Annexe 6

Calculs divers —

Expressions de $C_\omega(t)$ et $C_\nu(t)$

On regroupe dans cet annexe divers calculs interessants dont le calcul des expressions de $C_\omega(t)$ et $C_\nu(t)$.

1 Calcul de C_o :

$$m(t) = 2\pi \int_0^\infty \bar{r}\, \omega^{(0)}(t,\bar{r})\, d\bar{r}$$

$$m(t)\,.\,S^2(t) = \text{constante} = m(0)\, S_o^2$$

$$C_o = 2\, S_o\, \tau_{10} \int_0^\infty \omega^{(0)}\left(0, \eta\sqrt{4\bar{\nu}\,\tau_{20}}\right) \eta\, d\eta$$

$$\tau_2 = \tau_1/S \qquad \tau_{20} = \tau_{10}/S_o \qquad \bar{r} = \eta\sqrt{4\,\bar{\nu}\,\tau_2}$$

$$C_o = \frac{2\, S_o^2\, \tau_{20}}{4\bar{\nu}\,\tau_{20}} \int_0^\infty \omega^{(0)}(0,\bar{r})\,\bar{r}\, d\bar{r}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{S_o^2}{\bar{\nu}}\, \frac{m(0)}{2\pi} = \frac{S_o^2}{\bar{\nu}}\, \frac{m(0)}{4\pi} \qquad \boxed{C_o = \frac{S_o^2}{\bar{\nu}}\, \frac{m(0)}{4\pi}}$$

2 Calcul de D_o :

$$D_o = \frac{2}{S_o}\, \tau_{10}\, \frac{1}{4\bar{\nu}\,\tau_{20}} \int_0^\infty \varphi^{0}\, \bar{r}\, d\bar{r}$$

$$\Gamma = 2\pi \int_0^\infty \bar{r}\, \varphi^{(0)}(t,\bar{r})\, d\bar{r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{D_o = \frac{1}{4\pi}\, \frac{1}{\bar{\nu}}\, \Gamma}$$

On pose $\dfrac{\delta(t)}{\varepsilon} = \bar{\delta}(t) = \sqrt{4\,\bar{\nu}\,\tau_2}$

3 Calcul de τ_{10}^{ω} optimum :

$$C_1 = 2 S_0 \tau_{10}^{\omega^2} \int_0^\infty \omega^\circ(0, \eta\sqrt{4\bar{\nu}\tau_{20}}) [1-\eta^2]\eta \, d\eta = 0$$

$$\int_0^\infty \omega^\circ(0, \eta\sqrt{4\bar{\nu}\tau_{20}})\eta \, d\eta = \int_0^\infty \omega^\circ(0, \eta\sqrt{4\bar{\nu}\tau_{20}^{\omega}})\eta^3 d\eta$$

$$\frac{C_0}{2 S_0 \tau_{10}^{\omega}} = \frac{1}{4^2 \bar{\nu}^2 \tau_{20}^{\omega^2}} \int_0^\infty \omega^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$\tau_{10}^{\omega} = \frac{2 S_0}{C_0} (S_0^2) \frac{1}{16} \frac{1}{\bar{\nu}^2} \int_0^\infty \omega^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$\tau_{10}^{\omega} = \frac{1}{8} S_0^3 \frac{1}{\bar{\nu}^2} \frac{\bar{\nu} 4\pi}{S_0^2 m(0)} \int_0^\infty \omega^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$\boxed{\tau_{10}^{\omega} = \frac{\pi S(0)}{2\bar{\nu} m(0)} \int_0^\infty \omega^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}}$$

4 Calcul de τ_{10} optimum :

$$D_1 = 2 \frac{\tau_{10}^2}{S_0} \int_0^\infty \vartheta^\circ(0,\bar{r}) [1-\eta^2]\eta \, d\eta$$

$$\int_0^\infty \vartheta^\circ(0,\bar{r})\eta \, d\eta = \int_0^\infty \vartheta^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$\tau_{10} = \frac{2}{D_0} \frac{1}{10\bar{\nu}^2} S_0 \int_0^\infty \vartheta^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$$

$$\boxed{\tau_{10} = \frac{\pi S_0}{\bar{\nu} 2\Gamma} \int_0^\infty \vartheta^\circ(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}}$$

