# Annexe 2

## Le problème extérieur et son développement limité en $r=0$

Le problème extérieur est celui de l'écoulement créé par une ligne tourbillon $\Gamma$ de circulation $\Gamma$. On va rechercher ici la forme du développement limité proche de $\Gamma$ de l'écoulement.

1 Développement limité en $r=0$ du potentiel vecteur $\vec{A}$:

On a l'expression suivante du potentiel vecteur:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^S \frac{X_s(s')}{|\vec{x}-\vec{X}(s')|}\,ds'}$$

On va rechercher le développement limité de cette expression en $r=0$

Pour cela, on introduit la nouvelle variable d'intégration : $\bar{s}=s'-s$ et on va faire des développements de Taylor en $\bar{s}$ pour faire apparaître les parties singulières de $\vec{A}(\vec{x})$

On va déja calculer le développement limité de $\dfrac{\vec{X_s}(s')}{|\vec{x}-\vec{X}(s')|}$.

$$\vec{X_s}(s') = \vec{\tau}(s') = \vec{\tau}(s) + (s'-s)\,\vec{\tau_s}(s) + O(\bar{s}^2)$$
$$= \vec{\tau}(s) + \bar{s}\,K(s)\,\vec{n}(s) + O(\bar{s}^2)$$

$$\vec{x}-\vec{X}(s') = (\vec{X}(s) + r\,\vec{r}(\phi,s)) - (\vec{X}(s'))$$
$$= (\vec{X}(s) - \vec{X}(s')) + r\,\vec{r}(\phi,s)$$
$$= (-\vec{X_s}(s)\,\bar{s} - \frac{\vec{\tau_s}}{2}(s)\,\bar{s}^2) + r\,\vec{r}(\phi,s) + O(\bar{s}^3)$$
$$= -\vec{\tau}(s)\,\bar{s} - \frac{K(s)}{2}\bar{s}^2\,\vec{n} + r\,\vec{r}(\phi,s) + O(\bar{s}^3)$$

$$|\vec{x} - \vec{X}(s')|^2 = \bar{s}^2 + (r^2 \sin^2\phi) + \left(-\frac{K}{2}\bar{s}^2 + r\cos\phi\right)^2 + O(\bar{s}^3)$$
$$= \bar{s}^2 + r^2 - K\bar{s}^2 r\cos\phi + O(\bar{s}^3)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - X(s')|} \simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{s}^2 + r^2 - K(s)\bar{s}\, r^2 \cos\phi}}$$
$$\simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{s}^2 + r^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - K\dfrac{\bar{s}^2 r}{\bar{s}^2 + r^2}\cos\phi}} \right)$$
$$\simeq \frac{1}{\sqrt{\bar{s}^2 + r^2}} \left( 1 + \frac{1}{2}\frac{r\bar{s}^2}{(r^2 + \bar{s}^2)} K(s)\cos\phi \right)$$

D'où: $$\frac{\vec{\tau}(s')}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|} \simeq \vec{\tau}(s)\left[ \frac{1}{(r^2 + \bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{r\bar{s}^2 K(s)\cos\phi}{2(r^2 + \bar{s}^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \vec{n}(s)K(s)\frac{\bar{s}}{(r^2 + \bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Soit $$F(r,\phi,s,\bar{s}) = \frac{\vec{\tau}(s+\bar{s})}{|\vec{x} - \vec{X}(s+\bar{s})|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^S \frac{\vec{X}_s \, ds'}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-s^-}^{s^+} F(r,\phi,s,\bar{s})\, d\bar{s}$$ $\int_{-s^-}^{+s^+} F(r,\phi,s,\bar{s})\, d\bar{s}$ jusqu'au terme est

où $s^+ + s^- = S$ $s^+ > 0$ $s^- > 0$. On peut prendre $s^+ = s^- = \frac{S}{2}$

Pour trouver le développement limité de $\vec{A}$, on intègre donc un développement limité de $s' = 0$ à $s' = S$, alors que le développement limité n'est valable qu'en $s'$ voisin de $s$. Ceci est convenable car la principale contribution de $\dfrac{\vec{X}_s}{|\vec{x} - \vec{X}(s')|}$ à l'intégrale vient des valeurs que prend cette fonction autour de $s$. On atteindra ainsi les termes singuliers.

