Annexe 4

Résolution des équations données par le premier ordre. Partie antisymétrique de la solution.

On rappelle d'abord le système d'équations:

$$\frac{1}{\bar{r}}\left[v_{\theta}^{(1)} + (\bar{r}\, u^{(1)})_{\bar{r}} \right] = -\frac{1}{\sigma^{(0)}}\, \omega_s^{(0)} - (\nu K \sin\phi)^{(0)} \qquad (7)$$

$$v^{(0)} u_{\theta}^{(1)} - 2\, v^{(0)} v^{(1)} + \bar{r}\, p_{\bar{r}}^{(1)} = -\left(\omega^2 K \bar{r} \cos\phi\right)^{(0)} \qquad (7')$$

$$u^{(1)}\, v_{\bar{r}}^{(0)} + \frac{v^{(0)}}{\bar{r}}\, v_{\theta}^{(1)} + \frac{v^{(0)}\, u^{(1)}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\, p_{\theta}^{(1)} = -\frac{\omega^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\, v_s^{(0)} + (\omega^2 K \sin\phi)^{(0)} \qquad (7'')$$

$$u^{(1)}\, \omega_{\bar{r}}^{(0)} + \frac{v^{(0)}}{\bar{r}}\, \omega_{\theta}^{(1)} = -\frac{1}{\sigma^{(0)}}\left(p_s^{(0)} + \omega^{(0)} \omega_s^{(0)}\right) - (\omega v K \sin\phi)^{(0)} \qquad (7''')$$

On introduct la fonction de courant $\psi^{(1)}(t,\bar{r},\theta,s)$ définie par: $u^{(1)} = \frac{1}{\bar{r}}\, \psi_{\theta}^{(1)}$ et $v^{(1)} = -\psi_{\bar{r}}^{(1)} + \bar{r}(\nu K \cos\phi)^{(0)}$

Ainsi, l'équation (7) est satisfaite. $(\text{car } \omega_s^{0} = 0)$

$v^{0} = v^{0}(t,\bar{r})$ d'où $v_s^{0} = 0$

On multiplie (7'') par $\bar{r}$ et on dérive par rapport à $\bar{r}$ tout en remplaçant $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ par leurs expressions en $\psi^{(1)}$:

$$\cancel{\psi^{1}_{\theta\bar{r}}\, v^{0}_{\bar{r}}} + \psi^{1}_{\theta}\, v^{0}_{\bar{r}\bar{r}} + \cancel{v^{0}_{\bar{r}}\left(-\psi^{1}_{\theta\bar{r}}\right.} - (\bar{r}\nu K \sin\phi)^{0}\Big) + v^{0}\left(-\psi_{\theta\bar{r}\bar{r}} - K^{0}\sin\phi\, \frac{\partial \bar{r} v^{0}}{\partial \bar{r}}\right)$$

$$+ \frac{v^{0}}{\bar{r}}\, \psi^{1}_{\theta\bar{r}} + \psi^{1}_{\theta}\, \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\frac{v^{0}}{\bar{r}}\right) + p^{1}_{\bar{r}\theta} = (\omega^2 K \sin\phi)^{0} + \bar{r}\, 2\, \omega^{0} \omega^{0}_{,r} K^{0} \sin\phi^{0}.$$

On multiplie (7') par $1/\bar{r}$ et on dérive par rapport à θ:

$$\frac{1}{\bar{r}}\, v^{0}\, \frac{1}{\bar{r}}\, \psi^{(1)}_{\theta\theta\theta} - 2\, \frac{v^{0}}{\bar{r}}\left(-\psi^{1}_{\bar{r}\theta} - \bar{r}\, v^{0} K^{0} \sin\theta^{0}\right) + p^{(1)}_{\bar{r}\theta} = (\omega^2 K \sin\phi)^{0}$$

