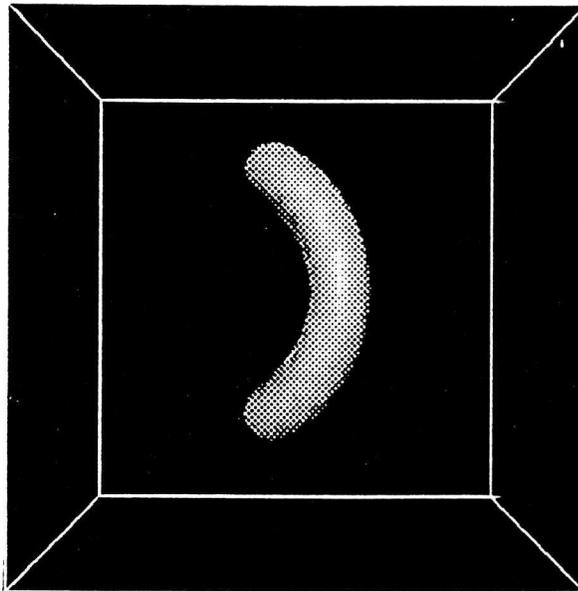


vue de gauche

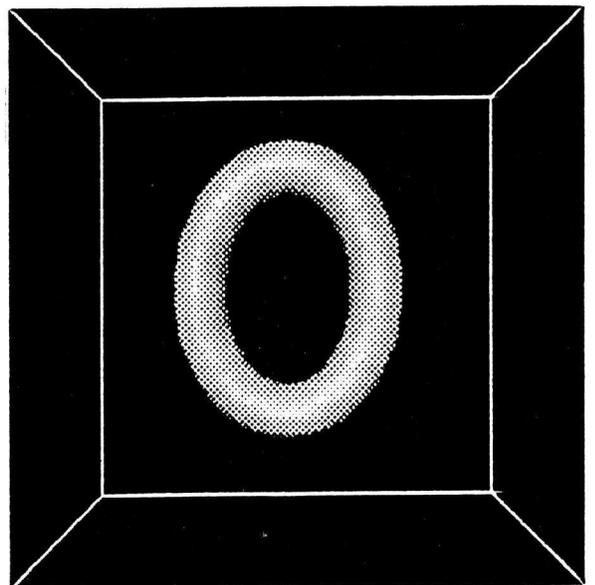
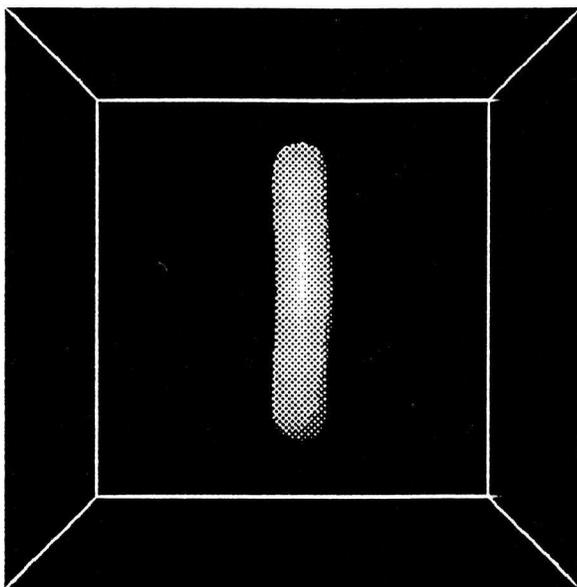
vue de droite