Reste à intégrer:
$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2 + \bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\bar{s} = \left[ \ln\left(\bar{s} + \sqrt{r^2 + \bar{s}^2}\right) \right]_{-s^-}^{s^+} = \ln \frac{\left(s^+ + \sqrt{r^2 + s^{+2}}\right)}{\left(-s^- + r^2 + s^{-2}\right)}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\bar{s} = \int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\bar{s} + \left[\frac{-\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

$$= \ln \frac{s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}}{-s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}} - \left[\frac{s^+}{\sqrt{r^2+s^{+2}}} + \frac{s^-}{\sqrt{r^2+s^{-2}}}\right]$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\bar{s} = \left[\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

On a donc :

$$\vec{A} \simeq \frac{r}{4\pi} \left\{ \vec{\tau} \left[ \left(1+\frac{rK\cos\phi}{2}\right) \ln \frac{s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}}{-s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}} - rK\frac{\cos\phi}{2}\left(\frac{s^+}{\sqrt{r^2+s^{+2}}} + \frac{s^-}{\sqrt{r^2+s^{-2}}}\right)\right] + \vec{n}K\left[\sqrt{r^2+s^{+2}} - \sqrt{r^2+s^{-2}}\right] \right\}.$$

On a :

$$\frac{s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}}{-s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}} = \frac{s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}}{-s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}} \; \frac{s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}}{s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}}$$

$$= \frac{\left(s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}\right)\left(s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}\right)}{r^2}$$

On remplace dans l'expression de $\vec{A}$, on additionne et on soustrait par : $\vec{\tau}\left(1+rK\frac{\cos\phi}{2}\right)\ln\frac{r^2}{S^2}$.

On a alors $\vec{A} \sim \vec{A}^s + \vec{A}^F$ où :

$$\vec{A}^s = \frac{r\vec{\tau}}{2\pi} \operatorname{Ln}\frac{S}{r}$$

et

$$\vec{A}^F = \frac{r}{4\pi} \left\{ \vec{\tau} \left[ \left(1+\frac{rK\cos\phi}{2}\right) \ln \frac{\left(s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}}\right)\left(s^- + \sqrt{r^2+s^{-2}}\right)}{S^2} - rK\frac{\cos\phi}{2}\left(\ln\frac{r^2}{S^2} + \frac{s^+}{\sqrt{r^2+s^{+2}}} + \frac{s^-}{\sqrt{r^2+s^{-2}}}\right)\right] + \vec{n}K\left[\sqrt{r^2+s^{+2}} - \sqrt{r^2+s^{-2}}\right] \right\}$$

Comme $\lim_{r\to 0} r\ln r = 0$ et $\lim_{r\to 0} r\cos\phi = 0$, on voit que $\vec{A}^F$ n'est pas singulier en $r=0$ alors que $\vec{A}^s$ l'est.

## 2 Développement limité en $r=0$ de la vitesse:

Au lieu de déterminer la vitesse par la formule $\overrightarrow{Q_e} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$ et le résultat précédent, il est plus astucieux d'utiliser directement la formule:

$$\boxed{Q_e = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^S - \frac{\tau(s')\wedge(X(s')-x(s))}{|X(s')-x(s)|^3}\,ds'}$$

<u>On a:</u>

$$\begin{aligned}
x(s)-X(s') &= (X(s)+r\vec{r}) - X(s') \\
&= r\vec{r} + (X(s)-X(s')) \\
&= \underline{r\vec{r}} - X_s(s)\,\bar{s} - \frac{X_{ss}}{2}\bar{s}^2 - \frac{X_{sss}}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4) \quad \text{avec } \bar{s}=s'-s \\
&= r(\sin\phi\,\vec{b} + \cos\phi\,\vec{n}) - \vec{\tau}\,\bar{s} - K\vec{n}\frac{\bar{s}^2}{2} - \frac{\tau_{ss}}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)
\end{aligned}$$

$$\tau_{ss} = K_{,s}\,\vec{n} + K(T\vec{b} - K\vec{\tau})$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où: } |x-X|^2 &= \left(\bar{s} \mp \frac{K^2}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right)^2 + \left(r\cos\phi - K\frac{\bar{s}^2}{2} - \frac{K_s}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right)^2 \\
&\quad + \left(r\sin\phi - \frac{KT}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right)^2. \\
&= r^2 + \left[\bar{s} \mp \frac{K^2}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right]^2 + \left[\frac{K\bar{s}^2}{2} + \frac{K_s}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right]^2 \\
&\quad + \left[\frac{KT\bar{s}^3}{6} + O(\bar{s}^4)\right]^2 - 2r\cos\phi\left[\frac{K\bar{s}^2}{2} + \frac{K_s}{6}\bar{s}^3 + O(\bar{s}^4)\right] \\
&\quad - 2r\sin\phi\left[\frac{KT\bar{s}^3}{6} + O(\bar{s}^4)\right] \\
&= r^2 + \bar{s}^2 + O(\bar{s}^4) - K\cos\phi\, r\bar{s}^2 - \left(\frac{K_s}{3}\cos\phi + \frac{KT}{3}\sin\phi\right) r\bar{s}^3 + O(r\bar{s}^4)
\end{aligned}$$