5 Solution similaire :

$\delta_0 = \delta_0^{\omega}$ d'où $\tau_{10}^{\omega} = \tau_{10}$

Il faut donc : $\frac{1}{m(0)} \int_0^\infty \omega(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r} = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \vartheta(0,\bar{r})\bar{r}^3 d\bar{r}$

$\delta_0 = \sqrt{4\nu\tau_{20}}$ et $\tau_{20} = \tau_{10}/S$ d'où $\delta_0^2 = 4\nu \dfrac{\tau_{10}}{S_0}$

$$\boxed{\tau_{10} = \frac{S_0\,\delta_0^2}{4\nu}}$$

Il faut de plus que $\varphi(0)$ et $\omega(0)$ soient tels que :

$$C_n = D_n = 0 \text{ pour } n \geqslant 1.$$

On a alors :

$$\omega^{(0)} = \frac{C_0}{\tau_1 S} e^{-\eta^2} = \frac{m_0 S_0^2}{4\pi \bar{\nu}\tau_1/S}\,\frac{1}{S^2}\, e^{-\eta^2} = \frac{m}{\pi\bar{\delta}^2}\, e^{-(\bar{r}/\bar{\delta})^2}.$$

$$\varphi^{(0)} = \frac{S D_0}{\tau_1} e^{-\eta^2} = \frac{\Gamma}{4\pi\tau_2\bar{\nu}}\, e^{-\eta^2} = \frac{\Gamma}{\pi\bar{\delta}^2}\, e^{-\eta^2} \qquad \eta = \frac{\bar{r}}{\bar{\delta}}$$

$$v^{(0)} = \frac{2\bar{\nu}}{\bar{r}} D_0 (1 - e^{-\eta^2}) = \frac{2\bar{\nu}}{\bar{r}}\,\frac{\Gamma}{4\pi\bar{\nu}}(1 - e^{-\eta^2}) = \frac{\Gamma}{\bar{r}\,2\pi}\left[1 - e^{-\eta^2}\right]$$

Connaissant $m(0)$, Γ et $\delta(0)$, avec ces formules, on a la structure initiale de la situation d'anneau similaire. Les différents anneaux similaires sont déterminés par trois constantes.

Avant de calculer $C_v(t)$ et $C_\omega(t)$, nous rappelons la définition de la fonction gamma et certaines de ses propriétés qui nous seront utiles.

Soit $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt}$ $x > 0$. Cette intégrale

généralisée est convergente pour $x > 0$ et vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$$

Il vient alors immédiatement : $\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$

si $n \in \mathbb{N}$ puisque $\Gamma(1) = 1$

démonstration :

On fait une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$$= x\,\Gamma(x)$$

Montrons que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^{2p+1} e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(p+1)}{2^p} = \frac{1}{4}\frac{p!}{2^p}} \quad p \in \mathbb{N}.$$

On utilise le changement de variable : $u = 2x^2$. D'où $du = 4x\,dx$ et :

$$\int_0^{\infty} x^{2p+1} e^{-2x^2} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^p e^{-u} \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int_0 \frac{1}{2^p} u^{(p+1)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2^p}\Gamma(p+1) = \frac{p!}{2^{p+2}}$$