configuration 0

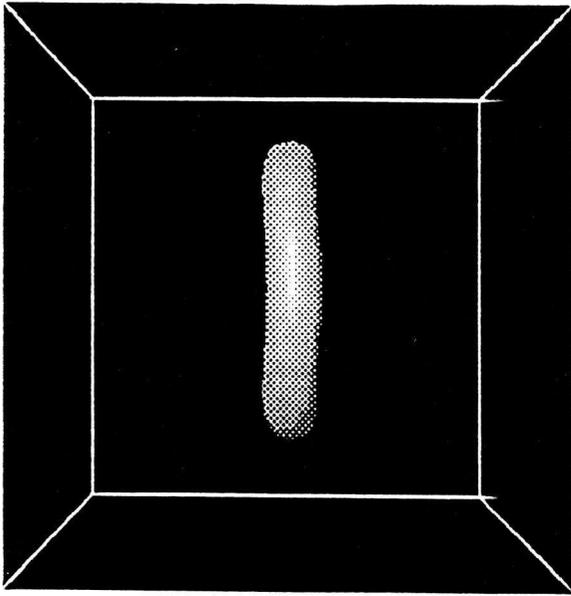


configuration 4

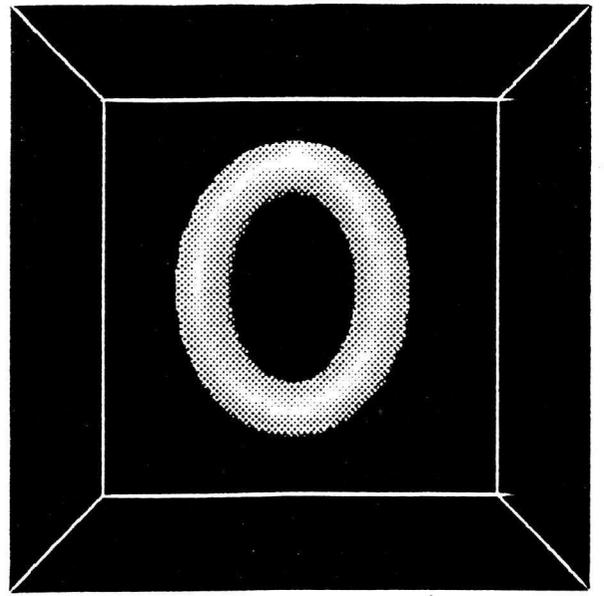


configuration 8

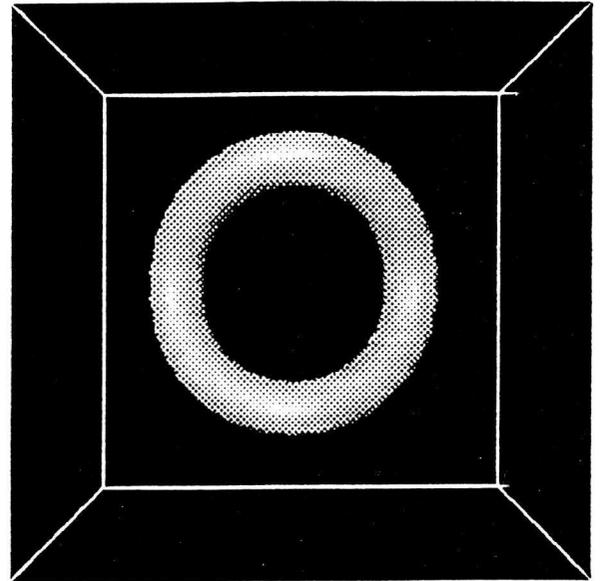
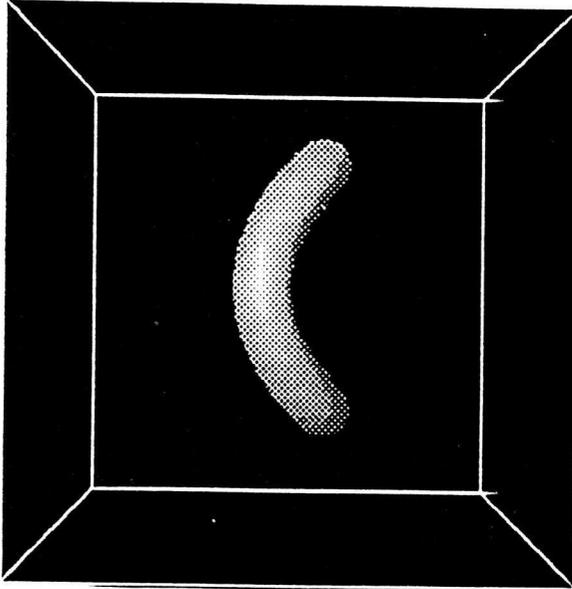
vue de gauche