On soustrait alors les deux relations pour éliminer $p^{(1)}_{\bar{r}\theta}$

$$\Psi_\theta^{(1)}\left(V^0_{\bar r\bar r} + \frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\frac{V^0}{\bar r}\right)\right) - V^0\left(\Psi^1_{\theta\bar r\bar r} + \frac{1}{\bar r}\Psi^1_{\theta\bar r} + \frac{1}{\bar r^2}\Psi^{(1)}_{\theta\theta\theta}\right)$$

$$= \left[V^0_{\bar r}\,\bar r\,(vK\sin\phi)^0 + V^0 K \sin\phi\,\frac{\partial \bar r V^0}{\partial \bar r}\right] + \bar r\, 2\, \omega^0\, \omega^0_{\bar r}\, K^0 \sin\phi^0$$
$$+ 2\,(V^0)^2\, K^0 \sin\phi^0$$

On $\zeta^0(t,\bar r) = \frac{1}{\bar r}(\bar r V^0)_{\bar r}$ d'où $\zeta^0 = \frac{V^0}{\bar r} + V^0_{\bar r}$ et $\zeta^0_{\bar r} = V^0_{\bar r\bar r} + \frac{\partial}{\partial\bar r}\left(\frac{V^0}{\bar r}\right)$

Soit $\bar\Delta$ le laplacien en $\bar r$ et θ :

$$\bar\Delta\Psi^1_\theta = \frac{1}{\bar r h_3}\,\frac{\partial}{\partial \bar r}\,\bar r h_3\, \frac{\partial \Psi^1_\theta}{\partial \bar r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_3}{\bar r}\,\frac{\partial\Psi_\theta}{\partial\theta}\right)$$
$$= \Psi^{(1)}_{\theta\bar r\bar r} + \frac{1}{\bar r}\Psi^1_{\theta\bar r} + \frac{1}{\bar r^2}\Psi_{\theta\theta\theta}$$

$\zeta^0(t,\bar r) = \frac{1}{\bar r}(\bar r V^0)_{\bar r}$ d'où $\bar r\,\zeta^0 = \bar r\, V^0_{\bar r} + V^0$

D'où $\Psi^{(1)}_\theta\, \zeta^0_{\bar r} - V^0\,\bar\Delta\,\Psi^1_\theta = (vK\sin\phi)^0\left[V^0 + 2\bar r\zeta^0\right] + \bar r\, 2\,\omega^0\,\omega^0_{\bar r}\, K\sin\phi$

$$\boxed{V^0\,\bar\Delta\,\Psi^{(1)}_\theta - \zeta^0_{,\bar r}\,\Psi^{(1)}_\theta = -K^0\sin\phi^0\left[(2\bar r\zeta^0 + V^0)V^0 + 2\,\bar r\,\omega^{(0)}\,\omega^{(0)}_{\bar r}\right]}$$

On remarque que $\Psi^{(1)}_\theta = (\Psi^{(1)}_a)_\theta$ car $\Psi^{(1)}_{c,\theta} = 0$. → Ψ périodique en θ

On fait le développement suivant en série de Fourier de $\Psi^{(1)}_a$:

$$\Psi^{(1)}_a = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde\Psi_{n1}\cos n\phi^0 + \tilde\Psi_{n2}\sin n\phi^0\right)$$

D'où $V^{(0)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial\bar r} - \frac{n^2}{\bar r^2} - \frac{\zeta^0_{\bar r}}{V^0}\right)\left(n\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\tilde\Psi_{n1}\sin n\phi^0 + \tilde\Psi_{n2}\cos n\phi^0\right)\right)$

$$= -K^0\,\boxed{\sin\phi^0}\left[(2\bar r\zeta^0+V^0)\,V^0 + 2\,\bar r\,\omega^0\,\omega^0_{\bar r}\right]$$

On identifie les termes en $\sin n\phi$ (et en $\cos n\phi$) de part et d'autre de l'égalité et on obtient :

