INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

UNIVERSITE DE NANCY I

MARGERIT Daniel
DEA Mécanique et Énergétique
Université de Nancy 1

Septembre 1993

Rapport de Stage
DEA:
Une Étude d'un Anneau de Vorticité par Développement Asymptotique Raccordé
ANNEXES

Effectué au LEMTA

Jury:

Tuteur : J.P BRANCHER
Examinateurs:
P HUERRE
J.M CHOMAZ
O PAULIQUEN

MARGERIT D

Plan des ANNEXES

1 Le Problème intérieur et les équations dans le système de coordonnées curvilignes.
2 Le Problème extérieur et son développement limité en r=0
3 Développement asymptotique de la ligne centrale de l'anneau
4 Résolution des équations données par le premier ordre. Partie antisymétrique de la solution.
5 Équations du deuxième ordre. Équations de Compatibilité.
6 Calculs divers -Expression de $C\omega(t)$ et $Cv(t)$
7 Passage d'un paramétrage sans σ à un paramétrage avec σ.
8 Erratum
9 Description des Algorithmes des différents programmes.
10 Les variables du programme pmultianneaux.f
11 Description des routines et du programme principal du fichier pmultianneaux.f
12 Validation du programme-Influence des paramètres-Valeurs de convergence
13 Visualisation graphique-Description des routines et du programme principal du fichier xpdessin.m
14 Résultats graphiques de simulations numériques
15 Listing des programmes.

Annexe 1

Le problème intérieur et les équations dans le système de coordonnées curvilignes:

On définit le problème intérieur en utilisant la variable de dilatation $\bar{r} = r/\varepsilon$

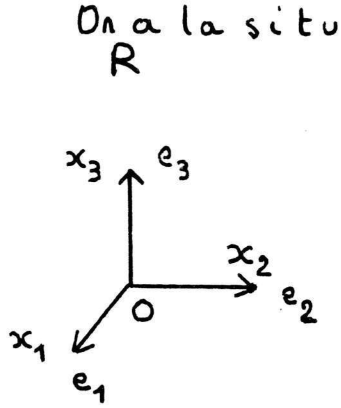
1 Les équations dans le système de coordonnées curvilignes:

Pour développer le problème intérieur, il nous faudra écrire l'équation de continuité et celle de Navier Stokes sur les coordonnées (r, θ, s).

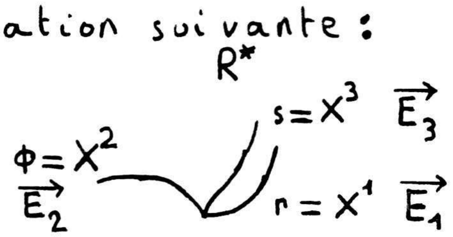
11 Changement de coordonnées curvilignes - Changement de référentiel:

111

On a la situation suivante:



base cartésienne fixe dans R



base curviligne mobile dans R

Le changement de coordonnées est défini par la relation:

$$\vec{x} = \vec{X}(s,t) + r\,\vec{r}(\phi, s)$$

(attention de ne pas confondre le profil $\vec{X}(s,t)$ de la ligne centrale et les coordonnées curvilignes X^i $i = 1$ à 3)

C'est une relation du type: $\boxed{x^i = G^i(X^j, \underline{\underline{t}})}$ (A1)

↳ c'est déjà un mouvement de MMC = mvt du ref

Le changement de coordonnées dépend ici du temps. R est le référentiel lié à $(O, \vec{e_i})$. Pour un observateur de R, <u>les vecteurs $\vec{e_i}$ ne dépendent pas du temps</u>, alors que les vecteurs E_i en dépendent.

R^* est le référentiel lié à (r, ϕ, s). Pour un observateur de R^* <u>les vecteurs $\vec{E_i}$ ne dépendent pas du temps</u>, alors que les vecteurs $\vec{e_i}$ en dépendent.