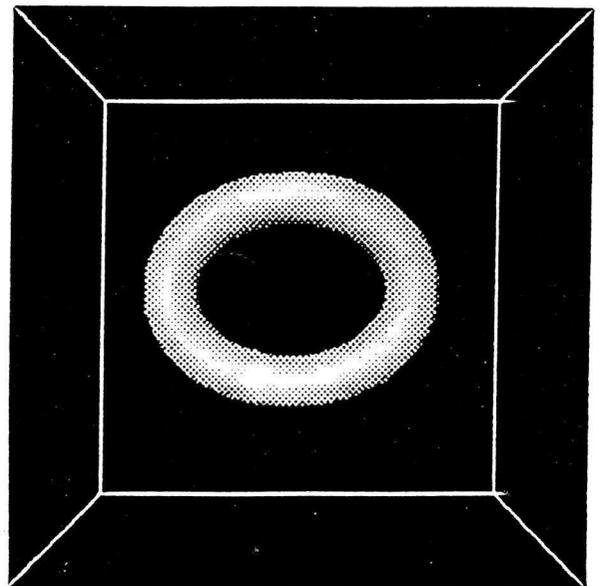
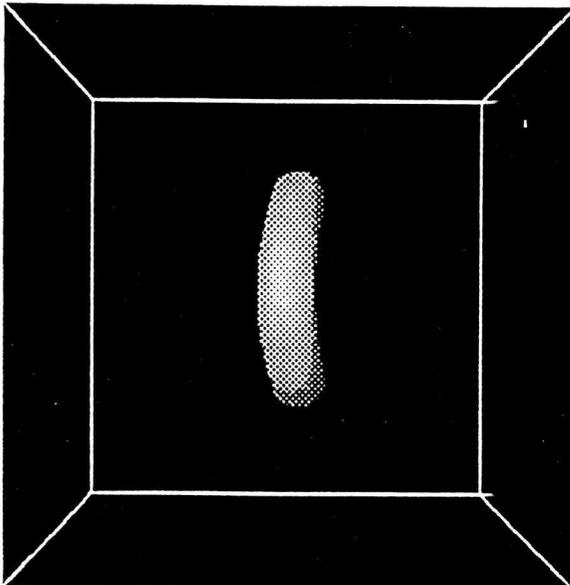
vue de droite