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial\bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r} - \left(\frac{n^2}{\bar r^2} + \frac{\zeta^0_{\bar r}}{V^0}\right)\right]\tilde\Psi_{nj} = K^0\, H(t,\bar r)\,\delta_{n1}\,\delta_{j1}}$$

avec $\boxed{H(t,\bar r) = (2\bar r\zeta^0 + V^0) + 2\,\bar r\,\frac{\omega^0}{V^0}\,\omega^0_{\bar r}}$

$\underline{\underline{\text{En } r=0}}$: $u=v=0$ d'où $u^{(1)}=v^{(1)}=0$

et donc $\boxed{\widetilde{\Psi}_{nj}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widetilde{\Psi}_{nj}}{\partial \bar{r}}=0 \text{ à } \bar{r}=0}$

$\underline{\underline{\text{En } \bar{r}=\infty}}$:

$$\vec{Q}(x)=\frac{\Gamma}{2\pi\bar{r}}\vec{\phi}\,\varepsilon^{-1}+\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}}\,\varepsilon^{-1}\vec{b}+\frac{\Gamma K\cos\phi}{4\pi}\vec{\phi}+Q^F$$

D/ abscisse d'contact pas curviligne non dim. — abscisse curvi dim

$$v=\dot{X}+V=Q+Q_2$$

$$V=Q+Q_2-\dot{X}$$

$$=\boxed{\frac{\Gamma}{2\pi\bar{r}\varepsilon}\vec{\phi}^0}+\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}\varepsilon}\vec{b}^0+\frac{\Gamma K\cos\phi^0}{4\pi}\vec{\phi}^0+Q^F+Q_2-\dot{X}+\boxed{\frac{\Gamma}{2\pi\bar{r}}\vec{\phi}^{(1)}}$$

$$=u\vec{r}+v\vec{\phi}+\omega\vec{\tau}$$

Pas d'équivalent

$$=u^{(1)}\vec{r}^{(0)}+\boxed{\varepsilon^{-1}v^0\vec{\phi}^0}+\varepsilon^{-1}\omega^0\vec{\tau}^0+v^1\vec{\phi}^0+\omega^1\vec{\tau}^0+\boxed{v^0\vec{\phi}^{(1)}}+\omega^0\vec{\tau}^{(1)}$$

En $\bar{r}=\infty$, on a donc $v^0=\frac{\Gamma}{2\pi\bar{r}}$, $\omega^0=O(0)$ et :

$$u^{(1)}=\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}\varepsilon}\,\vec{b}^0\cdot\vec{r}^0+(Q^F+Q_2-\dot{X})\cdot\vec{r}^0 \quad \text{en } \bar{r}=\infty$$

$+\omega^0\vec{n}^{(1)}\cdot\vec{n}^{(0)}$

Or $\vec{r}^0=\vec{n}^0\cos\phi^0+\vec{b}^0\sin\phi^0$ et $\vec{r}^0\cdot\vec{b}^0=\sin\phi^0$ d'où :

$$u^{(1)}=\left[\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}\varepsilon}+(Q^F+Q_2-\dot{X})^0\cdot\vec{b}^0\right]\sin\phi^0$$
$$+(Q^F+Q_2-\dot{X})^0\cdot\vec{n}^0\cos\phi^0$$

Et $v^{(1)}=\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}\varepsilon}\,\vec{b}^0\cdot\vec{\phi}^0+(Q^F+Q_2-\dot{X})^0\cdot\vec{\phi}^0 + \frac{\Gamma K\cos\phi}{4\pi}$ en $\bar{r}=\infty$

Or $\vec{\phi}^0=\cos\phi^0\,\vec{b}^0-\sin\phi^0\,\vec{n}^0$ et $\vec{\phi}^0\cdot\vec{b}^0=\cos\phi^0$

D'où :

$$v^{(1)}=\left[\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\bar{r}\varepsilon}+(Q^F+Q_2-\dot{X}^0)\cdot\vec{b}\right]^0\cos\phi^0$$
$$+\frac{\Gamma K\cos\phi^0}{4\pi}-(Q^F+Q_2-\dot{X})^0\cdot\vec{n}^0\sin\phi^0$$