Pour $p=0$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4}$$

Calculons alors $C_\omega(t)$ et $C_v(t)$:

$$C_\omega(t) = -\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^{\infty} \bar{r}'(\omega_0)^2 d\bar{r}'$$

$$= -\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\frac{1}{\delta^4}\frac{m^2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \bar{r}' e^{-2\left(\frac{\bar{r}'}{\delta}\right)^2} d\bar{r}'$$

$$= -\frac{8\pi^2}{\Gamma^2\delta^2}\frac{m^2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

$$\boxed{C_\omega(t) = -\frac{2m^2(0)}{\Gamma^2\,\bar{\delta}^2}\left[\frac{S_0}{S}\right]^4}$$

$$C_v(t) = \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r}\to\infty}\left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^{\bar{r}} \bar{r}'\frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{\bar{r}'^2}\left[1 - e^{(\bar{r}'/\bar{\delta})^2}\right]^2 d\bar{r}' - \ln\bar{r}\right)$$

$$\Gamma_v(t) = \frac{1}{2} + \lim_{\bar{r}\to\infty}\left(\int_0^{\bar{r}/\bar{\delta}} \left[1 - e^{-(\bar{r}'/\bar{\delta})^2}\right]^2 \frac{1}{\bar{r}'/\bar{\delta}} \frac{d\bar{r}'}{\bar{\delta}} - \ln\frac{\bar{r}}{\bar{\delta}} - \ln\bar{\delta}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\bar{\delta} + \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - e^{-(\varepsilon)^2}\right]^2 d\varepsilon - \ln\varepsilon\right)$$

On fait le changement de variable $u = \varepsilon^2$.
On a : $du = 2\varepsilon\, d\varepsilon$.

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - e^{-\varepsilon^2}\right]^2 d\varepsilon - \ln\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{u} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du - \ln u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du + \int_2^{u} \frac{1}{u}(1 - e^{-u})^2 du - \ln u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du + \int_2^{u} \frac{1}{u}(e^{-2u} - 2e^{-u}) du + \int_2^{u} \frac{1}{u} du - \ln u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du + \int_2^{u} \frac{1}{u}(e^{-2u} - 2e^{-u}) du - \ln 2\right)$$

D'où :

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - e^{-\varepsilon^2}\right]^2 d\varepsilon - \ln\varepsilon\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u}(e^{-2u} - 2e^{-u}) du - \ln 2\right)$$

On trouve numériquement :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{u}(e^{-2u} - 2e^{-u}) du = -0,0940222$$

$$\int_0^{2} \frac{1}{u}(1 - e^{-u})^2 du = 0,6712373$$

d'où $\int_0^{2} \frac{1}{u}\left[1 - e^{-u}\right]^2 du + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u}(e^{-2u} - 2e^{-u}) = 0,5772151$

On reconnait <u>le nombre d'Euler</u> $\gamma = 0,5772156649015 32$.

On a donc :

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\left[1-e^{-\varepsilon^2}\right]^2 d\varepsilon - \ln\varepsilon\right]=\frac{1}{2}(\gamma-\ln 2.$$

D'où :

$$\Gamma_v(t)=\frac{1}{2}-\ln\bar\delta+\frac{\gamma-\ln 2}{2}$$

$$\boxed{\Gamma_v(t)=\frac{(1+\gamma-\ln 2)}{2}-\ln\bar\delta}$$

La solution similaire dépend de $m(0)$, Γ et de τ_{10} ou δ_0 (afin de déterminer $\bar\delta(t)$).

6 Calcul de l'expression de $C_\omega(t)$:

$$\tau_2=\tau_1/S \qquad \tau_1=\int_0^t s(t')\,dt'+\tau_{10} \qquad \tau_{10}=\frac{\pi S_0}{2\nu\Gamma}\int_0^\infty \varphi(0,\bar r)\bar r^3 d\bar r$$

$$C_\omega=-\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^\infty \bar r'(\omega)\,d\bar r'$$

$$=-\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^\infty \bar r'\frac{1}{S^2}\,e^{-2\eta'^2}\left(\sum_0^N C_n L_n(\eta'^2)\,\tau_1^{-(n+1)}\right)^2 d\bar r'$$

où $N+1$ est le nombre de termes utilisés dans

$$\omega=\frac{1}{S}\,e^{-\eta^2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(\eta^2)\,\tau_1^{-(n+1)}$$

et $$\varphi=S\,e^{-\eta^2}\sum_{n=0}^{\infty} D_n L_n(\eta^2)\,\tau_1^{-(n+1)}$$

afin de satisfaire les profils initiaux $\omega_0(\bar r)$ et $\varphi_0(\bar r)$ de façon convenable.

