Annexe 5

Equations du deuxième ordre

Equations de Compatibilité

On va établir les équations du deuxième ordre ainsi que les équations de compatibilité qui en déroulent.

1 Equation de continuité :

$$(u\bar{r}h_3)_{\bar{r}} + (h_3 v)_\theta + \varepsilon\bar{r}\,w_s + \varepsilon\bar{r}\,\dot{X}_s.\vec{\tau} = 0$$

On veut les termes en ε.

On a alors :

$$\left(\bar{r}\,h_3^{(0)}u^{(2)} + h_3^{(1)}u^{(1)}\bar{r}\right)_{/\bar{r}} + \left(h_3^{(0)}v^{(2)} + h_3^{(1)}v^{(1)} + h_3^{(2)}v^{0}\right)_{/\theta}$$

$$+ \bar{r}\,w_s^{(1)} + \bar{r}\,\dot{X}_{/s}^{(0)}.\vec{\tau}^{\,0} = 0$$

D'où
$$v^{(2)}_{/\theta} + \frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(0)}}\,v^{(1)}_{/\theta} - K^0\bar{r}\left(\cos\theta^0 v^{(1)}\right)_{/\theta} + \frac{v^0}{\sigma^0}\frac{\partial h_3^{(2)}}{\partial\theta}$$

$$+\left(\bar{r}u^{(2)}\right)_{/\bar{r}} + \frac{\sigma^1}{\sigma^0}\left(\bar{r}u^{(1)}\right)_{/\bar{r}} - K^{(0)}\cos\phi^{(0)}\left(\bar{r}^2 u^{(1)}\right)_{\bar{r}}$$

$$+\frac{\bar{r}}{\sigma^0}\,w_s^{(1)} + \frac{\bar{r}}{\sigma^0}\,\dot{X}_{/s}^{(0)}.\vec{\tau}^{\,0} = 0$$

On moyenne en θ et on obtient :

$$\left(\bar{r}\,u_c^{(2)}\right)_{/\bar{r}} = -\frac{\bar{r}}{\sigma^{(0)}}\left((w_s^{(1)})_c + \dot{X}_s^{(0)}.\vec{\tau}^{(0)}\right)$$

d'où
$$u_c^{(2)} = -\frac{1}{\bar{r}\,\sigma^{(0)}}\int_0^{\bar{r}}\left[(w_s^{(1)})_c + \dot{X}_s^{(0)}.\vec{\tau}^{(0)}\right]\bar{r}'\,d\bar{r}'$$

2 Equation de Navier-Stokes :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}_s}{h_3}\left(w - \varepsilon\bar{r}\vec{r}_t.\vec{\tau}\right) + \frac{\partial^R\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{V}$$

$$= -\nabla p + \frac{\nu}{h_3}\left(\frac{1}{h_3}\dot{X}_s\right)_s + \nu\,\Delta\vec{V}$$

$$\frac{\partial^R\vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\vec{r} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau}\right)$$

$$h_3 = h_3^0 + \varepsilon h_3^{(1)} + \varepsilon^2 h_3^{(2)} = \sigma^0 + \varepsilon(\sigma^1 - \sigma^0 K^0 \bar{r} \cos\phi^0)$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{\sigma^0}\left(1 - \varepsilon \frac{h_3^1}{\sigma^0} + \dots\right)$$

On veut les <u>termes en ε^{-1}</u>.

Avec les vecteurs $\vec{r}^1, \vec{\Phi}^1, \vec{\tau}^1$, il y a des produits qui donnent des termes en ε^{-1}, mais il s'avère que l'on retrouve les termes des équations de l'ordre 1 et qu'avec $\vec{r}^2, \vec{\phi}^2, \vec{\tau}^2$, on retrouve les termes des équations à l'ordre principal. On ne s'occupera donc que des produits construits avec $\vec{r}^0, \vec{\phi}^0, \vec{\tau}^0$ et d'ordre ε^{-1} car ce sont les seuls d'ordre ε^{-1} qui ont une contribution non nulle.

ν est en ε^2. On pose $\boxed{\nu = \bar{\nu}\,\varepsilon^2}$.

On va regarder successivement les termes de l'équation de NavierStokes.

$\ddot{X}$ et $\frac{\nu}{h_3}\left(\frac{1}{h_3}\dot{X}_s\right)_{,s}$: n'ont pas de contribution.