$E_i = \left.\frac{d\vec{OM}}{dX_i}\right|_{t,\, X_j,\, j \neq i} = f(t, X_i)$

<u>A t fixé</u>, on a un changement de coordonnées curvilignes habituel. Donc, on a :

$$dx^i = \frac{\partial G^i}{\partial X^j}\, dX^j = a^i_j\, dX^j \qquad A = (a^i_j)$$

$$dX^i = b^i_j\, dx^j \qquad B = (b^i_j)$$

$$d\vec{OM} = dx^i\, \vec{e_i} = dX^j\, \vec{E_j} \qquad AB = 1$$

$$E_j = e_i\, a^i_j$$

Un vecteur $\vec{F}$ vérifie :

$$\vec{F} = f^i\, \vec{e_i} = F^i\, \vec{E_i} \quad \text{avec } \underline{F^i = b^i_j\, f^j}$$

Comme les vecteurs $\vec{E_i}$ dépendent des coordonnées, on a : $\frac{\partial E_k}{\partial X^i} = \Gamma^j_{ki}\, E_j$ où Γ^j_{ki} est le symbole de Christoffel.

On a : $$\frac{\partial \vec{F}}{\partial X^i} = \left(\frac{\partial F^k}{\partial X^i} + F^j\, \Gamma^k_{ji}\right) E_k = \nabla_i\, F^k\, \vec{E_k}$$

L'opérateur ∇_i est l'opérateur de dérivation covariante.

Comme autre changement de référentiel et donc comme exemple de fonction G, on a la situation habituelle du changement de repère cartésien mobile. On a alors :

$$\vec{x} = x_i\, \vec{e_i} = \vec{OO'}(t) + X_i\, E_i(t)$$ où E_i est une base cartésienne mobile de mouvement connu et de centre O'.

Un autre exemple simple de fonction G est celui d'une fonction qui ne dépend pas de t. On a alors un simple changement de coordonnées.

112 Mouvement du fluide repéré dans R :

Le mouvement est défini par la fonction :

$$\boxed{x^j = x^j(\varepsilon^i, t)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^i = x^i(\varepsilon^i, 0)$$

On a par définition de la vitesse :

$$\vec{v}(\varepsilon^i, t) = \frac{\partial^R \vec{x}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)_{\varepsilon_i} e_j = v^j e_j \text{ en Lagrange}$$

$$= \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ en Euler (champ vectoriel)}$$

Lorsque l'on dérive un vecteur par rapport au temps $\frac{\partial \vec{\ }}{\partial t}$, il faut préciser le référentiel.

$\frac{\partial^R \vec{x}}{\partial t}$ est une dérivation dans R, où les e_j sont fixes, d'où $\frac{\partial^R \vec{x}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)_{\varepsilon_i} e_j$

On a pour l'accélération :

$$\vec{a}(\varepsilon^i, t) = \left(\frac{\partial^R \vec{v}(\varepsilon^i, t)}{\partial t}\right)_{\varepsilon^i} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial t}\right)_{\varepsilon^i} e_j = a^j e_j \text{ en Lagrange}$$

$$= \frac{d^R \vec{v}}{dt} = \left.\frac{\partial^R \vec{v}(x,t)}{\partial t}\right|_{x^i} + \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\right|_t \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\varepsilon^i}$$

$$= \left.\frac{\partial^R \vec{v}(x,t)}{\partial t}\right|_{x^i} + \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\right|_t v^i$$

$$= \left.\frac{\partial^R \vec{v}}{\partial t}\right|_{x_i} + \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{a}(x,t) \text{ en Euler}$$

113 Mouvement du fluide repéré dans R* :

Le mouvement est défini par la fonction :

$$\boxed{x^j = X^j(\Sigma^i, t)} \quad \text{avec} \quad \Sigma^i = X^i(\Sigma^i, 0)$$

On a pour définition de la vitesse :

def $$\boxed{\vec{v}^* = \left(\frac{\partial X^j}{\partial t}\right)_{\Sigma_i} E_j} = V^{*j} E_j \text{ en Lagrange}$$

$$= \vec{v}^*(X^j, t) \text{ en Euler.}$$

Notation -

def

On a pour l'accélération:

$$\vec{a}^*(\Sigma^i,t) = \left(\frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*(\Sigma^i,t)}{\partial t}\right)_{\Sigma^i} = \boxed{\left(\frac{\partial V^{*j}}{\partial t}\right)_{\Sigma^i} E_j} = A^{*j}E_j$$

$$= \frac{d^{R^*}\vec{v}^*(x^i,t)}{dt} = \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t}\bigg|_{x^i} + \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial X_i}\bigg|_t \frac{\partial X_i}{\partial t}\bigg|_{\Sigma_i}$$

$$= \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t}\bigg|_{X_i} + \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial X_i}\bigg|_t V^{*i}$$

$$= \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{v}^*\cdot\vec{v}^* = \vec{a}^*(X_i,t)$$

en Euler.