$$L_n(\varepsilon)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{\varepsilon^m}{m!}$$

d'où $\boxed{L_n(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}\,\varepsilon^k}$ avec $\boxed{P_{n,k}=\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{k!}}$

$$\left(\sum_0^N c_n L_n(\eta^2)\,\tau_1^{-(n+1)}\right)^2 = \sum_{n,m=0}^N c_n c_m L_n(\eta^2) L_m(\eta^2)\,\tau_1^{-(n+1)}\,\tau_1^{-(m+1)}$$

D'où $C_\omega(t) = -\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\frac{1}{s^2}\sum_{n,m=0}^N c_n c_m \tau_1^{-2}\tau_1^{-(n+m)}\,4\bar{v}\,\tau_2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} L_n(\eta'^2)L_m(\eta'^2)\,d\eta'$

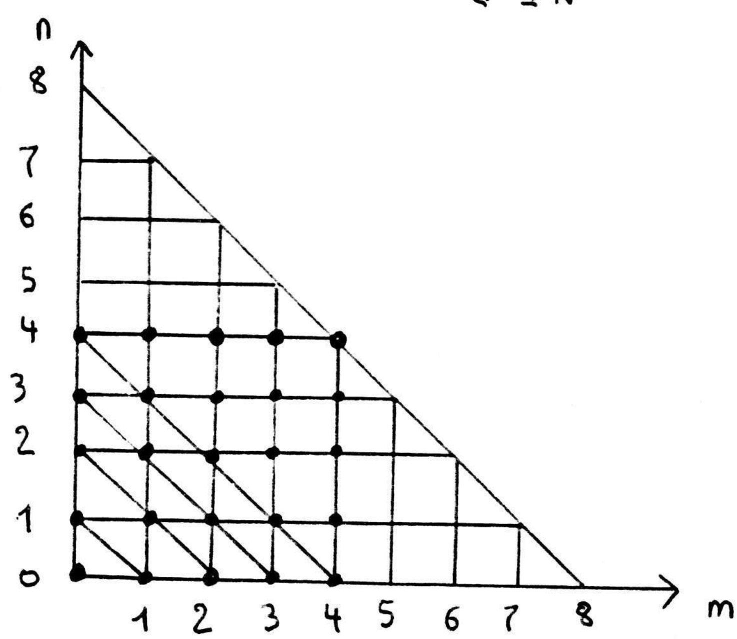
$$= -\frac{8\pi^2}{\Gamma^2}\frac{1}{s^3}\frac{4\Gamma}{\tau_1}\sum_{0\ n,m}^N c_n c_m \tau_1^{-(n+m)}\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} L_n(\eta'^2)L_m(\eta'^2)\,d\eta'$$

$$= -\frac{16\,\pi^2}{\Gamma s^3 \tau_1}\sum_{0\ n,m}^N c_n c_m \tau_1^{-(n+m)}\left(2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} L_n(\eta'^2)L_m(\eta'^2)\,d\eta'\right)$$

Soit $J_{n,i} = 2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} L_n(\eta'^2) L_i(\eta'^2)\,d\eta'$

On a $C_\omega(t) = -\frac{16\,\pi^2}{\Gamma s^3 \tau_1}\sum_{0\ n,m}^N c_n c_m\,\tau_1^{-(n+m)}\,J_{m,n}$

Or $\displaystyle\sum_{\substack{0\le n\le N\\ 0\le m\le N}} c_n c_m \tau_1^{-(n+m)} J_{m,n} = \sum_{\nu=0}^{2N}\tau_1^{-\nu}\sum_{\substack{m+n=\nu\\ 0\le m\le N\\ 0\le n\le N}} c_m c_n J_{m,n}$



