Annexe 7

Passage d'un paramétrage sans σ à un paramétrage avec σ

Les calculs des annexes précédents ont été effectués avec un paramétrage d'abscisse curviligne s_0 tel que $\overrightarrow{X}_{s_0} = \overrightarrow{\tau}$, c'est à dire $\sigma = |\overrightarrow{X}_{s_0}| = 1$. On va écrire les formules obtenues sur un paramétrage plus général s tel que :

$$\overrightarrow{X}(0, s+2\pi) = X(0, s) \text{ et } -\pi \leq s \leq \pi$$

Tout ceci consiste à considérer le changement de variables $s_0 = f(s)$. On va faire des dérivées composées et la fonction qui interviendra dans les calculs est la fonction dérivée f' que l'on note $\sigma = f' = \frac{\partial s_0}{\partial s}$.

1 Formules de Frenet :

$\boxed{X(s_0) = X(\sigma s) = X^*(s) = X^*\left(\frac{s_0}{\sigma}\right)}$ $X \to X^*$

$$\overrightarrow{X}_{s_0}(s_0) = \overrightarrow{\tau}(s_0) \text{ donne } \overrightarrow{X}^*_s(s) = \overrightarrow{X}_{s_0} \frac{\partial s_0}{\partial s} = \sigma \overrightarrow{X}_{s_0}(s_0) = \sigma \overrightarrow{\tau}(s_0)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{\tau}^*(s) = \overrightarrow{\tau}(s_0)$.

On a donc $\sigma = |\overrightarrow{X}^*_s|$.

$$\overrightarrow{\tau}_{s_0} = K\overrightarrow{n}(s_0) \text{ donne } \overrightarrow{\tau}^*_s = \sigma K(s_0) \overrightarrow{n}(s_0)$$

$\to \overrightarrow{n}^*(s) = \overrightarrow{n}(s_0)$ $K^*(s) = K(s_0)$

$$\overrightarrow{X}_{s_0} \wedge \overrightarrow{X}_{s_0 s_0} = K\overrightarrow{b} \text{ donne } \overrightarrow{X}^*_s \wedge \overrightarrow{X}^*_{ss} = \overrightarrow{X}_{s_0} \frac{\partial s_0}{\partial s} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{X}^*_s}{\partial s}$$

$$= \sigma \overrightarrow{X}_{s_0} \wedge \frac{\partial \sigma \overrightarrow{\tau}}{\partial s}$$

$$= \sigma \quad \overrightarrow{\tau} \wedge (\sigma' \overrightarrow{\tau} + \sigma^2 K \overrightarrow{n})$$

$$= \sigma^3 K^* \overrightarrow{b}^*(s)$$

$\overrightarrow{b}^*(s) = \overrightarrow{b}(s_0)$

$\overrightarrow{b}_{s_0} = -T(s_0)\, \overrightarrow{n}(s_0)$

donne $\overrightarrow{b}^*_s = \frac{\partial \overrightarrow{b}(s_0)}{\partial s} = -\sigma T(s_0)\, \overrightarrow{n}^*(s)$

$\hookrightarrow T(s_0) = T^*(s)$

$$T = -\frac{\partial \overrightarrow{b}}{\partial s_0} \cdot \overrightarrow{n} \text{ donne } T^* = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \overrightarrow{b}^*}{\partial s} \cdot \overrightarrow{n}^*.$$