Rem : match $\omega^{(1)}_\infty=(Q^F+Q_2-\dot{X})\cdot\vec{\tau}$

Afin de satisfaire $u^{(1)}=\frac{1}{\bar{r}}\Psi^1_\theta$ et $v^{(1)}=-\Psi^{(1)}_{\bar{r}}+\bar{r}(vK\cos\phi)^0$,

on a donc
$$\boxed{\begin{aligned}\widetilde{\Psi}^\infty_{11}&=\left[-\frac{\Gamma K}{4\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon\bar{r}}-(Q_0-\dot{X}^0)\cdot\vec{b}^0\right]\bar{r}\\ \Psi^\infty_{12}&=\left[(Q_0-\dot{X}^0)\cdot\vec{n}^0\right]\bar{r} \text{ et } \Psi^\infty_{nj}=0 \text{ si } j=1,2 \text{ et } n=2,3,\dots\end{aligned}}$$

où $Q_0=Q_2+Q^F$

En effet, on a alors :

$$u^{(1)\infty} = \frac{1}{\bar r}\,\Psi_\theta^{(1)\infty} = \frac{1}{\bar r}\left(-\tilde\Psi_{11}^\infty \sin\phi^\circ + \tilde\Psi_{12}^\infty \cos\phi^\circ\right)$$

On retrouve donc l'expression de $u^{(1)}$ en $\bar r = \infty$

$$v^{(1)\infty} = -\Psi_{\bar r}^{(1)\infty} + \bar r (v K \cos\phi)^\circ$$

$$= -\Psi_{11,r}^\infty \cos\phi^\circ - \Psi_{12,r}^\infty \sin\phi^\circ + (\bar r v^\circ)^\infty K^\circ \cos\phi^\circ .$$

Or $(\bar r v^\circ)^\infty = \frac{\Gamma}{2\pi}$ d'où :

$$v^{(1)\infty} = \left[\frac{\Gamma K^\circ}{4\pi} \ln\frac{1}{\varepsilon \bar r} + (Q_0 - \dot X^\circ).\vec b^\circ\right]\cos\phi^\circ$$

$$- \left[(Q_0 - \dot X^\circ).\vec n^\circ\right]\sin\phi^\circ - \frac{\Gamma K^\circ}{4\pi}\cos\phi^\circ + \frac{\Gamma}{2\pi} K^\circ \cos\phi^\circ$$

On retrouve alors l'expression précédente de $v^{(1)}$ en $\bar r = \infty$.

<u>Ting</u> montre alors que $\tilde\Psi_{nj} = 0$ pour $j = 1,2$ et $n = 2,3\dots$

On a aussi $\tilde\Psi_{12} = 0$

La condition en $\bar r = \infty$ donne alors $\boxed{\dot X^{(0)}.\vec n^\circ = Q_0.\vec n^\circ}$

Il reste à résoudre l'équation de $\tilde\Psi_{11}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r} - \left(\frac{1}{\bar r^2} + \frac{\mathcal{S}_{\bar r}^{(0)}}{v^{(0)}}\right)\right]\Psi_{11} = K^\circ H(t,\bar r)$$

que l'on met sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r \Psi_{11})\right) - \left[\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ)\right)\right]\frac{\Psi_{11}}{v^\circ} = K^\circ H$$

On remarque alors que v° est solution de l'équation homogène. On va donc chercher la solution par la <u>méthode de variation de la constante</u>, en posant :

$$\Psi_{11} = \lambda(\bar r)\, v^\circ$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r \Psi_{11}) = \frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r \lambda v^\circ) = \lambda \frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ) + v^\circ \bar r \frac{\partial}{\partial \bar r}\lambda$$

$$\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r \Psi_{11}) = \lambda \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ) + v^\circ \frac{\partial}{\partial \bar r}\lambda$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}\Psi_{11}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ)\right) + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ)\frac{\partial \lambda}{\partial \bar r} + \frac{\partial}{\partial \bar r}\left(v^\circ \frac{\partial}{\partial \bar r}\lambda\right)$$