configuration 8

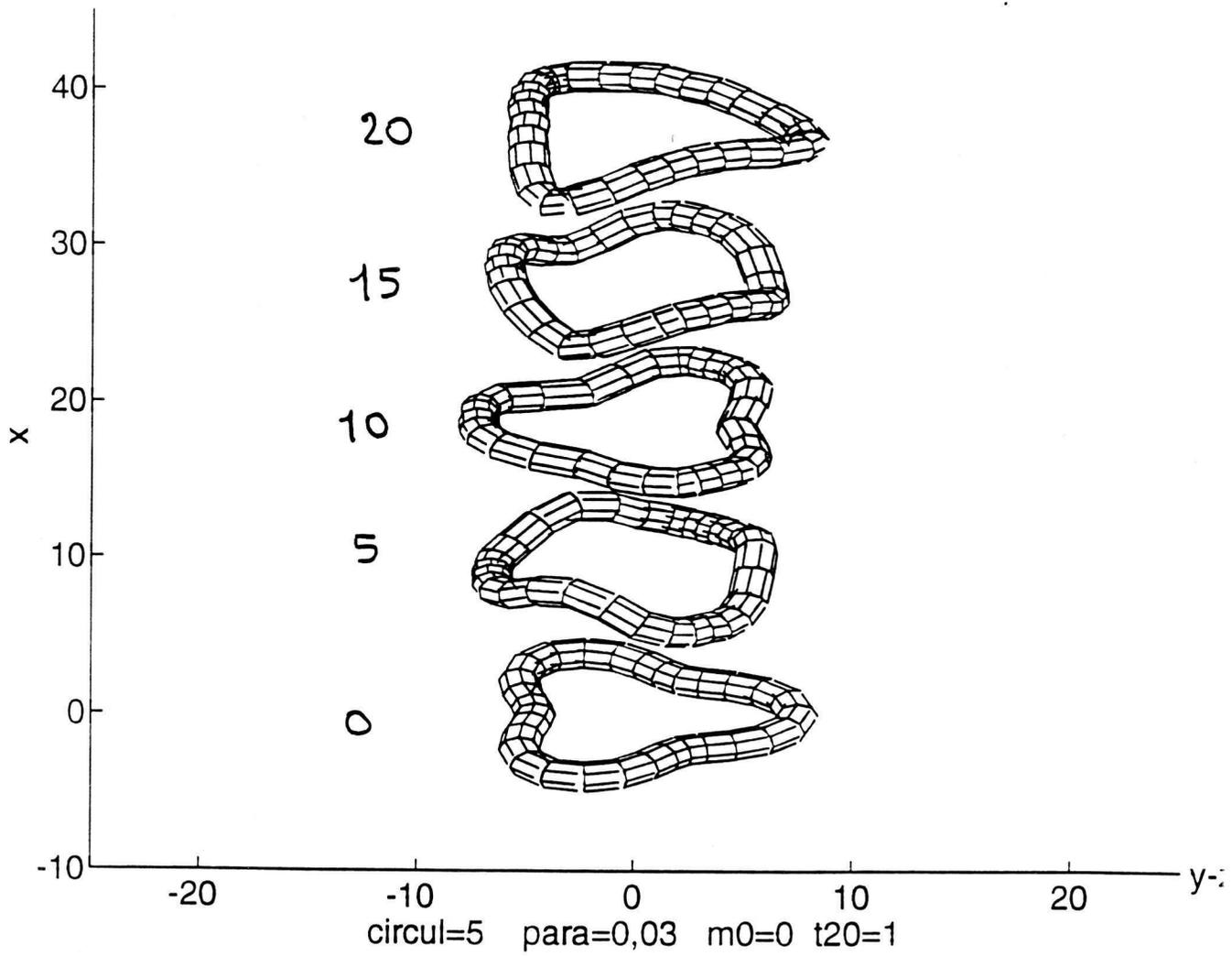


configuration 14

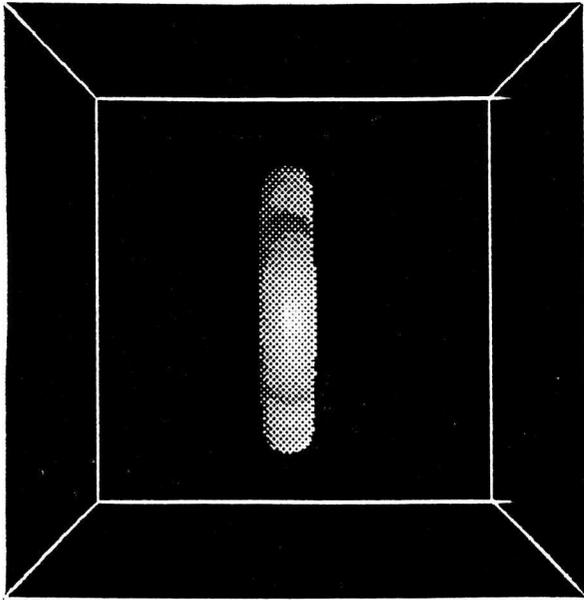


configuration 20

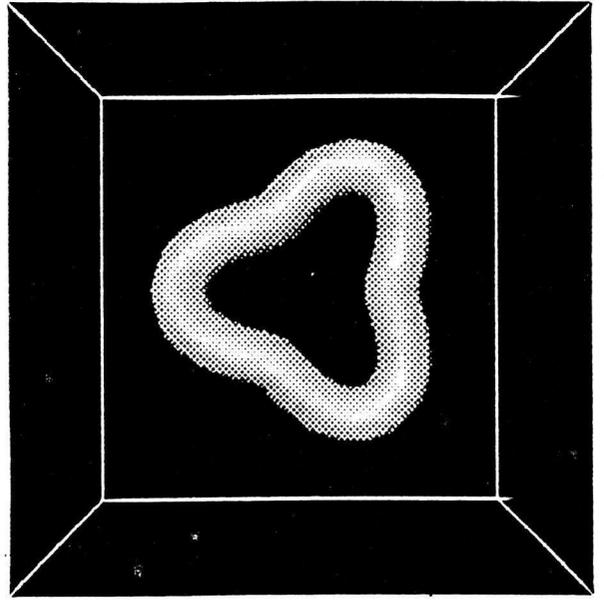
vues de trefle : dt=2.5