114 Relation entre $\vec{v}$ et $\vec{v}^*$:

On va faire des dérivées de fonctions composées pour faire apparaître $\vec{v}^*$ à partir de $\vec{v}$.

$\varepsilon^\ell = G^\ell(\Sigma^q,0)$

On a : $X^i = X^i(\Sigma^i,t)$ $\qquad x^l = G^l(X^k,t)$

d'où : $x^l = G^l(X^k(\Sigma^k,t),t) = x^l(\varepsilon^j,t)$

Il vient alors :

$$v^l(x^j,t) = \left(\frac{\partial x^l}{\partial t}\right)_{\varepsilon^j} = \frac{\partial G^l}{\partial t}\bigg|_{X^k} + \frac{\partial G^l}{\partial X_k}\bigg|_t \frac{\partial X_k}{\partial t}\bigg|_{\Sigma_i}$$

$$= \frac{\partial G^l}{\partial t}\bigg|_{X^k} + a^l_k V^{*k}$$

si c'est bon

D'où
$$\vec{v} = v^l\vec{e_l} = \frac{\partial G^l}{\partial t}\bigg|_{X^k}\vec{e_l} + V^{*k}a^l_k\vec{e_l}$$

$$= \frac{\partial^R\vec{G}}{\partial t}\bigg|_{X^k} + \vec{v}^*$$

vitesse du ref

On a donc :
$$\boxed{\vec{v} = \frac{\partial^R\vec{G}}{\partial t}\bigg|_{X^k} + \vec{v}^*}$$

Si $\vec{G}$ est indépendant de t, on a trivialement $\vec{v} = \vec{v}^*$. Si $\vec{G}$ correspond à un changement de repère cartésien mobile, la formule ci-dessus permet de retrouver les formules de changement de référentiel habituelles. Cette formule généralise donc la situation classique.

Dans notre cas $\vec{x} \overset{G}{=} \vec{X}(s,t) + r\vec{r}(\phi,s)$

d'où
$$\vec{v} = \frac{\partial^R\vec{X}}{\partial t}\bigg|_s + \frac{\partial^R r\vec{r}}{\partial t}\bigg|_{X^k} + \vec{v}^*$$

On note $\dot{X} = \left.\frac{{}^R\partial \vec{X}}{\partial t}\right|_s$ et $\vec{r}_{,t} = \left.\frac{{}^R\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{X_k}$

$\vec{v} = \dot{X} + r\,\vec{r}_{,t} + \vec{v}^*$

Posons $\vec{V} = \vec{v}^* + r\,\vec{r}_{,t}$

$\frac{{}^R d\vec{PM}}{dt} = r\,\vec{r}_{,t}$ est la vitesse de rotation autour de la fibre C

$\vec{v}$ se décompose en trois contributions:

$\dot{X}$ déplacement de la fibre

$r\,\vec{r}_{,t}$ rotation d'un point fixe de R^* autour de C

$\vec{v}^*$ déplacement du point par rapport à R^*

$$\boxed{\vec{v} = \dot{X}(t,s) + \vec{V}}$$

On décompose $\vec{V}$ sur $(\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{\tau})$:

$$\vec{V} = u\vec{r} + v\vec{\phi} + w\vec{\tau}$$

$u\vec{r}$: vitesse radiale

$v\vec{\theta}$: vitesse circomférentielle

$w\vec{\tau}$: vitesse axiale.

12 Conservation de la masse:

On a : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

Or $\vec{v} = \dot{X} + \vec{V}$ d'où $\operatorname{div} \dot{X} + \operatorname{div} \vec{V} = 0$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r h_3}\left[(u r h_3)_r + (h_3 v)_\theta + r w_s \right]$$

en utilisant la formule de la divergence

$\dot{X}(s,t) = \left.\frac{{}^R\partial \vec{X}}{\partial t}\right|_s$. Comme on a une dérivée de $\vec{X}$ dans R, il faut développer $\dot{X}$ sur la base $\vec{e_i}$, afin d'utiliser le fait que l'on dérive dans R: $\dot{X}(s,t) = \dot{X}^i(s,t)\, e_i$.

