Annexe 3

Développement asymptotique de la ligne centrale de l'anneau

La ligne centrale de l'anneau est donnée sous forme paramétrée par la fonction $\vec{X}(s)$. On a alors les définitions suivantes:

$$\sigma = |X_s| \qquad \vec{X_s} = \sigma \vec{\tau} \qquad \text{, on a donc } |\vec{\tau}| = 1$$

$$\sigma K = |\tau_s| \qquad \vec{\tau_s} = \sigma K \vec{n} \qquad \text{, on a donc } |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} \qquad \text{, on a donc } |\vec{b}| = 1$$

$$T\sigma = |\vec{b_s}|$$

On fait un développement asymptotique de la ligne centrale $\vec{X}(s)$ par rapport au petit paramètre ε:

$$X(t,s,\varepsilon) = X^0(t,s) + \varepsilon X^1(t,s) + \dots$$

Il s'en déduit des développements asymptotiques de $\sigma, \vec{\tau}, K, \vec{n}, T, \vec{b}, \dots$ que l'on voudrait connaître.

1 Développement de σ et $\vec{\tau}$:

On a : $X_s = X_s^0 + \varepsilon X_s^1 + \dots$

d'où $|X_s|^2 = X_s \cdot X_s = X_s^0 \cdot X_s^0 + 2\varepsilon (X_s^1 \cdot X_s^0) + \dots$

Or $(x+h)^{1/2} = x^{1/2} + \dfrac{h}{2x^{1/2}} + \dots$ si h est petit, d'où

$$|X_s| = \left(|X_s|^2\right)^{1/2} = |X_s^0| + \frac{X_s^1 \cdot X_s^0}{|X_s^0|}\varepsilon + \dots$$

Comme $\sigma = |X_s|$, il vient : $\underline{\underline{\sigma = \sigma^0 + \varepsilon \sigma^1 + \dots}}$

avec $\underline{\underline{\sigma^0 = |X_s^0|}}$ et $\sigma^1 = \dfrac{X_s^0 \cdot X_s^1}{\sigma^0}$

Alors : $$\vec{\tau} = \frac{\vec{X_s}}{\sigma} = \vec{X_s}\left(\frac{1}{\sigma^0} - \varepsilon \frac{\sigma^1}{(\sigma^0)^2} + \dots\right)$$

car $(x+h)^{-1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{h}{x^2} + \dots$

$$= \frac{X_s^0}{\sigma^0} + \varepsilon\left(-X_s^0 \frac{\sigma^1}{(\sigma^0)^2} + \frac{X_s^1}{\sigma^0}\right) + \dots$$

D'où $\underline{\underline{\vec{\tau} = \vec{\tau}^0 + \varepsilon \vec{\tau}^1 + \dots}}$ avec $\vec{\tau}^0 = \dfrac{X_s^0}{\sigma^0}$.

On a donc : $|\vec{\tau}^0| = 1$ et $\vec{\tau}^1 = \dfrac{X_s^1}{\sigma^0} - \dfrac{X_s^0\, \sigma^1}{(\sigma^0)^2}$

On n'a pas forcément $|\vec{\tau}^1| = 1$. Par exemple, si $|X_s^1| \neq \sigma^0$ et si $X_s^1 \cdot X_s^0 = 0$, on a $\vec{\tau}^1 = \dfrac{X_s^1}{\sigma^0}$ d'où $|\tau^1| = \dfrac{|X_s^1|}{\sigma^0} \neq 1$

2 <u>Développement de K et $\vec{n}$:</u>

$$|\sigma K| = |\vec{\tau}_s| \text{ et } \vec{n} = \frac{\vec{\tau}_s}{\sigma K}.$$

On a l'analogie suivante avec ce qui précède :

$$\sigma K \longleftrightarrow \sigma$$
$$\vec{\tau} \longleftrightarrow \vec{X}$$

On a donc : $\underline{\underline{K = K^0 + K^1 \varepsilon + \dots}}$

et $\underline{\underline{\vec{n} = \vec{n}^0 + \varepsilon \vec{n}^1 + \dots}}$

avec $\sigma^0 K^0 = \dfrac{|X_{ss}^0|}{\sigma^0}$ $\quad n^0 = \dfrac{\tau_s^0}{\sigma^0 K^0}$ on a $|n^0| = 1$

3 <u>Développement de T et $\vec{b}$:</u>

$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ d'où $\vec{b} = b^0 + \varepsilon b^1 + \dots$ avec $\vec{b}^0 = \vec{\tau}^0 \wedge \vec{n}^0$

$|b_s| = T\sigma$ d'où $T = T^0 + \varepsilon T^1 + \dots$

4 <u>Développement de θ_0 et de h_3 :</u>

$\theta_0 = -\int \sigma T\, ds$ d'où $\theta_0 = \theta_0^0(s,t) + \varepsilon\, \theta_0^1(s,t) + \dots$ et s'expriment en fonction de σ et T donc de $\vec{X}$

$\phi = \theta + \theta_0 = \theta + \theta_0^0 + \varepsilon\, \theta_0^1 + \dots = \phi^0 + \varepsilon\, \theta_0^1 + \dots$ où $\phi^0 = \theta + \theta_0^0$

$$\begin{aligned} h_3 &= \sigma(1 - Kr\cos(\theta+\theta_0)) \\ &= (\sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 + \dots)\left(1 - (K^0 + \varepsilon K^1 + \dots)\,\varepsilon \bar{r} \cos(\theta + \theta_0^0 + \varepsilon\theta_0^1 + \dots)\right) \end{aligned}$$

Or $\cos(x+h) = \cos x + h(-\sin x) + \dots$ si h est petit, d'où

$$h_3 = \sigma^0 + \varepsilon\sigma^1 - \varepsilon\sigma^0 K^0 \bar{r} \cos(\theta + \theta_0^0) + \dots$$

Il vient donc $\underline{h_3 = h_3^0 + \varepsilon h_3^1 + \dots}$

avec $\underline{h_3^0 = \sigma^0}$ et $\underline{h_3^1 = \sigma^1 - \sigma^0 K^0 \bar{r} \cos(\theta + \theta_0^0)}$

5 Développement de $\vec{r}$ et $\vec{\phi}$:

$$\vec{r} = \vec{n}(s)\cos\phi + \vec{b}(s)\sin\phi$$
$$= \vec{n}^0\cos(\theta+\theta^0) + b^0\sin(\theta+\theta^0)$$
$$+ \varepsilon\left(\vec{n}^1\cos(\theta+\theta^0) + \vec{n}^0(-\sin(\theta+\theta_0)\,\theta_0^1)\right) + \dots$$

On a donc : $\vec{r} = \vec{r}^0 + \varepsilon\,\vec{r}^1 + \dots$

et de la même façon $\vec{\phi} = \vec{\phi}^0 + \varepsilon\,\vec{\phi}^1 + \dots$