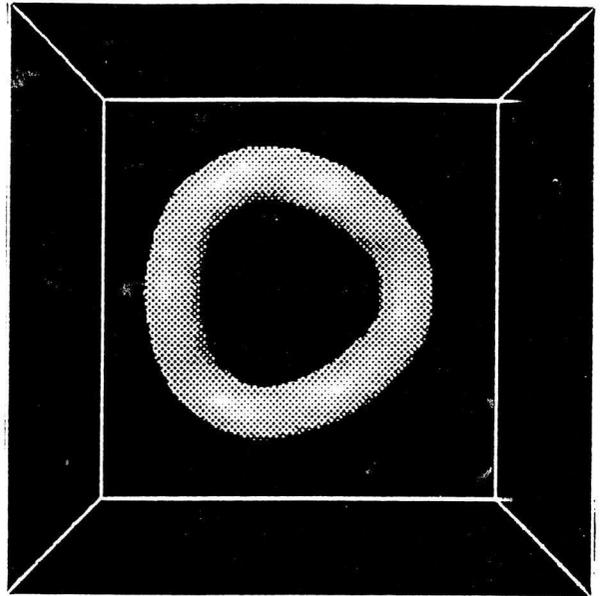
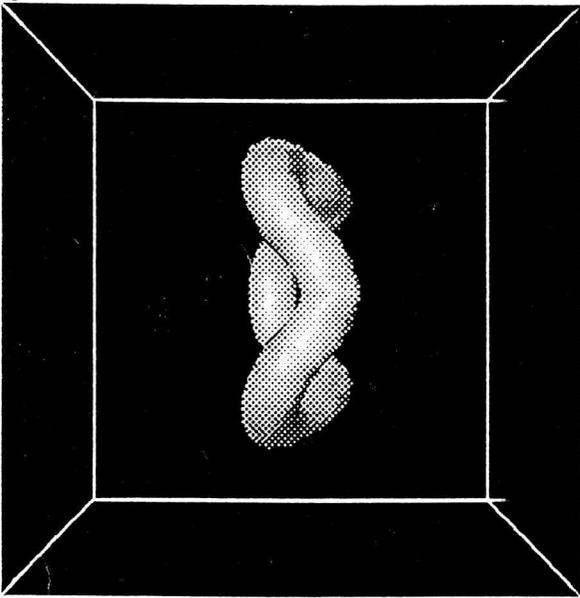
vue de gauche



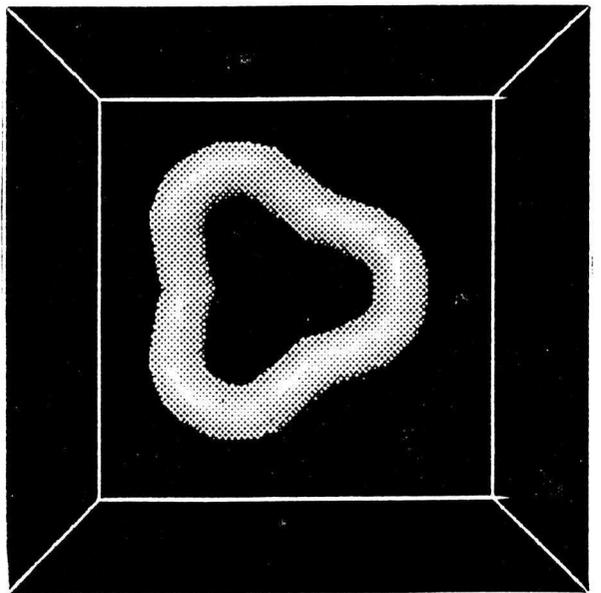
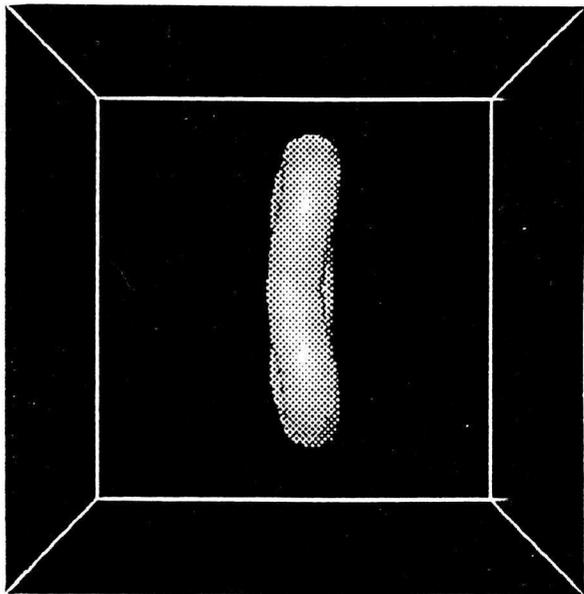
vue de droite