$$= r^2 + \bar{s}^2\left[1 + \frac{O(\bar{s}^4)}{r^2+\bar{s}^2} - K\cos\phi\,\frac{r\bar{s}^2}{r^2+\bar{s}^2} - \left(\frac{K_s}{3}\cos\phi + \frac{KT}{3}\sin\phi\right)\frac{r\bar{s}^3}{r^2+\bar{s}^2} + \frac{O(r\bar{s}^4)}{r^2+\bar{s}^2}\right]$$

$$|x-X|^2 = r^2+\bar{s}^2\left[1+\frac{O(\bar{s}^4)}{r^2+\bar{s}^2} - K\cos\phi\,\frac{r\bar{s}^2}{r^2+\bar{s}^2} + \frac{O(r\bar{s}^3)}{r^2+\bar{s}^2}\right]$$

Or : $(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} = 1+\varepsilon\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{15}{8}\right)+\cdots$

$r \to 0$

on va intégrer [illegible]!!

d'où $$\frac{1}{|x-X|^3} = \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{\frac{3}{2}}}\left[1+\frac{3}{2}K\cos\phi\,\frac{r\bar{s}^2}{r^2+\bar{s}^2}+\frac{O(\bar{s}^4)}{r^2+\bar{s}^2}+\frac{O(r\bar{s}^3)}{r^2+\bar{s}^2}\right.$$
$$\left.+\frac{O(\bar{s}^8)}{(r^2+\bar{s}^2)^2}+\frac{O(r\bar{s}^6)}{(r^2+\bar{s}^2)^2}+\frac{O(r^2\bar{s}^4)}{(r^2+\bar{s}^2)^2}+\cdots\right]$$

<u>On a :</u>

$$\tau(s') = \tau(s)+\bar{s}K\vec{n}+\bar{s}^2\,\tau_{ss}+O(\bar{s}^3)$$

$$-\tau(s')\wedge(X(s')-x(s)) = \left[\tau+\bar{s}K\vec{n}+\bar{s}^2\tau_{ss}+O(\bar{s}^3)\right]\wedge\left[r\vec{r}-\tau\bar{s}-\frac{K}{2}\vec{n}\bar{s}^2 - \frac{\tau_{ss}}{6}\bar{s}^3+O(\bar{s}^4)\right]$$

Or $\vec{\tau}\wedge\vec{n}=\vec{b}$ $\quad\vec{\tau}\wedge\vec{r}=\vec{\phi}$ $\quad$ et $\quad\vec{n}\wedge\vec{r}=\sin\phi\,\vec{\tau}$

$\vec{b}\wedge\vec{n} = -\vec{r}\cos\phi$

d'où :

$$-\tau(s')\wedge(X(s')-x(s))$$
$$=\left[r\vec{\phi}+r\sin\phi\,\vec{\tau}K\bar{s}+O(r\bar{s}^2)\right]+\left[\left(-\frac{K}{2}\vec{b}+K\vec{b}\right)\bar{s}^2+O(\bar{s}^3)\right]$$
$$=\frac{K}{2}\vec{b}\,\bar{s}^2+O(\bar{s}^3)+r\vec{\phi}+K\sin\phi\,\vec{\tau}\,r\bar{s}+O(r\bar{s}^2)$$

Il vient alors :

$$\boxed{\begin{aligned}-\frac{\tau(s')\wedge(X(s')-x(s))}{|\vec{x}(s)-X(s')|^3} = {} & \frac{K}{2}\frac{\vec{b}\,\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}+\frac{r\,\vec{\phi}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}+K\sin\phi\,\vec{\tau}\,\frac{r\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}} \\ & +\frac{O(\bar{s}^3)+O(r\bar{s}^2)}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}} \\ & +\frac{3}{2}K\cos\phi\,\frac{r^2\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\vec{\phi}+\frac{O(r^2\bar{s}^3)+O(r\bar{s}^4)+O(\bar{s}^6)}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}} \\ & +\cdots\end{aligned}}$$