On est donc amené à faire la divergence de $\dot{X}$ sur la base cartésienne $(O, \vec{e_i})$ selon la formule classique:

$$\operatorname{div} \dot{X} = \left.\frac{\partial \dot{X}^i}{\partial x^i}\right|_{x^j}$$

Comme $\vec{X}(s,t)$ est une fonction de s, on revient aux coordonnées (r,θ,s) en faisant une dérivée de fonctions composées:

$$\operatorname{div} \dot{X} = \frac{\partial \dot{X}^i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x^i} = \dot{X}_s \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} s$$

On a mis $\operatorname{div} \dot{X}$ sous une forme intrinsèque. On va pouvoir projeter sur les vecteurs de base $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$.

On utilise la formule du gradient en coordonnées curvilignes:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, s = \left(\frac{\partial s}{\partial \Lambda^1}, \frac{\partial s}{\partial \Lambda^2}, \frac{\partial s}{\partial \Lambda^3}\right) \text{ sur } (\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$$

$$= \left(0, 0, \frac{1}{h_3}\right) = \frac{\vec{\tau}}{h_3} \quad \text{d'où } \operatorname{div} \dot{X} = \frac{\vec{\tau}}{h_3} \cdot \dot{X}_s$$

On a donc:

$$(u_r h_3)_r + (h_3 v)_\theta + r w_s + r h_3 \dot{X}_s \cdot \frac{\vec{\tau}}{h_3} = 0$$

$$\boxed{(u_r h_3)_r + (h_3 v)_\theta + r w_s + r \dot{X}_s \cdot \vec{\tau} = 0} \quad (A2)$$

Il est important d'avoir bien vu les différentes étapes du calcul précédent, car on aura toujours la même démarche de calcul dans la suite.

Il faut bien noter que l'on ne peut pas inverser les dérivations dans l'expression: $\dot{X}_s = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)}{\partial s}$. Cela est du au fait que les vecteurs de base (E^i) dépendent du temps dans R et de l'espace.

13 Calcul du rotationnel:

$$\vec{v} = \dot{X} + \vec{V} \quad \text{d'ou } \vec{\Omega} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \dot{X}(t,s)$$

Comme précédement, puisque $\dot{X}$ est une dérivée en temps dans R, on écrit: $\dot{X}(t,s) = \dot{X}^i(s,t)\, e_i$ et on écrit le rotationnel habituel sur (e_i).

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{X}^3}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{X}^1}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{X}^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{X}^2}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{X}^1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\text{sur } \vec{e_i}} = \begin{pmatrix} \dot{X}^3_s \operatorname{grad}^2 s - \dot{X}^2_s \operatorname{grad}^3 s \\ \dot{X}^1_s \operatorname{grad}^3 s - \dot{X}^3_s \operatorname{grad}^1 s \\ \dot{X}^2_s \operatorname{grad}^1 s - \dot{X}^1_s \operatorname{grad}^2 s \end{pmatrix}_{\text{sur } \vec{e_i}}$$

On a utilisée la formule de dérivation de fonctions composées.

Il vient : $\overrightarrow{rot}\,\dot{X} = \overrightarrow{grad}\,s \wedge \dot{X}_s$

C'est une forme intrinsèque.

Or $\overrightarrow{grad}\,s = \dfrac{\vec{\tau}}{h_3}$ d'ou $\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\,\vec{V} + \dfrac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \dot{X}_s$

On supposera que $\dfrac{\vec{\tau}}{h_3} \wedge \dot{X}_s = 0$

Il vient alors $\boxed{\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \overrightarrow{rot}\,\vec{V}}$

14 Calcul de l'accélération :

On a $\vec{v} = \dot{X} + \vec{V}$ et $a(x^i,t) = \left(\dfrac{\partial^R \vec{v}(\varepsilon^i,t)}{\partial t}\right)_{\varepsilon^i}$

Il vient donc : $a(x^i,t) = \left(\dfrac{\partial^R \dot{X}(x^k(\varepsilon^k,t))}{\partial t}\right)_{\varepsilon^j} + \left(\dfrac{\partial^R V(x^k(\varepsilon^k,t),t)}{\partial t}\right)_{\varepsilon^j}$

$\left(\dfrac{\partial^R V(x^k(\varepsilon^k,t),t)}{\partial t}\right)_{\varepsilon^j} = \dfrac{d^R V}{dt}$: dérivée particulaire dans R.