$\frac{\dot{X}_s\,\omega}{h_3}$: $\frac{\dot{X}_s^{(0)}}{\sigma^0}\omega^{(0)}$ est le seul terme en ε^{-1}

$\frac{\partial^R \vec{V}}{\partial t}$: $\frac{\partial^R}{\partial t}\left(v^0 \vec{\theta}^0 + \omega^0 \vec{\tau}^0\right)$

Δp : $\left(-\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \bar{r}}, -\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \theta}, -\frac{1}{\sigma^0}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial s} + \frac{1}{\sigma^{0\,2}} h_3^1 \cancel{\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s}}\right)$

sur $\vec{r}^0, \vec{\phi}^0, \vec{\tau}^0$

$\vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{V}$:

+ sur $\vec{r}^0$:

$t_1^1 u$: $u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \bar{r}}$ $\quad t_2^1 v$: $\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \theta}v^{(1)} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \theta}v^{(0)}\right) - \frac{1}{\bar{r}}\left(2v^{(0)}v^{(2)} + {v^{(1)}}^2\right)$

$t_3^1 \omega$: $\omega^{(0)}\frac{1}{\sigma^{(0)}}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial s} - \frac{1}{\sigma^{(0)}}\omega^{(0)}\left(\omega^{(0)}\left(\frac{\partial h_3^{(2)}}{\partial \bar{r}} - \frac{h_3^{(1)}}{\sigma^0}\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial \bar{r}}\right) + 2\omega^{(1)}\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial \bar{r}}\right)$

+ sur $\vec{\phi}^0$:

$t_1^2 u$: $u^{(1)} v^{(1)}_{,r} + \underline{u^{(2)} v^{(0)}_{,r}}$

$t_2^2 v$: $\frac{1}{r}\left(v^{(1)} v^{(1)}_{,\theta} + v^{(0)} v^{(2)}_{,\theta} + \cancel{v^{(2)} v^{(0)}_{,\theta}}\right) + \underline{\frac{1}{r}\left(v^{(0)} u^{(2)} + v^{(1)} u^{(1)}\right)}$

$t_3^2 w$: $\underline{w^{(0)} \frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(v^{(1)}_{,s} - 0\right)} - \frac{1}{r}\frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(w^{(1)}\left(w^{(0)} \frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial \theta}\right)\right.$

$$\left. + w^{(0)}\left[w^{(0)}\left(\frac{\partial h_3^{(2)}}{\partial\theta} - h_3^{(1)}\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial\theta}\right) + w^{(1)}\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial\theta}\right]\right)$$

+ sur $\vec{\tau}^0$:

$t_1^3 u$: $u^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} + \underline{u^{(2)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r}}$

$t_2^3 v$: $\frac{1}{r}\left(v^{0} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial\theta} + v^{(1)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial\theta} + v^{(2)} \cancel{\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\theta}}\right)$

$t_3^3 w$: $\frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(\underline{w^{(0)} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial s}} - \cancel{\frac{h_3^{(1)}}{\sigma^{(0)}} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial s}}\right) + \frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(w^{(0)} u^{(1)} \frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial r}\right)$

$$+ \frac{1}{\sigma^{(0)}} \frac{1}{r}\left[w^{(0)}\left(\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial\theta} v^{(1)} + \frac{\partial h_3^{(2)}}{\partial\theta} v^{(0)} - \frac{h_3^{(1)}}{\sigma^{(0)}} \frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial\theta} v^{(0)}\right) + w^{(1)}\left(\frac{\partial h_3^{(1)}}{\partial\theta} v^{(0)}\right)\right]$$

$\nu \Delta\vec{V}$: ν est en ε^2 donc il faut les termes de $\Delta\vec{V}$ en ε^{-3}

$$\Delta\vec{V} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\,\vec{V})$$

Soit t^i_j les coordonnées de $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\,\vec{V}$ sur (E_i)

Dans les formules du paragraphe 222 p13, on n'a pas donné l'expression de $\operatorname{div}\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$. On a la formule :

$\operatorname{div}\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = (C_1, C_2, C_3)$ sur $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ avec :

$$C_1 = \frac{\partial\left(t_1^1\sqrt{g_{22}\,g_{33}}\right)}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}\;\partial\Lambda^1} + \frac{\partial\left(t_2^1\sqrt{g_{33}\,g_{11}}\right)}{\sqrt{g_{33}\,g_{11}}\;\partial\Lambda^2} + \frac{\partial\left(t_3^1\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\right)}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\;\partial\Lambda^3}$$

$$+ \frac{t_1^2}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\Lambda^2} + \frac{t_1^3}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\Lambda^3} - \frac{t_2^2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\Lambda^1} - \frac{t_3^3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\sqrt{g_{33}}}{\partial\Lambda^1}.$$

