Annexe 12

Validation du programme.

Influence des paramètres.

Valeurs de convergence.

Lors de la programmation, on a fait très attention de bien rentrer les bonnes formules, de ne pas faire d'erreurs de programmation (mauvais passage de variables, ...), de bien suivre les algorithmes numériques et d'organiser le plus adéquatement possible les procédures et les programmes entre eux.

Cependant, afin de valider le programme, il a fallu tracer des courbes intermédiaires de calcul, observer leur convergence lorsque l'on augmente la discrétisation et regarder les influences de certains paramètres.

Nous rappelons que l'équation intégrodifférentielle spatiotemporelle est résolue à l'aide d'une discrétisation temporelle de pas de temps dt (méthode d'Euler), ce qui donne une équation différentielle spatiale résolue par une discrétisation spatiale de pas $ds = 2\pi / N$ (méthode des différences finies) qui donne un système à résoudre $X = f(X)$. Il est résolu par une itération de recherche de zero : $x^{i+1} = f(x^i)$. C'est le paramètre epsi qui estime que l'on a obtenu le zero. A ces 3 paramètres de convergence : dt, N, epsi, se rajoute le choix du voisinage V dans l'intégrale :

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\int_{[-\pi,\pi]/V} G\cdot ds' + \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{V} G\,ds'.$$

La valeur de Q^f doit converger avec un choix d'un voisinage V de plus en plus petit.

1 Les caractéristiques d'un anneau :

On vérifie sur l'anneau initial.

11 Grandeurs dérivées :

Ce sont $X_{,s}$; $X_{,ss}$; σ ; K ; T ; $K_{,s}$. On constate une convergence rapide avec N. Pour N=20 à 30, la méthode de dérivation numérique a déjà convergé.

Les erreurs dues au nombre limité de chiffre de l'ordinateur (troncation) n'ont une influence prépondérante que vers un N de l'ordre de 10^8 (pour 9 chiffres) et donc n'interviennent pas autour de N=30.

12 Grandeurs intégrées :

C'est par exemple $S=\int_{-\pi}^{\pi}\sigma\,ds$. On constate également un convergence rapide avec N. Pour N=20 à 30, la méthode d'intégration numérique a déjà convergé.

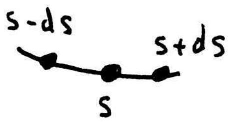
Les erreurs dues à la troncation des chiffres n'ont pas d'influence autour de N=30. Pour une troncation sur 9 chiffres, elles deviennent prépondérantes que pour $N=10^4$.

2 L' intégrale de l'équation intégrodifférentielle :

C'est l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} G\, ds'$ qui est dans l'expression du terme Q_F.

$$\int_{-\pi}^{\pi} G\, ds' = \int_{[-\pi,\pi]\setminus V} G\, ds' + \int_{V} G\, ds'$$

Dans le programme, on a un voisinage V lié à la discrétisation car **il** a été choisi comme suit :



$$V = [s-ds, s+ds] \qquad ds = 2\pi/N$$

V diminue donc lorsque N augmente.

On a observé la convergence de Q_F avec N sur les deux situations différentes qui suivent.

21 Première situation :

On se place au niveau du premier pas de l'itération temporelle, au début de l'itération $x^1 = f(x^0)$ et au niveau de la première équation du système, c'est à dire à l'expression de Q_F au noeud n°1.

On a constaté une convergence avec N, dès N = 20;30, de la méthode d'intégration numérique ainsi que de l'influence du voisinage V.

On en a profité pour vérifier la convergence vers une constante de :

$$G = F(t, s', s) - \frac{K(s)}{2} \vec{b}(s) \frac{6(s')}{|\lambda(t, s', s)|}$$ lorsque s' tend vers s : $s' \to s$

22 Deuxième situation :

On se place désormais au premier pas de l'itération temporelle, à la fin de l'itération $x^{i+1} = f(x^i)$ de recherche de zero et toujours au niveau de la première équation du système. On a aussi constaté une convergence avec N dès N = 20;30 pour le terme Q_F.

3 La recherche de zéro : X = F(X) et la méthode des différences finies :

On est toujours au premier pas de l'itération temporelle.

31 La recherche de zéro :

Le pas de temps ainsi que la valeur du paramètre epsi étant fixés, on ne constate une convergence de la méthode itérative de recherche de zero que jusqu'à une certaine valeur de N à partir de laquelle (N = 80 par exemple pour dt = 0,001) la méthode de recherche de zero par itération ne converge plus vers le zero mais diverge. Lorsqu'il y a convergence, à N fixé, c'est le paramètre epsi = 10^{-3} qui fixe la valeur de la limite atteinte.

32 Les différences finies :

On remarque que lorsque l'on augmente N, mais avant de ne plus trouver de zero, les zeros obtenus convergent vers une même valeur de zero. A partir de N = 20;30 il y a déjà convergence des zeros vers le même zéro. On peut donc considérer que la méthode des différences finies a convergé à partir de N = 20;30.

4 La méthode d'Euler :

On se place à $N = 30$ et $epsi = 10^{-3}$. On cherche l'évolution de l'anneau elliptique pour différents pas de temps dt.

On compare les fonctions $C_v(t)$ et $X(t, N=1)$ que l'on a obtenues. On note une convergence de ces fonctions vers des fonctions limites lorsque le pas de temps dt est diminué.

Pour l'ellipse on peut ainsi considérer que l'on a convergé à partir de $dt = 10^{-2}$ pour un espace de temps qui est celui de la période.