configuration 0



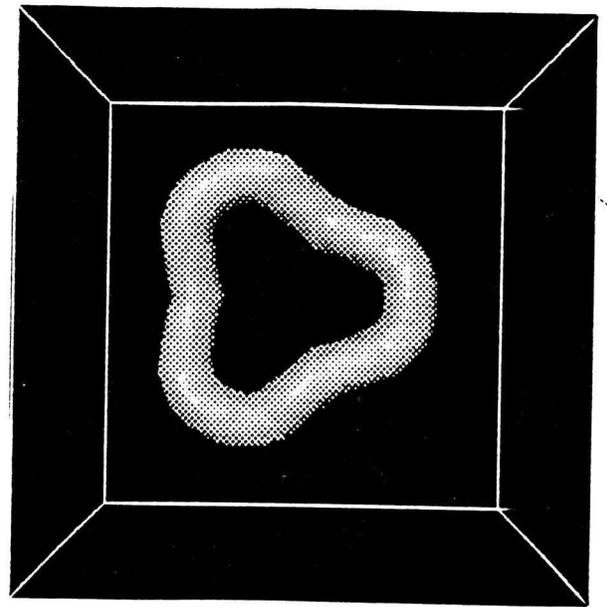
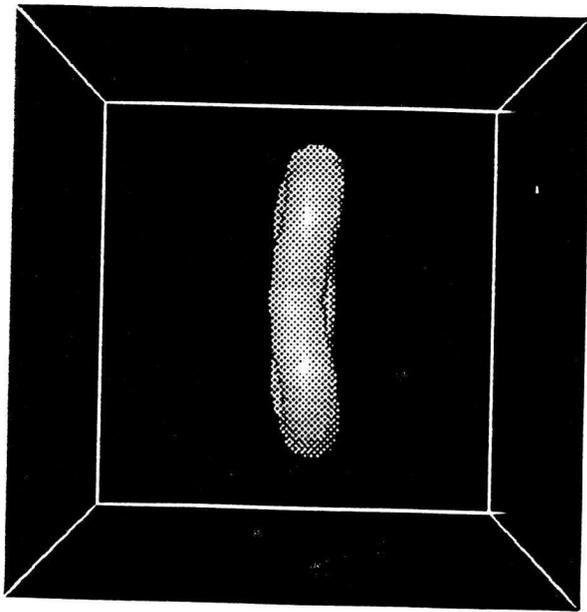
configuration 5



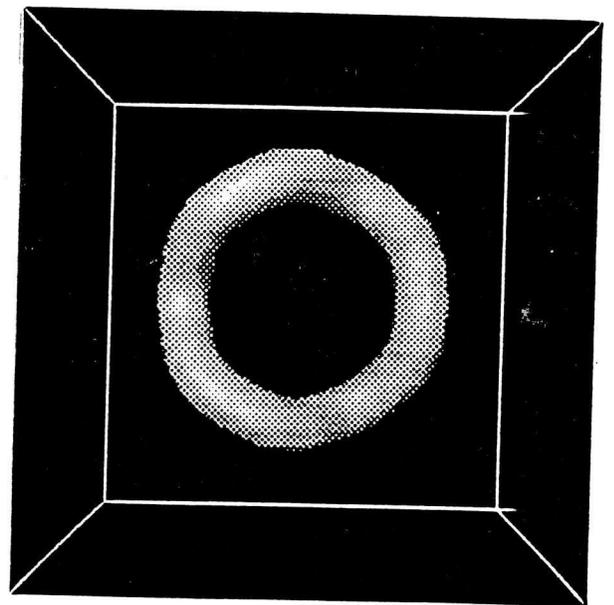
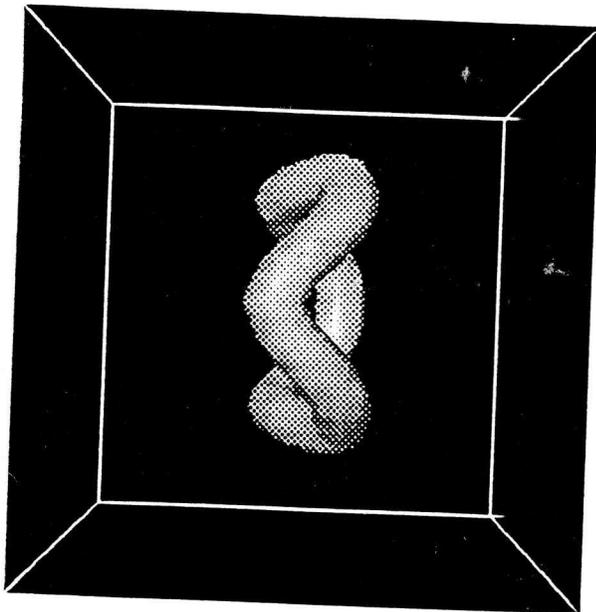
configuration 10