2 Partie régulière de l'intégrale de Biot et Savart :

On a : $Q_f^{(s_0)} = \dfrac{\Gamma}{4\pi}\left\{ \displaystyle\int_{-s^-}^{s^+} G_0(t, s_0+\bar{s}_0, s_0)\, d\bar{s}_0 + \left[\ln 2\sqrt{s^+ s^-} - 1\right] \kappa \vec{b} \right\}$

où $G_0(t, s_0', s_0) = F_0(t, s_0', s_0) - \dfrac{\kappa}{2}\vec{b} / |\bar{s}_0|$ si $s_0' \neq s_0$

$$= \frac{\vec{\tau} \wedge \vec{B}_0}{3} \operatorname{sgn}(s_0' - s_0) \quad \text{si} \quad s_0' = s_0 \pm 0$$

et $F_0(t, s_0', s_0) = \dfrac{X(t,s_0') - X(t,s_0)}{|X(t,s_0') - X(t,s_0)|^3} \wedge X_{s_0}(t, s_0')$

$$B_0(t, s_0) = \vec{\tau}_{s_0 s_0} = \cancel{-\kappa^2 \vec{\tau}} + \frac{\partial \kappa}{\partial s_0}\vec{n} + \kappa T \vec{b}$$

$$\vec{X}(0, s_0 + S) = \vec{X}(0, s_0) \quad \text{et} \quad -s^- \leq s_0 \leq s^+ \qquad S = s^+ + s^-$$

On fait le changement de variable : $d\bar{s}_0 = \sigma(\bar{s})\, d\bar{s}$

$$\int_{-s^-}^{s^+} G_0(t, s_0 + \bar{s}_0, s_0)\, d\bar{s}_0 = \int_{-\pi}^{\pi} G(t, s+\bar{s}, s)\, d\bar{s}$$

avec $G(t, s+\bar{s}, s) = \sigma(\bar{s})\, G_0(t, s_0 + \bar{s}_0, s_0)$

On :

$$F_0(t, s_0', s_0) = \frac{X(t,s') - X(t,s)}{|X(t,s') - X(t,s)|^3} \wedge X_s(t, s') \frac{1}{\sigma(s')}$$

$$B_0(t, s_0) = \frac{\partial \kappa}{\partial s} \frac{1}{\sigma(s)} \vec{n} + \kappa T \vec{b}$$

$$\operatorname{sgn}(s_0' - s_0) = \operatorname{sgn}(s' - s) \qquad s^+ = \int_0^{s^+} ds_0 = \int_0^{\pi} \sigma(s)\, ds \qquad s^- = \int_{-\pi}^{0} \sigma(s)\, ds$$

$$\frac{1}{|\bar{s}_0|} = \frac{1}{|s_0' - s_0|} = \frac{1}{\left|\int_{s_0}^{s_0'} ds_0^*\right|} = \frac{1}{\left|\int_{F(s)}^{F(s')} ds_0^*\right|} = \frac{1}{\left|\int_{s}^{s'} \sigma(s^*)\, ds^*\right|}$$

On a donc :

$$Q^f(t,s) = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} G(t, s+\bar{s}, s)\, d\bar{s} + \left[\ln\left(2\sqrt{s^+ s^-}\right) - 1\right] K \vec{b}\right]$$

$$\text{où } G(t,s',s) = F(t,s',s) - \frac{K(s)}{2}\, \vec{b}(s)\, \frac{\boxed{\sigma(s')}}{|\lambda(s',s)|} \qquad (s' \neq s)$$

$$= \frac{\vec{T}(s) \wedge \vec{B}(s)}{3}\, \mathrm{sgn}(s'-s)\, \boxed{\sigma(s')} \qquad (s' = s \pm 0)$$

avec :

$$F(t,s',s) = \frac{X(t,s') - X(t,s)}{|X(t,s') - X(t,s)|^3} \wedge X_s(t,s')$$

$$\lambda(t,s',s) = \int_{s}^{s'} \sigma(t,s^*)\, d s^*$$

$$B(s) = \frac{\partial K(s)}{\partial s}\, \frac{\vec{n}(s)}{\boxed{\sigma(s)}} + K T\, \vec{b}(s).$$

On a donc exprimé nos formules sur le nouveau paramétrage <u>en s</u>.

Annexe 8

Erratum

On a constaté un certain nombre d'erreurs dans certaines formules du livre de Ting [1] ainsi que dans la publication de l'AIAA journal [10]. Cette annexe sert à les signaler pour rendre ces articles encore plus utilisables.