Les point • correspondent au domaine des indices $0\le m\le N$ et $0\le n\le N$. Les points à $m+n=\nu$ sont les différentes diagonales : \

Si on pose $\underline{C_m = 0 \text{ pour } m > N}$, on a :

$$\sum_{\substack{m+n=\mathcal{N} \\ 0\leq m\leq N \\ 0\leq n\leq N}} C_m C_n \mathcal{J}_{m,n} = \sum_{m=0}^{\mathcal{N}} C_m C_{\mathcal{N}-m} \mathcal{J}_{m,\mathcal{N}-m}$$

d'où $$\sum_{m,n} C_n C_m \tau_1^{-(n+m)} \mathcal{J}_{m,n} = \sum_{n=0}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^{n} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m-n}$$

$$\boxed{C_\omega(t) = -\frac{16\pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1} \sum_{n=0}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^{n} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m,n-m}}$$

en posant $\underline{C_m = 0 \text{ pour } m > N}$.

Si on ne veut pas faire intervenir des termes C_m avec des indices $m > N$, il faut limiter la sommation :

$$\underline{C_\omega(t) = -\frac{16\pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1} \left(\sum_{n=0}^{N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^{n} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m,n-m} + \sum_{n=N+1}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=n-N} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m,n-m} \right)}$$

Ting ne tient pas en compte la sommation de $N+1$ à $2N$. Il utilise l'expression :

$$C_\omega(t) = -\frac{16\pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1} \sum_{n=0}^{N} \tau_1^{-n} \sum_{m=0}^{n} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m,n-m}$$

Soit $$\boxed{C_\omega(t) = -\frac{16\pi^2}{\Gamma S^3 \tau_1} \sum_{n=0}^{N} \tau_1^{-n} \omega_n}$$

où on a posé $$\boxed{\omega_n = \sum_{m=0}^{n} C_m C_{n-m} \mathcal{J}_{m,n-m}}$$

Reste à calculer l'expression de $\mathcal{J}_{n,i}$.

$$\mathcal{J}_{n,i} = 2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} L_n(\eta'^2) L_i(\eta'^2)\, d\eta'$$

$$= 2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} \left(\sum_{l=0}^{n} p_{n,l}\, \eta'^{2l}\right)\left(\sum_{k=0}^{i} p_{i,k}\, \eta'^{2k}\right)$$

$$= 2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\, \eta'^{2k}\right)\left(\sum_{j=0}^{i} p_{i,j}\, \eta'^{2j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} p_{i,j} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \left(2\int_0^\infty \eta' e^{-2\eta'^2} \eta'^{2(k+j)}\, d\eta\right)$$

D'où
$$\boxed{\mathcal{J}_{n,i} = \sum_{j=0}^{i} p_{i,j} \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \frac{(j+k)!}{2^{j+k+1}}}$$

car on a vu que $\int_0^\infty x^{2p+1} e^{-2x^2}\, dx = \frac{p!}{2^{p+2}}$

7 <u>Calcul de l'expression de $C_v(t)$:</u>

$$\tau_2 = \tau_1 / S$$

$$C_v = \lim_{\bar r \to \infty} \left(\frac{4\pi^2}{r^2} \int_0^{\bar r} \bar r' (v)^2\, d\bar r' - \ln \bar r\right) + \frac{1}{2}$$

Or
$$v = \frac{2\bar\nu}{\bar r}\left[D_0 (1 - e^{-\eta^2}) + e^{-\eta^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{\tau_1^n} \left(L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)\right)\right]$$

On limite comme précédement les développements en série de ω, φ et v aux $N+1$ premiers termes.