$= G(r,\phi,s,\bar{s})$

Pour calculer : $\displaystyle -\!\!\!\!\!\!\oint_0^S \frac{\tau(s')\wedge(X(s')-x(s))}{|x(s)-X(s')|^3}\,ds'$, on a besoin de donner les expressions de quelques intégrales :

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s} = \Big[\ln\big(\bar{s}+\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\big)\Big]_{-s^-}^{s^+}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s} = \Big[\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\Big]_{-s^-}^{s^+}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s} = -\int_{-s^-}^{s^+}\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\,d\bar{s} + \Big[\bar{s}\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\Big]_{-s^-}^{s^+}$$

(intégration par parties)

$$= \int_{-s^-}^{s^+}\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\,d\bar{s} - \int_{-s^-}^{s^+}\frac{r^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s}$$

en écrivant $\bar{s}^2 = \bar{s}^2 + r^2 - r^2$

D'où :
$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s} = -\frac{r^2}{2}\int_{-s^-}^{s^+}\frac{d\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}} + \left[\frac{\bar{s}\sqrt{r^2+\bar{s}^2}}{2}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

$$= -\frac{r^2}{2}\Big[\ln\big(\bar{s}+\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\big)\Big]_{-s^-}^{s^+} + \left[\frac{\bar{s}\sqrt{r^2+\bar{s}^2}}{2}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\,d\bar{s} = \Big[-\,(r^2+\bar{s}^2)^{-1/2}\Big]_{-s^-}^{s^+}$$

Calculons : $\displaystyle\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\,d\bar{s}$ et $\displaystyle\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\,d\bar{s}$

Pour cela, remarquons que :
$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\,d\bar{s} = \int_{-s^-}^{s^+}\frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\,d\bar{s} + \left[-\frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

après une intégration par parties

et que :

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} - r^2 \int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s}$$

en faisant la décomposition $\bar{s}^2 = (\bar{s}^2 + r^2) - r^2$

De ces deux formules, il vient :

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

et
$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \left[\ln\left(\bar{s}+\sqrt{r^2+\bar{s}^2}\right)\right]_{-s^-}^{s^+} + \left[\frac{-\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

On a aussi :

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \int_{-s^-}^{s^+} \frac{3\,\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} + \left[-\frac{\bar{s}^3}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

intégration par parties.

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = \frac{1}{3}\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} + \frac{1}{3}\left[-\frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

intégration par parties.

D'où :

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = \frac{1}{3r^2}\left[\frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\right]_{-s^-}^{s^+} + \frac{1}{3}\left[+\frac{-\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\bar{s}^3}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\right]_{-s^-}^{s^+}$$

On prend $s^- = s^+$ et on fait le développement limité en $r=0$ des intégrales précédentes:

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} = \ln \frac{s^+ + \sqrt{r^2+\bar{s}^2}}{-s^- + \sqrt{r^2+\bar{s}^2}} = \ln \frac{(s^+ + \sqrt{r^2+s^{+2}})(s^- + \sqrt{r^2+s^{+2}})}{r^2}$$

$$= 2\ln\frac{1}{r} + \ln(4\, s^{+2}) + O(r^2)$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} = 0$$ car c'est l'intégrale d'une fonction impaire.

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{1/2}}\, d\bar{s} = O(r^2 \ln r) + 2\, s^{+2} + O(r)$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = 0$$ car c'est l'intégrale d'une fonction impaire.

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{1}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \frac{1}{r^2}\left(2 - \frac{r^2}{s^{+2}}\right) + O(r^2)$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = 2 \ln \frac{1}{r} + \ln(4 s^{+2}) - 2 + O(r^2)$$

$$\begin{aligned}\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} &= 6\, s^{+2} + O(r^2 \ln r) + O(r) - 2\, s^{+2} + O(r) \\ &= O(r^2 \ln r) + O(r) + 4\, s^{+2}\end{aligned}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = \frac{1}{3r^2}\left(2 - \frac{r^2}{s^{+2}}\right) + \frac{1}{3}(-2) + O(r^2)$$