$$C_2 = \frac{\partial\left(t_1^2\sqrt{g_{22}g_{33}}\right)}{\sqrt{g_{22}g_{33}}\,\partial\Lambda^1} + \frac{\partial\left(t_2^2\sqrt{g_{33}\,g_{11}}\right)}{\sqrt{g_{33}g_{11}}\,\partial\Lambda^2} + \frac{\partial\left(t_3^2\sqrt{g_{11}g_{22}}\right)}{\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\partial\Lambda^3}$$

$$+ \frac{t_2^3}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\Lambda^3} + \frac{t_2^1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\Lambda^1} - \frac{t_3^3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\sqrt{g_{33}}}{\partial\Lambda^2} - \frac{t_1^1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\Lambda^2}$$

$$C_3 = \frac{\partial\left(t_1^3\sqrt{g_{22}g_{33}}\right)}{\sqrt{g_{22}g_{33}}\,\partial\Lambda^1} + \frac{\partial\left(t_2^3\sqrt{g_{33}\,g_{11}}\right)}{\sqrt{g_{33}g_{11}}\,\partial\Lambda^2} + \frac{\partial\left(t_3^3\sqrt{g_{11}\,g_{22}}\right)}{\sqrt{g_{11}g_{22}}\,\partial\Lambda^3}$$

$$+ \frac{t_3^1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\sqrt{g_{33}}}{\partial\Lambda^1} + \frac{t_3^2}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\sqrt{g_{33}}}{\partial\Lambda^2} - \frac{t_1^1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial\Lambda^3} - \frac{t_2^2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial\Lambda^3}$$

$g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$ et $g_{33} = h_3^2$

$d\Lambda^1 = dr$, $d\Lambda^2 = r\,d\theta$ et $d\Lambda_3 = h_3\,ds$

D'où :

$$C_3 = \frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial(t_1^3\bar{r}h_3)}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{h_3}\frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}}\frac{\partial(t_2^3h_3)}{\partial\theta} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{1}{h_3}\frac{\partial(t_3^3\bar{r})}{\partial s}$$

$$+ \varepsilon^{-1}\frac{t_3^1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\bar{r}} + \frac{t_3^2}{h_3}\frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}}\frac{\partial h_3}{\partial\theta} .$$

$$C_2 = \varepsilon^{-1}\frac{1}{\bar{r}h_3}\frac{\partial(t_1^2\bar{r}h_3)}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{h_3\bar{r}}\varepsilon^{-1}\frac{\partial(t_2^2h_3)}{\partial\theta} + \frac{1}{\bar{r}h_3}\frac{\partial(t_3^2\bar{r})}{\partial s}$$

$$+ \varepsilon^{-1}\frac{t_2^1}{\bar{r}} - \varepsilon^{-1}\frac{t_3^3}{h_3\bar{r}}\frac{\partial h_3}{\partial\theta}$$

$$C_1 = \varepsilon^{-1}\frac{1}{\bar{r}h_3}\frac{\partial(t_1^1\bar{r}h_3)}{\partial\bar{r}} + \frac{\varepsilon^{-1}}{h_3\bar{r}}\frac{\partial(t_2^1h_3)}{\partial\theta} + \frac{1}{\bar{r}h_3}\frac{\partial(t_3^1\bar{r})}{\partial s}$$

$$- \varepsilon^{-1}\frac{t_2^2}{\bar{r}} - \varepsilon^{-1}\frac{t_3^3}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\bar{r}} .$$

En se servant des expressions de t_j^i,

on cherche les termes en ε^{-3}.

+ sur $\vec{\tau}^0$: $\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\left(\bar{r}\frac{\partial w^0}{\partial\bar{r}}\right)}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\cancel{\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial^2\theta}}$

+ sur $\vec{\Phi}^0$: $\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\bar{r}}\right) + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\bar{r}}\cancel{\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta}}\right) + \frac{1}{\bar{r}}\left(-\frac{v^{(0)}}{\bar{r}}\right)$

+ sur $\vec{r}^0$: $\frac{1}{\bar{r}}\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\bar{r}}v^{(0)}\right)} = \cancel{\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\theta}} = 0$

On écrit l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{\tau}^{\,0}$ et $\vec{\phi}^{\,0}$, après l'avoir moyennée sur θ :

+ sur $\vec{\tau}^{\,0}$:

$$\boxed{\omega_t^{0} - \bar{\nu}\frac{1}{\bar r}\left(\bar r\, \omega_{\bar r}^{(0)}\right)_{\bar r} = -\frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(\omega^{(0)}\left(\omega_c^{(1)}\right)_s + \left(P_c^{(1)}\right)_s\right) - \frac{\omega^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\left[\dot{X}_s^{(0)} \cdot \vec{\tau}^{(0)}\right] - \omega_{\bar r}^{(0)}\, v_c^{(2)}}$$