$$C_v = \frac{1}{2} + \lim_{\bar r \to \infty} \left(\frac{4\pi^2}{r^2} \int_0^{\bar r} \left(\frac{2\bar\nu}{\bar r}\right)^2 D_0^2 (1 - e^{-\eta'^2})\, \bar r' d\bar r' - \ln \bar r\right)$$

$$+ \lim_{\bar r \to \infty} \frac{4\pi^2}{r^2} \int_0^{\bar r} \left(\frac{2\bar\nu}{\bar r}\right)^2 2 D_0 (1 - e^{-\eta'^2}) e^{-\eta'^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{\tau_1^n} \left(L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)\right) \bar r' d\bar r'$$

$$+ \lim_{\bar r \to \infty} \frac{4\pi^2}{r^2} \int_0^{\bar r} \left(\frac{2\bar\nu}{\bar r}\right)^2 e^{-2\eta'^2} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{\tau_1^n} \left(L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)\right)\right)^2 \bar r' d\bar r'$$

Or $\frac{1}{2} + \lim_{\bar{r}\to\infty} \left(\frac{4\pi^2}{\bar{r}^2}\right) \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{2\bar{\nu}}{\bar{r}'}\right)^2 D_0^2 (1-e^{-\eta^2})^2 \bar{r}' d\bar{r}' - \ln \bar{r}$

$= -\ln \bar{\delta} + \frac{1}{2}(1+\gamma-\ln 2)$ d'après le calcul fait pour l'anneau similaire.

Et comme $D_0 = \frac{1}{4\pi}$, on a donc :

$$\boxed{C_v = -\ln\bar{\delta} + \frac{1}{2}(1+\gamma-\ln 2) + 4\pi\mathcal{A} + 8\pi^2\mathcal{B}}$$

avec $\mathcal{A} = 2\int_0^\infty (1-e^{-\eta^2})\, e^{-\eta^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{\bar{r}_1^n} \left(L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)\right) \frac{1}{\eta}\, d\eta$

et $\mathcal{B} = 2\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\bar{r}_1^n} \left(L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)\right)\right)^2 \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} d\eta$

$L_n(\eta^2) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}\, \eta^{2k}$.

Soit $\boxed{G_n(\eta^2) = L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2)}$ défini pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
G_n(\eta^2) &= L_{n-1}(\eta^2) - L_n(\eta^2) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1,k}\,\eta^{2k} - \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}\,\eta^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{n-1,k}\,\eta^{2k} - \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}\,\eta^{2k} \quad \text{si on pose } P_{n-1,n} = 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (P_{n-1,k} - P_{n,k})\,\eta^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} q_{n,k}\,\eta^{2k} \quad \text{où on a posé } \boxed{q_{n,k} = P_{n-1,k} - P_{n,k}}
\end{aligned}$$

pour $n \geq 1$

On a $G_n(\eta^2) = \sum_{k=0}^{n} q_{n,k}\,\eta^{2k} = \sum_{1}^{n} q_{n,k}\,\eta^{2k}$ car $q_{n,0} = 0$

On a donc $\boxed{\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{N} \bar{r}_1^{-n} \alpha_n}$

avec $\alpha_n = D_n\, 2 \int_0^\infty (1 - e^{-\eta^2}) \dfrac{e^{-\eta^2}}{\eta} G_n(\eta^2)\, d\eta$

$$= D_n\, 2 \int_0^\infty \frac{(e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2})}{\eta} G_n(\eta^2)\, d\eta$$

$$= D_n \sum_{k=1}^{n} q_{nk}\, 2 \int_0^\infty \frac{(e^{-\eta^2} - e^{-2\eta^2})}{\eta} \eta^{2k}\, d\eta$$

Or $\displaystyle\int_0^\infty \eta^{2k-1} e^{-2\eta^2}\, d\eta = \frac{(k-1)!}{2^{k+1}}$

et $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\eta^2} \eta^{2k-1}\, d\eta = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{k-1}\, du$

avec le changement de variable $u = \eta^2$

$$= \frac{1}{2} \Gamma(k)$$

$$= \frac{1}{2} (k-1)!$$

D'où $\boxed{\alpha_n = D_n \sum_{k=1}^{n} q_{nk} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) (k-1)!}$