<u>D'où :</u>

$$\begin{aligned}\int_{-s^-}^{s^+} \frac{K}{2}\,\vec{b}\,\frac{\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} &= \frac{K}{2}\,\vec{b}\left(2 \ln \frac{1}{r} + \ln 4 s^{+2} - 2\right) \\ &= K\,\vec{b}\left(\ln \frac{1}{r} + \ln 2\sqrt{s^+ s^-} - 1\right)\end{aligned}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{r\,\vec{\phi}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = \vec{\phi}\,\frac{2}{r} + O(r)$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{K \sin\phi\, \vec{\tau}\, r\, \bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = 0$$

$$\begin{aligned}\int_{-s^-}^{s^+} \frac{3}{2}\, \frac{K \cos\phi\, r^2\, \bar{s}^2\, \vec{\phi}}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} &= \frac{3}{2} K \cos\phi\, \vec{\phi}\, \frac{2}{3} + O(r^2) \\ &= K \cos\phi\, \vec{\phi} + O(r^2)\end{aligned}$$

Les autres termes du développement limité ne font plus apparaître d'autre termes singuliers mais ils font intervenir des termes constants. Par exemple, les premiers termes des développements donnent:

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^3}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = 0 \qquad \int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = O(r^2 \ln r) + O(r) + 4\, s^{+2}$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{r\, \bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s} = O(r \ln r) + O(r) \qquad \int_{-s^-}^{s^+} \frac{r^2\, \bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = O(r \ln r)$$

$$\int_{-s^-}^{s^+} \frac{r\, \bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = O(r \ln r) + O(r) \qquad \int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^6}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s} = O(r^2 \ln r) + O(r) + \frac{19}{3} s^{+2}$$

On voit que $\displaystyle\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^4}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}\, d\bar{s}$ et $\displaystyle\int_{-s^-}^{s^+} \frac{\bar{s}^6}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}\, d\bar{s}$ font apparaître une contribution au terme constant du développement.

On a alors le développement limité suivant:

$$Q_e = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^S - \frac{\tau(s') \wedge (X(s') - x(s))}{|x(s) - X(s')|^3}\, ds' = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-s}^{S-s} G(r,\theta,s,\bar{s})\, d\bar{s} \simeq \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-s^-}^{s^+} G \ldots d\bar{s} \quad s^+ + s^- = S$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\Phi} + \frac{\Gamma K}{4\pi} \left[ \ln \frac{2\sqrt{s^+ s^-}}{r} - 1 \right] \vec{b} + \frac{\Gamma K}{4\pi} \cos\phi\, \vec{\Phi} + \text{termes constants} + O(r \ln r) + \ldots$$

$Q_s = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\Phi} + \dfrac{\Gamma K}{4\pi} \ln \dfrac{1}{r} \vec{b} + \dfrac{\Gamma K}{4\pi} \cos\phi\, \vec{\Phi}$ est la partie singulière du développement. $\dfrac{\Gamma}{4\pi} K \cos\phi\, \vec{\Phi}$ est singulier au sens que c'est une fonction multivalente sur la fibre c'est à dire en $r = 0$.

$$Q_e = Q_s + Q_F$$

où $Q_F$ est le terme constant qu'il reste à préciser.

Soit $\mathcal{F}(t, s+\bar{s}, s) = \dfrac{X(t,s+\bar{s}) - x(t,s)}{|X(t,s+\bar{s}) - x(t,s)|^3} \wedge X_s(t, s+\bar{s})$.

Soit $V$ un voisinage de $\bar{s}=0$ et $I = [-s^-, s^+] \setminus V$

$$Q_e = \frac{\Gamma}{4\pi}\left( \int_I \mathcal{F}(t,s+\bar{s},s)\,d\bar{s} + \int_V \mathcal{F}(t,s+\bar{s},s)\,d\bar{s} \right)$$

Soit $\mathcal{L}$ le développement limité de $\mathcal{F}$ en $\bar{s}=0$ et soit

$$Q_L = \int_{-s^-}^{s^+} \mathcal{L}(t, s+\bar{s}, s)\,d\bar{s}$$

Sur $V$ on peut se servir de $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{F}$.

$$Q_e = \frac{\Gamma}{4\pi}\left( \int_I \mathcal{F}\,d\bar{s} + \int_V \mathcal{L}\,d\bar{s} \right)$$

Or $\displaystyle\int_V \mathcal{L}\,d\bar{s} = \int_{-s^-}^{s^+} \mathcal{L}\,d\bar{s} - \int_I \mathcal{L}\,d\bar{s} = Q_L - \int_I \mathcal{L}\,d\bar{s}$.