Pour la dérivée de $\dot{X}$, on utilise une dérivée de fonctions composées, afin d'avoir une description d'Euler :

$$\left(\frac{\partial^R \dot{X}(x^k(\varepsilon^k,t),t)}{\partial t}\right)_{\varepsilon^j} = \left(\frac{\partial^R \dot{X}}{\partial t}\right)_{x^k} + \left.\frac{\partial \dot{X}}{\partial x_k}\right|_t \left.\frac{\partial x^k}{\partial t}\right|_{\varepsilon^k}$$

$$= \ddot{X} + \left.\frac{\partial \dot{X}}{\partial s}\right|_t \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\varepsilon^3} \quad \text{car } \dot{X} = \dot{X}(x^3,t)$$

Or $\left.\dfrac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\varepsilon^3} = V^{*3}$: troisième composante sur la base curviligne de la vitesse dans le référentiel R^*.

$V^{*3} = \dfrac{\vec{v}^*}{h_3} \cdot \vec{\tau}$ car le troisième vecteur de base dans (r,θ,s) est $h_3\,\vec{\tau}$.

Comme $\vec{V} = r\,\vec{r}_t + \vec{v}^*$ on a $\vec{V}\cdot\vec{\tau} = r\,\vec{r}_t\cdot\vec{\tau} + \vec{v}^*\cdot\vec{\tau}$

$\vec{V}\cdot\vec{\tau} = r\,\vec{r}_t\cdot\vec{\tau} + V^{*3}\,h_3$

$h_3\,V^{*3} = -r\,\vec{r}_t\cdot\vec{\tau} + \vec{V}\cdot\vec{\tau}$

Comme $\vec{V} = u\vec{r} + v\vec{\theta} + w\vec{\tau}$, on a $\vec{V}\cdot\vec{\tau} = w$ et donc: $V^{*3} = \frac{1}{h_3}(\omega - r\,\overrightarrow{r_t}\cdot\overrightarrow{\tau})$

Finalement, on a l'expression suivante de l'accélération:

$$\boxed{a(x^i,t) = \ddot{X} + \frac{\dot{X}_s}{h_3}(\omega - r\,\overrightarrow{r_t}\cdot\overrightarrow{\tau}) + \frac{d^R\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d^R\overrightarrow{v}}{dt}}$$

acc d'entrain coriolis/q

15 Equation de NavierStokes:

Soit $p^* = P/\rho$, que l'on notera p.

On a l'équation de Navier Stokes dans R:

$$\frac{d^R\overrightarrow{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}\,p + \nu\,\Delta\overrightarrow{v}$$

On veut faire apparaître la vitesse $\overrightarrow{V}$ dans cette équation. Au paragraphe précédant, on a déjà trouvé l'expression du premier terme de cette équation. Il nous reste à déterminer l'expression en $\overrightarrow{V}$ du membre de droite en remplaçant $\overrightarrow{v} = \dot{X} + \overrightarrow{V}$ dans $\Delta\overrightarrow{v}$.

$$\Delta\overrightarrow{v} = \Delta\dot{X} + \Delta\overrightarrow{V}$$

$$\Delta\dot{X} = div(\overrightarrow{grad}\,\dot{X})$$

On exprime que $\dot{X}$ est une dérivée dans R en écrivant:

$$\dot{X} = \dot{X}^i e_i$$

On utilise l'expression classique du gradient dans la base cartésienne (e_i):

$$\overrightarrow{grad}\,\dot{X} = \left(\frac{\partial\dot{X}^i}{\partial x_j}\right) \overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}$$

Comme $\dot{X}$ est une fonction des coordonnées curvilignes (r,θ,s): $\dot{X} = \dot{X}(s,t)$, on se ramène à ces coordonnées en faisant une dérivée de fonctions composées.

$$\frac{\partial\dot{X}^i}{\partial x_j} = \frac{\partial\dot{X}^i}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_j} = \dot{X}^i_s\,grad^j s$$

D'où $\overrightarrow{grad}\,\dot{X} = \dot{X}^i_s\,grad^j s\,\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j} = \dot{X}_s\otimes\overrightarrow{grad}\,s$

On s'est donc ramené à une forme intrinsèque : $\dot{X}_s\otimes\overrightarrow{grad}\,s$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}\, s = \dfrac{\vec{\tau}}{h_3}$ en utilisant l'expression du gradient sur (r, θ, s).