Il nous reste à calculer $\mathcal{B}$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \tau_1^{-n} G_n(\eta^2)\right)^2 = \sum_{n,m\,1}^{N} D_n D_m G_n(\eta^2) G_m(\eta^2) \tau_1^{-(n+m)}$$

D'où $\mathcal{B} = 2 \displaystyle\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n \tau_1^{-n} G_n(\eta^2)\right)^2 \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2}\, d\eta$

$$= \sum_{n,m\,1}^{N} D_n D_m \tau_1^{-(n+m)} \beta_{n,m}$$

où on a posé $\beta_{n,m} = 2 \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2\eta^2}}{\eta} G_n(\eta^2) G_m(\eta^2)\, d\eta$.

On a: $\displaystyle\sum_{n,m\,1}^{N} D_n D_m \tau_1^{-(n+m)} \beta_{n,m}$

$$= \sum_{\substack{1 \leq m \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} D_n D_m \tau_1^{-(n+m)} \beta_{n,m} = \sum_{\mathcal{N}=2}^{2N} \tau_1^{-\mathcal{N}} \sum_{\substack{m+n=\mathcal{N} \\ 1 \leq m \leq N \\ 1 \leq n \leq N}} D_n D_m \beta_{n,m}$$

La somme précédente est du même type que celle calculée pour $C_\omega(t)$ si ce n'est qu'ici on commence à $\mathcal{N}=2$ et que : $m \geq 1$ et $n \geq 1$

On a donc $\boxed{\mathcal{B} = \sum_{n=2}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=1}^{n-1} D_m D_{n-m} \beta_{m,n-m}}$

en posant $D_m = 0$ pour $m > N$.

$$\mathcal{B} = \sum_{n=2}^{N} \tau_1^{-n} \sum_{m=1}^{n-1} D_m D_{n-m} \beta_{m,n-m} + \sum_{n=N+1}^{2N} \tau_1^{-n} \sum_{m=n-N}^{N} D_m D_{n-m} \beta_{m,n-m}$$

Ting ne tient pas en compte la sommation de $N+1$ à $2N$

Il utilise l'expression : $\boxed{\mathcal{B} = \sum_{n=2}^{N} \tau_1^{-n} \gamma_n}$

avec $\boxed{\gamma_n = \sum_{m=1}^{n-1} D_m D_{n-m} \beta_{m,n-m}}$

Reste à calculer l'expression de $\beta_{m,h}$

$$\beta_{n,h} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-2\eta^2}}{\eta} G_n(\eta^2) G_h(\eta^2) \, d\eta \qquad n \geq 1 \text{ et } h \geq 1$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} \left(\sum_{l=1}^{n} q_{n,l} \, \eta^{2l} \right) \left(\sum_{k=1}^{h} q_{h,k} \, \eta^{2k} \right) d\eta$$

$$= \sum_{l=1}^{n} q_{n,l} \sum_{k=1}^{h} q_{h,k} \, 2 \int_0^\infty \frac{1}{\eta} e^{-2\eta^2} \eta^{2(k+l)} \, d\eta$$

$$= \sum_{l=1}^{n} q_{n,l} \sum_{k=1}^{h} q_{h,k} \, 2 \int_0^\infty e^{-2\eta^2} \eta^{2(k+l)-1} \, d\eta$$

$$= \sum_{l=1}^{n} q_{n,l} \sum_{k=1}^{h} q_{h,k} \frac{(k+l-1)!}{2^{k+l}}$$

car $$2\int_0^\infty e^{-2\eta^2}\,\eta^{2p-1}\,d\eta = \frac{(p-1)!}{2^p}$$

$$\boxed{\beta_{n,h} = \sum_{l=1}^{n} a_{n,l} \sum_{k=1}^{h} a_{h,k} \frac{(k+l-1)!}{2^{k+l}}}$$