vue de gauche

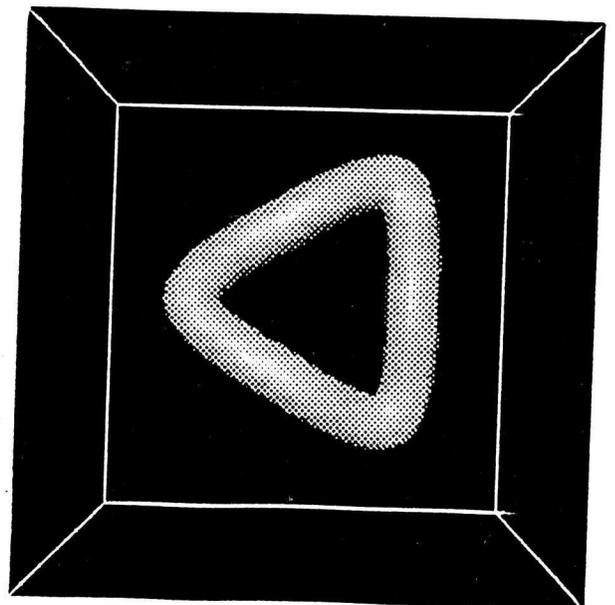
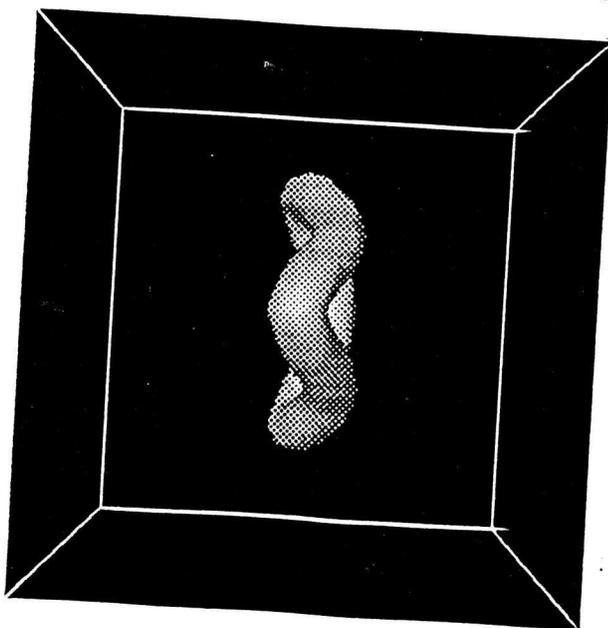
vue de droite



configuration 10



configuration 15



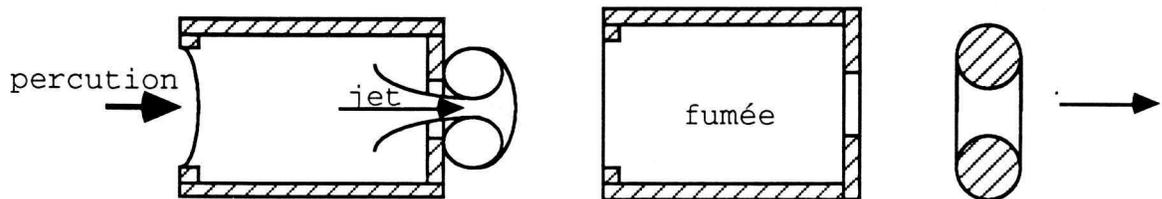
configuration 20

## 7 Approche expérimentale d'anneaux tourbillons:

Des anneaux tourbillons peuvent être réalisés expérimentalement. C'est le phénomène bien connu d'anneaux des fumeurs.

### *71 Dispositif de formation:*

On utilise une boite de "Tait":

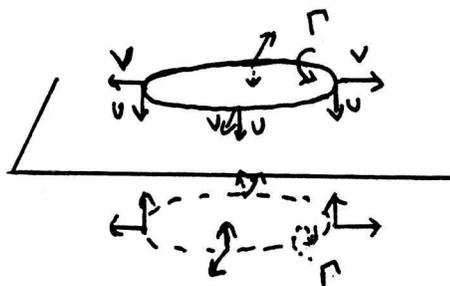


Dans une boîte percée d'un trou sur une face, et possédant une membrane (ou un piston) sur la face opposée, on met du colorant. On expulse le colorant en un jet limité en percutant la membrane. Le jet s'enroule alors en un anneau tourbillon coloré. C'est par ce même procédé que les fumeurs arrivent de créer des anneaux de fumée par expulsion de la fumée qui était dans leur bouche.

C'est un procédé avantageux de formation d'anneaux tourbillons. On peut en effet avoir des vitesses variées d'anneaux, créer deux anneaux successivement, ainsi que des anneaux de forme elliptique si le trou est de forme elliptique.