On a donc : $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, \dot{X} = \dot{X}_s \otimes \dfrac{\vec{\tau}}{h_3}$

Si $\vec{\vec{A}}(s,t)$ est un tenseur, on a :

$$\operatorname{div} \vec{\vec{A}} = \operatorname{div}(a^{ij}\, e_i \otimes e_j) = \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x_j}\right) e_i$$

$$= \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) e_i = \vec{\vec{A}}_s \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, s$$

$$= \vec{\vec{A}}_s \cdot \frac{\vec{\tau}}{h_3}$$

Si on prend $\vec{\vec{A}}(s,t) = \text{grad}\, \dot{X}$, on a donc :

$$\Delta \dot{X} = \left(\dot{X}_s \otimes \frac{\vec{\tau}}{h_3}\right)_s \frac{\vec{\tau}}{h_3} = \frac{1}{h_3}\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3} \otimes \vec{\tau}\right)_s \vec{\tau}.$$

Or en ~~écr~~ dérivant le produit tensoriel comme un produit, il vient :

$$\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3} \otimes \vec{\tau}\right)_s = \left[\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3}\right)_s \otimes \vec{\tau}\right]\vec{\tau} + \left[\frac{\dot{X}_s}{h_3} \otimes \vec{\tau}_s\right]\vec{\tau}$$

Or $\vec{\tau}_s = K\vec{n}$ d'où :

$$\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3} \otimes \vec{\tau}_s\right)\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \dfrac{\dot{X}_s}{h_3} & \vec{0} \end{pmatrix}_{\vec{\tau},\vec{n},\vec{b}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{\tau},\vec{n},\vec{b}} = \vec{0}$$

Et $$\left(\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3}\right)_s \otimes \vec{\tau}\right)\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} & \left(\dfrac{\dot{X}_s}{h_3}\right)_s \end{pmatrix}_{\vec{r},\vec{\theta},\vec{\tau}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\vec{r},\vec{\theta},\vec{\tau}}$$

$$= \left(\frac{\dot{X}_s}{h_3}\right)_s$$

Il vient donc :

$$\Delta \dot{X} = \frac{1}{h_3}\left(\frac{\dot{X}_s}{h_3}\right)_s$$

· D'où l'expression de l'équation de Navier Stokes :

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{\dot{X}_s}{h_3}\left(\omega - r\,\vec{r}_t \cdot \vec{\tau}\right) + \frac{d^R V}{dt} = -\nabla p + \frac{\nu}{h_3}\left(\frac{1}{h_3}\dot{X}_s\right)_s + \nu \Delta \vec{V}} \quad (A3)$$

Il est à noter que toutes les dérivées en temps sont des dérivées dans le référentiel R.

Pour terminer, il nous reste à écrire, en fonction des coordonnées (r, θ, s) et sur la base $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau})$ les expressions de

$\vec{\nabla} - $ naïf ?

$$\vec{\nabla} p = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p \quad \text{et de} \quad \frac{d^R \vec{V}}{dt} = \left.\frac{\partial^R \vec{V}}{\partial t}\right|_{X_K} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{V} . \vec{V}$$

accélération + courbure/2.

Pour cela, on utilise les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}$ données dans le chapitre 2 p13 ainsi que les relations :

$$d\Lambda_1 = dr \qquad d\Lambda_2 = r\, d\theta \quad \text{et} \quad d\Lambda_3 = h_3\, ds$$

On en profite pour faire apparaître $\bar{r}$ en utilisant $r = \varepsilon \bar{r}$.