+ sur $\vec{\phi}^{\,0}$:

$$\boxed{v_t^{(0)} - \bar\nu\left[\frac{1}{\bar r}\left(\bar r\, v_{\bar r}^{(0)}\right)_{\bar r} - \frac{1}{\bar r^2}\, v^{(0)}\right] = -\frac{\omega^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\left(v_c^{(1)}\right)_s - \frac{\left(\bar r\, v^{(0)}\right)_{\bar r}}{\bar r}\, v_c^{(2)}}$$

3 Equations de compatibilité :

On remplace dans ces deux équations, l'expression de $v_c^{(2)}$ due à l'équation de continuité. Puis, en se servant de :

$$\dot{X}_s^{(0)} \cdot \vec{\tau}^{(0)} = \left[X_s^{(0)} \cdot \vec{\tau}^{(0)}\right]_{,t} = \sigma_t^{(0)} = \tilde{s}_{st}^{(0)} \quad \text{où} \quad \tilde{s}^{(0)}(t,s) = \int_0^s \sigma^0(t,s')\,ds'$$

, on met ces deux équations sous la forme :

$$\left(P_c^{(1)}\right)_s + 2\,\omega^{(0)}\left(\omega_c^{(1)}\right)_s - \frac{1}{\bar r}\left[\omega^{(0)}\int_0^{\bar r}\left(\omega_c^{(1)}\right)_s \bar r'\,d\bar r'\right]_{,\bar r} - \frac{1}{2}\,\bar r^3\left(\frac{\omega^{(0)}}{\bar r^2}\right)_{\bar r}\tilde{s}_{st}^{(0)} = -\,\sigma^{(0)}\,F_1(t,\bar r)$$

$$\omega^{(0)}\left(v_c^{(1)}\right)_s - \frac{\left(\bar r\, v^{(0)}\right)_{\bar r}}{\bar r^2}\int_0^{\bar r}\left(\omega_c^{(1)}\right)_s \bar r'\,d\bar r' - \frac{\left(\bar r\, v^{(0)}\right)}{2}\,\bar r\,\tilde{s}_{st}^{(0)} = -\,\sigma^{(0)}\,F_2(t,\bar r)$$

avec :

$$F_1(t,\bar r) = \omega_t^{(0)} - \bar\nu\,\frac{1}{\bar r}\left(\bar r\,\omega_{\bar r}^{(0)}\right)_{\bar r}$$

$$F_2(t,\bar r) = v_t^{(0)} - \bar\nu\left[\frac{1}{\bar r}\left(\bar r\, v_{\bar r}^{(0)}\right)_{\bar r} - \frac{v^{(0)}}{\bar r^2}\right]$$

On utilise alors la periodicité ens pour simplifier ces expressions en intégrant par rapport à s. On obtient finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega_t^{(0)} - \bar{\nu}\,\frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}\,\omega_{\bar{r}}^{(0)}\right)_{\bar{r}} = \frac{1}{2}\,\bar{r}^3\left(\frac{\omega^{(0)}}{\bar{r}^2}\right)_{\bar{r}}\;\frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \\ &v_t^{(0)} - \bar{\nu}\left[\frac{1}{\bar{r}}\left(\bar{r}\,v_{\bar{r}}^{(0)}\right)_{\bar{r}} - \frac{v^{(0)}}{\bar{r}^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\bar{r}\,v^{(0)}\right)_{\bar{r}}\;\frac{\dot{S}^{(0)}}{S^{(0)}} \end{aligned}}$$

<u>Il vient</u> : $\frac{1}{2}(\bar{r}\,v^0)_{\bar{r}}\,\frac{\dot{S}^0}{S^0} = -\frac{\omega^0}{\sigma^0}(v_c^1)_s - \frac{(\bar{r}\,v^0)_{\bar{r}}}{\bar{r}}\,u_c^{(2)}$

$$u_c^2 = -\frac{1}{\bar{r}\,\sigma^0}\int_0^{\bar{r}}\left[(\omega_s^{(1)})_c + \dot{X}_s^0\cdot\bar{r}^0\right]r'\,dr'$$

$$\frac{(\bar{r}\,v^0)_{\bar{r}}}{\bar{r}}\left\{\int_0^{\bar{r}}\left[(\omega_s^{(1)})_c + \dot{X}_s^0\cdot r^0\right]r'\,dr' - r^2\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{S}}{S}\right)\sigma\right\} = \omega^0 r^2 (v_c^1)_s$$

<u>Si $\omega^0 = 0$:</u> $\omega_s^{(1)} = 0$