1 Livre de Ting [1] :

(A.320) C'est $[S(t)]^3$ et non $[S(0)]^3$

(2.3.34) p87 $v_s^{(0)} \equiv 0 \iff \omega_s^{(0)} \equiv 0$

p 91 $\bar{\nu}/UL = \nu/UL\varepsilon^2 = O(1)$

p 86 Following the standard one-time analysis

(2.3.83) p98 C'est $S(0)$ dans l'expression et non $S^{(0)}(t)$.

(A 3.22) Dans les expressions de C_n et D_n, les termes sont à la puissance $(n+1)$

2 Publication AIAA Journal [10]

(5) C'est $+\dfrac{\Gamma\, C\omega(t)}{4\pi R}\vec{b}$

$D_0 = 1/4\pi$ $\quad C_0 = S_0^2\, M_0/(4\pi\Gamma\varepsilon)$

(22a) C'est $+8\pi^2 \sum_{n=2}^{N} \gamma_n \tau_1^{-n}$

(21a) C'est $-\ln \dfrac{1}{\sqrt{4\Gamma\tau_2}}$

3 Appendice A3 de [1] et Publication [10] :

(A.3.8) $$F(s', s, t) = \frac{X(s',t) - X(s,t)}{|X(s',t) - X(s,t)|^3} \wedge X_s(s', t)$$

(A.3.22) et (A.3.23) : c'est $(r_{10})^{n+1}$ et non $(r_{20}/s_0)^{n+1}$

(A.3.20) C'est $C_\omega = -\dfrac{16\pi^2}{r\, s^3 r_1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} r_1^{-n}(t)\,\omega_n$

(A.2.18) $\alpha_n = D_n \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_{nj} \left(1-\frac{1}{2^j}\right)(j-1)!$

$\gamma_h = \displaystyle\sum_{m=1}^{h-1} D_m D_{h-m} \beta_{m,h-m}$

(A.3.21) $P_{n,i} = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} p_{i,j} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(j+k)!/2^{j+k+1}$.

4 Résultats de calculs différents :

+ erreurs dans le changement de paramétrage : des 6 ont été omis.

$$G(t,s',s) = F - \frac{K(s)\,\vec{b}(s)}{2}\,\frac{6(s')}{|\lambda|} \qquad s' \neq s.$$

$$= \frac{\vec{r}(s)\wedge\vec{B}(s)}{3}\,\mathrm{sgn}(s'-s)\;6(s') \qquad s' = s \pm 0.$$

$$B(t,s) = \frac{\partial K}{\partial s}(s)\,\frac{\vec{n}(s)}{6(s)} + K\,T\,\vec{b}$$

+ $G(t,s',s) = F(t,s',s) - \dfrac{K}{2}\,\vec{b}/|\lambda|6$ au lieu de $-2K\,\vec{b}/|\lambda|$.

Or numériquement on a bien vérifié que $-6(s')\dfrac{K}{2}\,\vec{b}/|\lambda|$ compense la fonction F lorsque s' tend vers s alors que $-2K\,\vec{b}/|\lambda|$ ne le peut pas.

$$\lim_{s'\to s} F - \frac{K}{2}\,6(s')\,\vec{b}/|\lambda| = \text{constante}$$

$$\lim_{s'\to s} F - 2K\,\vec{b}\,/|\lambda| \text{ diverge}.$$

non

+ On a un 1 au lieu de 1/2 dans l'expression de $C_v(t)$ d'où finalement $\frac{1}{2}\{2+\cancel{\gamma}-\ln 2\}$ au lieu de $\frac{1}{2}\{1+\cancel{\gamma}-\ln 2\}$. Cependant, on a programmé avec l'expression : $\frac{1}{2}\{1-\gamma-\ln 2\}$.

+ Dans les expressions de C_v et C_w, on a vu qu'on n'a pas tenu compte des termes $\tilde{T}_1^n$ avec $N+1 \leqslant n \leqslant 2N$.