Il vient alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\tau}}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p = \left(\varepsilon^{-1} \frac{\partial p}{\partial \bar{r}}, \frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\vec{\bar{r}}, \vec{\theta}, \vec{\tau}}} \quad (A3')$$

On note t^i_j les composantes de $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{V}$ sur $\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{\tau}$

On sait qu'on a $\vec{V} = (u, v, w)$ sur $\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{\tau}$

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{V} . \vec{V} = \begin{pmatrix} t^1_1 u + t^1_2 v + t^1_3 w \\ t^2_1 u + t^2_2 v + t^2_3 w \\ t^3_1 u + t^3_2 v + t^3_3 w \end{pmatrix}_{\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{\tau}}} \quad (A3'')$$

Et pour $\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{V}$:

$$t^1_1 = \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \qquad t^2_2 = \frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{2 r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r}$$

$$t^3_3 = \frac{\partial w}{h_3 \partial s} + \frac{u}{2 h_3^2} \frac{\partial h_3^2}{\partial r} + \frac{v}{2 h_3^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_3^2}{\partial \theta}$$

$$t^1_2 = \frac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{2 r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \qquad t^1_3 = \frac{\partial u}{h_3 \partial s} - \frac{w}{2 h_3^2} \frac{\partial h_3^2}{\partial r}$$

$$t^2_1 = \frac{\partial v}{\partial r} \qquad t^2_3 = \frac{\partial v}{h_3 \partial s} - \frac{w}{2 h_3^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_3^2}{\partial \theta}$$

$$t^3_1 = \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} \qquad t^3_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} .$$

En utilisant l'expression de h_3 :
$h_3 = \sigma(1 - K r \cos(\theta+\theta_0))$, il vient finalement:

$$\boxed{\begin{aligned}
t_1^1 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \\
t_2^2 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\bar{r}\,\partial\theta} + \frac{u}{\bar{r}}\,\varepsilon^{-1} \\
t_3^3 &= \frac{\partial w}{h_3\,\partial s} + \frac{u}{h_3}\,\sigma(-K\cos(\theta+\theta_0)) + \frac{v}{h_3}\,\sigma(K\sin(\theta+\theta_0)) \\
t_2^1 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\bar{r}\,\partial\theta} - \frac{v}{\bar{r}}\,\varepsilon^{-1} \\
t_3^1 &= \frac{\partial u}{h_3\,\partial s} - \frac{w}{h_3}\,\sigma(-K\cos(\theta+\theta_0)) \\
t_1^2 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \\
t_3^2 &= \frac{\partial v}{h_3\,\partial s} - \frac{w\sigma}{h_3}(K\sin(\theta+\theta_0)) \\
t_1^3 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} \\
t_2^3 &= \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\bar{r}\,\partial\theta}
\end{aligned}} \qquad (A3''')$$

Afin d'accéder à la vorticité, projetons également $\vec{\Omega} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$ en utilisant les formules du chapitre 2 p13

$$\vec{\Omega} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(w h_3)}{h_3 r\,\partial\theta} - \dfrac{\partial(v r)}{r h_3\,\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{h_3\,\partial s} - \dfrac{\partial(w h_3)}{h_3\,\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial(v r)}{r\,\partial r} - \dfrac{\partial u}{r\,\partial\theta} \end{pmatrix}_{\text{sur } \vec{r},\,\vec{\Phi},\,\vec{\tau}}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\text{rot}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \dfrac{w_\theta}{\bar{r}} + \dfrac{\sigma w}{h_3} K \sin(\theta+\theta_0) - \dfrac{\partial v}{\partial s} \dfrac{1}{h_3} \\ \dfrac{\partial u}{h_3 \partial s} - \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial w}{\partial \bar{r}} + \dfrac{w \sigma}{h_3} K \cos(\theta+\theta_0) \\ \dfrac{\varepsilon^{-1}}{\bar{r}} \dfrac{\partial (v \bar{r})}{\partial \bar{r}} - \varepsilon^{-1} \dfrac{\partial u}{\bar{r} \partial \theta} \end{pmatrix}_{\vec{r},\vec{\Phi},\vec{\tau}}} \quad (A4)$$

16 Conditions aux limites en $\bar{r} = 0$:

De $[\dot{X} - \vec{v}(t,\vec{X})] \wedge \vec{\tau} = 0$ et $\dot{X} . \vec{\tau} = 0$

en $\bar{r} = 0$, il ressort :

$$\boxed{u = v = 0 \quad \text{et} \quad \dot{X} . \vec{\tau} = 0 \quad \text{en } \bar{r} = 0} \quad (A5)$$