Il vient : $$\underline{\frac{1}{\bar r}\left[\frac{\partial}{\partial \bar r}(\bar r v^\circ)\right]\frac{\partial \lambda}{\partial \bar r} + \frac{\partial}{\partial \bar r}\left(v^\circ \frac{\partial}{\partial \bar r}\lambda\right) = K^\circ H}$$

On pose donc $\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{r}}$.

$$\frac{1}{\bar{r}}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r} v^\circ)\right]\beta + \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(v^\circ \beta) = K^\circ H$$

D'où $v^\circ \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r} v^\circ)\beta\right] + v^\circ \bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(v^\circ \beta) = K^\circ H \bar{r} v^\circ$ après multiplication par $v^\circ \bar{r}$.

On pose $\gamma = v^\circ \beta$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{r} v^\circ)\right)\gamma + v^\circ \bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}\gamma = K^\circ H \bar{r} v^\circ$$

On voit que $\frac{1}{\bar{r} v^\circ}$ est solution du système homogène

On fait donc une nouvelle variation de la constante :

$$\gamma = k(r) \times \frac{1}{\bar{r} v^\circ}$$

Il vient alors $\frac{\partial k}{\partial r} = K^\circ H r v^\circ$ d'où $k = \int_0^{\bar{r}} K^\circ H \xi v^\circ d\xi$

Or $\gamma = \frac{k}{r v^\circ} = v^\circ \beta$ d'où $\beta = \frac{k}{r v^{\circ 2}}$ et $\frac{d\lambda}{dt} = \beta$

d'où $\lambda = \int_0^{\bar{r}} \frac{k}{z v^{\circ 2}} dz$. On a donc :

$$\boxed{\Psi_{11}(t, \bar{r}, s) = K^\circ v^\circ \int_0^{\bar{r}} \frac{1}{z[v^\circ(t,z)]^2}\left[\int_0^z \xi v^\circ(t,\xi) H(t,\xi) d\xi\right] dz}$$

Ting nous donne un développement limité de cette solution en $\bar{r} = \infty$:

$$\Psi_{11} = \bar{r} K^\circ C^*(t) + \frac{\Gamma k}{4\pi} \bar{r} \ln \bar{r} + O\left(\frac{1}{\bar{r}}\right) \text{ en } \bar{r} = \infty$$

$$\text{avec } C^* = \frac{\Gamma k}{4\pi}\left[\lim_{\bar{r} \to \infty}\left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^{\bar{r}} \xi [v^\circ(t,\xi)]^2 d\xi - \ln \bar{r}\right) + \frac{1}{2}\right] - \frac{2\pi}{\Gamma}\int_0^\infty \xi [\omega^\circ(t,\xi)]^2 d\xi .$$

En utilisant la condition en $\bar{r} = \infty$, on en déduit alors :

$$\boxed{\dot{X}^\circ . \vec{b}^{(0)} = \frac{\Gamma k^{(0)}}{4\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} + Q_0 . \vec{b}^\circ + K^\circ C^*}$$

On se propose, pour finir, de retrouver le développement limité en $\bar r = \infty$

$$\Psi_{11} = K^\circ \; v(t,\bar r)\int_0^{\bar r} \frac{1}{z\,[v(t,z)]^2}\left[\int_0^z \xi\, v(t,\xi)\, H(t,\xi)\, d\xi\right] dz$$

Soit $A(z) = \int_0^z \xi\, v\, H\, d\xi$

$$\Psi_{11} = v^\circ(t,\bar r)\, K^\circ \int_0^{\bar r} \frac{1}{z\,[v(t,z)]^2}\, A(z)\, dz$$

Or $v^\circ = \frac{\Gamma}{2\pi \bar r}$ en $+\infty$ d'où :

$$\lim_{\bar r\to\infty} \Psi_{11} = K^\circ\left(\frac{\Gamma}{2\pi\bar r}\right)\frac{1}{[v(t,\bar r)]^2}\, A(\bar r)\int_0^{\bar r} z\, dz$$