La boîte qui a été construite a été conçue pour changer facilement de profil et crée des anneaux de 1 cm de diamètre. Avec une boîte plus grosse, on a réussi de faire des anneaux de 6 cm de diamètre.

### *72 Rencontre d'un anneau circulaire et d'un plan:*



On observe bien un élargissement de l'anneau lors de la rencontre avec le plan comme le prévoyait la méthode des images. Cependant, pour cela, il ne faut pas que l'anneau entre trop vite en collision avec le plan car on observe alors une destruction de l'anneau sans voir d'élargissement.

*73 Formation d'un anneau elliptique:*

Avec un trou en forme d'ellipse, on forme un anneau elliptique qui se déplace en oscillant.

## CONCLUSION

On a présenté, au début de ce rapport, le calcul de l'anneau de vorticité par la méthode asymptotique de Ting, pour laquelle on a du redériver un certain nombre d'intermédiaires de calcul qui n'ont pas été mis par Ting dans son ouvrage (1).

Cette étape était nécessaire pour bien apprécier le système intégrodifférentiel d'équations finales et pour pouvoir corriger les quelques erreurs que l'on a décelées et que l'on a répertoriées dans l'annexe 8.

Il a été alors possible de programmer une résolution numérique de ce système d'équations et d'obtenir une simulation numérique de l'évolution d'un ou plusieurs anneaux tourbillons ainsi qu'une visualisation graphique des résultats.

Expérimentalement, on a créé des anneaux elliptiques qui oscillent.

## BIBLIOGRAPHIE

### calculs analytiques:

- (1) Ting Viscous Vortical Flows.  
Springer-Verlag, New York, 1991
- (2) Sédov Mécanique des Milieux Continus  
éditions mir
- (3) J.Bass Cours de Mathématique tome 1  
fascicule 1 Ch VI Algèbre tensorielle  
fascicule 2 Ch XX Coordonnées Curvilignes  
Ch XXI Champs de tenseurs
- (4) Encyclopédie Universalis Variétés différentiables  
Tensoriel (calcul)
- (5) Pham.Mau.Quan Introduction à la géométrie des Variétés  
Différentiables
- (6) Bonnet Théorie de la dynamique des fluides: aérodynamique

### calculs numériques:

- (7) Jean Legras Méthodes et techniques de l'analyse numérique  
Dunod 1971
- (8) J. L. Lions Cours d'Analyse Numérique  
(cours de l'école polytechnique)  
Hermann 1972
- (9) Liu, Tavantzis et Ting  
Numérical Studies of Motion of Vortex Filaments  
Implementing the Asymptotic analysis  
AIAA Paper 84-1542 June 1984
- (10) Liu, Tavantzis et Ting  
Numérical Studies of Motion and Decay of Vortex  
Filaments.  
AIAA Journal Vol24 No8 p1290 August 1986
- (11) Kida, Takawka, Hussain  
Reconnection of two vortex rings  
Phys.Fluids A1,630-632 1989

Expériences:

(12) Oshima and Izutsu

Cross-linking of two vortex rings

Phys.Fluids 31,2401-2403 1988

(13) An Album of Fluid Motion

Physics of fluids 21, 292-294 1978

(14) Maxworthy

Some Experimental Studies of Vortex Ring

J. Fluid Mech 81, 465-495 1977

## Plan des ANNEXES

- 1 Le Problème intérieur et les équations dans le système de coordonnées curvilignes.
- 2 Le Problème extérieur et son développement limité en  $r=0$
- 3 Développement asymptotique de la ligne centrale de l'anneau
- 4 Résolution des équations données par le premier ordre.  
Partie antisymétrique de la solution.
- 5 Équations du deuxième ordre. Équations de Compatibilité.
- 6 Calculs divers -Expression de  $C\omega(t)$  et  $Cv(t)$
- 7 Passage d'un paramétrage sans  $\sigma$  à un paramétrage avec  $\sigma$ .
- 8 Erratum
- 9 Description des Algorithmes des différents programmes.
- 10 Les variables du programme pmultianneaux.f
- 11 Description des routines et du programme principal du fichier pmultianneaux.f
- 12 Validation du programme-Influence des paramètres- Valeurs de convergence
- 13 Visualisation graphique-Description des routines et du programme principal du fichier xpdessin.m
- 14 Résultats graphiques de simulations numériques
- 15 Listing des programmes.