Il vient alors $\displaystyle Q_e = \frac{\Gamma}{4\pi}\left( \int_I (\mathcal{F}-\mathcal{L})\,d\bar{s} + Q_L \right)$

---

$\displaystyle\phi(r) = \int_I (\mathcal{F}-\mathcal{L})\,d\bar{s}$ est une intégrale qui dépend du paramètre $r$. $\Psi(r,\bar{s}) = (\mathcal{F}-\mathcal{L})$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times I$. D'après un théorème d'intégration $\phi$ est alors continue sur $\mathbb{R}$ et donc en $0$, c'est à dire que :

$$\lim_{r\to 0} \phi(r) = \phi(0) = \int_I (\mathcal{F}-\mathcal{L})_{(r=0)}\,d\bar{s}$$

La partie singulière du développement de $Q_e$ en $r=0$ ne peut donc être que dans $Q_L$. Si on prend une infinité de termes dans $\mathcal{L}$, on peut penser que $\mathcal{F} = \mathcal{L}$. Pour notre part, on limite le développement en prenant :

$$\mathcal{L}(t, s+\bar{s}, s) = \frac{K}{2}\,\frac{\vec{b}\,\bar{s}^2}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}} + \frac{r\,\vec{\Phi}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}} + \frac{K\sin\phi\,\vec{C}\,r\,\bar{s}}{(r^2+\bar{s}^2)^{3/2}}$$
$$+ \frac{3}{2}K\cos\phi\,\frac{r\,\bar{s}^2\,\vec{\Phi}}{(r^2+\bar{s}^2)^{5/2}}$$

On a alors : $Q_L = Q_S + \frac{\Gamma K}{4\pi}\left[\ln 2\sqrt{s^+ s^-} - 1\right]\vec{b}$

Soit $F(t, s+\bar{s}, s) = \frac{X(t,s+\bar{s}) - X(t,s)}{|X(t,s+\bar{s}) - X(t,s)|^3} \wedge X_s(t, s+\bar{s})$

Il vient : $(\mathcal{F} - \mathcal{L})_{(r=0)} = F - \frac{K}{2}\vec{b}\frac{\bar{s}^2}{(\bar{s}^2)^{3/2}} = F - \frac{K}{2}\vec{b}\frac{1}{|\bar{s}|}$

On remarque que $(\mathcal{F} - \mathcal{L})_{(r=0)} = \frac{O(\bar{s}^3)}{(\bar{s}^2)^{3/2}} = O(\mathrm{sgn}(\bar{s}))$

$$= \frac{\tau \wedge \tau_{ss}}{3}\,\mathrm{sgn}(\bar{s}) + O(\bar{s})\,\mathrm{sgn}(\bar{s})$$

On intègre une fonction qui est donc continue sur $[-s^-, s^+]$.
Si, dans le développement de $\mathcal{L}$, on tient en compte le terme $\frac{O(\bar{s}^3)}{(r^2 + \bar{s}^2)^{3/2}}$ de valeur $\frac{\vec{\tau} \wedge \vec{\tau}_{ss}}{3}\,\mathrm{sgn}(\bar{s})$ en $r=0$,

alors, dans $\int_V \mathcal{L}\,d\bar{s}$, il y a en plus $\int_V \frac{\vec{\tau} \wedge \vec{\tau}_{ss}}{3}\,\mathrm{sgn}(\bar{s})\,d\bar{s}$

On a finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} Q_F &= \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{-s^-}^{s^+} G(t, s+\bar{s}, s)\,d\bar{s} + \left[\ln 2\sqrt{s^+ s^-} - 1\right] K\vec{b} \\ \text{où } G(t, s', s) &= F(t, s', s) - \frac{K}{2}\vec{b}/|\bar{s}| \quad \text{si } s' \neq s \\ &= \frac{\vec{\tau} \wedge \vec{B}}{3}\,\mathrm{sgn}(s' - s) \quad \text{si } s' = s \pm 0 \end{aligned}}$$

Avec :

$$\boxed{\begin{aligned} F(t, s', s) &= \frac{X(t,s') - X(t,s)}{|X(t,s') - X(t,s)|^3} \wedge X_s(t, s') \\ B(t,s) &= \tau_{ss} = -K^2\vec{\tau} + \frac{\partial K}{\partial s}\vec{n} + K T\vec{b} \end{aligned}}$$

On remarque qu'on peut laisser tomber le terme $-K^2\vec{\tau}$ dans l'expression de $B$ car il n'intervient pas dans $\vec{\tau} \wedge \vec{B}$ puisque $\vec{\tau} \wedge \vec{\tau} = 0$.

Dans l'expression de $G$, Ting a $G = F - 2K\vec{b}/|\bar{s}|$ au lieu de $G = F - \frac{K}{2}\vec{b}/|\bar{s}|$.