Ce passage doit se justifier par la connaissance du comportement de $H(t,\xi)$ donc de A.

$$\lim_{\bar r\to\infty} \Psi_{11} = K^\circ \frac{\Gamma}{4\pi}\lim_{\bar r\to\infty} \left(\frac{2\pi}{\Gamma}\right)^2 \bar r\, A(\bar r)$$

Hospital

D'où

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{\bar r\to\infty} \Psi_{11} = \bar r K^\circ C^* + \frac{\Gamma K^\circ}{4\pi}\, \bar r \ln \bar r + O\left(\frac{1}{\bar r}\right) \\ &\text{avec} \quad C^*(t) = \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\lim_{\bar r\to\infty}\left[\left(\frac{2\pi}{\Gamma}\right)^2 \int_0^{\bar r} \xi\,[v^\circ H](t,\xi)\, d\xi - \ln \bar r\right] - \frac{1}{2}\right\}\end{aligned}}$$

On remplace alors l'expression de H dans $C^*(t)$.

$$H = 2\bar r\, \zeta^\circ + v^\circ + 2\bar r\, \omega^\circ\, \omega^\circ_{,\bar r}/v^\circ$$

On a $\zeta^\circ = \frac{1}{\bar r}(\bar r v^\circ)_{\bar r}$ et en $+\infty$ $v^\circ = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\bar r}$.

$$C^* = \frac{\Gamma}{4\pi}\Bigg[\lim_{\bar r\to\infty} \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^{\bar r} \xi\, v^{\circ 2}\, d\xi - \ln \bar r$$

$$+ \underbrace{\lim \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\int_0^{\bar r} 2\,\xi\, v^\circ \cancel{\xi}\left(\frac{1}{\cancel{\xi}}(\xi v^\circ)_{\xi}\right) d\xi}_{A}$$

$$+ \frac{\Gamma}{4\pi}\lim_{\bar r\to\infty} \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\underbrace{\int_0^{\bar r} 2\,\xi\,\xi\,\omega^\circ\, \omega^\circ_{,\xi}\, d\xi}_{B}$$

$$\frac{B}{2} = \int_0^{\bar r} \xi^2 \omega^0 \omega^0_{,\xi}\, d\xi = -\int_0^{\bar r} \omega^0 (2\omega^0 \xi + \xi^2 \omega^0_{,\xi})\, d\xi + \left[\xi^2 \omega^{0\,2}\right]_0^{\bar r}$$

$$\left[\xi^2 \omega^{0\,2}\right]_0^{\bar r} = 0 \quad \text{car} \quad \omega^0 = O(\bar r^{-m}) \quad \bar r \to \infty$$

D'où $B = -\displaystyle\int_0^{\bar r} 2\,\omega^{0\,2}\, \xi\, d\xi \qquad \lim_{\bar r \to \infty} B = -2 \int_0^{\infty} \xi\, \omega^2\, d\xi$

$$\frac{\Gamma}{4\pi} \lim_{\bar r \to \infty} \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} B = -\underline{\frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^{\infty} \xi\, \omega^2\, d\xi}$$

$$A = \int_0^{\bar r} \left[(\xi v^0)^2\right]_{,\xi} d\xi = \left[(\xi v^0)^2\right]_0^{\bar r} = (\bar r v^0)^2 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{\bar r \to \infty} \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} A = \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 = 1$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} C^* = \frac{\Gamma}{4\pi}\left[\lim_{\bar r \to \infty}\left[\frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\left(\int_0^{\bar r} \xi\, v^{0\,2}\, d\xi\right) - \ln \bar r\right] + \tfrac{1}{2}\right] \\ - \frac{2\pi}{\Gamma} \int_0^{\infty} \xi \left[\omega^0(t, \xi)\right]^2 d\xi \end{aligned}}$$

Dans cette expression, Ting a un 1/2 au lieu d'un 1.

↑ c'est lui qui a juste