

CHAMP DE VITESSE D'UN ANNEAU TOURBILLON DE FAIBLE ÉPAISSEUR ET DE CHAMP DE VORTICITÉ CONNU

Daniel MARGERIT

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), UMR 7563
2 avenue de la Forêt de Haye - 54504 Vandoeuvre les Nancy cedex, France

RÉSUMÉ

Nous donnons les développements asymptotiques du champ de vitesse d'un anneau tourbillon de faible épaisseur dont le champ de vortacité solénoïdal est connu. Les développements asymptotiques de la formule de Biot et Savart sont ainsi effectués dans la région asymptotique extérieure de l'anneau, ainsi que dans la région intérieure. Ces résultats sont alors appliqués à un anneau circulaire dont le rayon de la section n'est pas constante.

ABSTRACT

The asymptotic expansions of the velocity field are given for a slender vortex ring of known solenoidal vorticity. The asymptotic expansions of the Biot and Savart law are so performed both in the asymptotic outer and inner regions of the vortex. These results are then used to study a circular vortex ring with a circular core of non constant radius.

MOTS-CLÉS

Anneau tourbillon, loi de Biot et Savart, méthode de perturbation singulière, développement asymptotique, calcul formel.

I. INTRODUCTION

Le *champ de vortacité* $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$ joue un rôle important dans l'étude des écoulements *rotationnels* laminaires incompressibles à grand nombre de Reynolds. Lorsque $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$ est connu, la vitesse \bar{v} du fluide est alors déterminée à un champ de gradient près et s'obtient en utilisant la formule de Biot et Savart :

$$\bar{v}(\bar{x}) = \nabla\varphi(\bar{x}) + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\omega}(\bar{x}') \wedge (\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3} dx' \quad (1)$$

qui décompose la vitesse en la somme de la *vitesse potentielle* $\nabla\varphi(\bar{x})$ et de la *vitesse induite* $\bar{v}_{\text{Biot}}(\bar{x}, t)$ par le champ de vortacité. Ici, $||$ est la norme usuelle de \mathfrak{R}^3 et \wedge le produit vectoriel.

Un *anneau tourbillon de faible épaisseur* (figure 1) est un champ de vortacité $\bar{\omega}(\bar{x}, t)$ concentré dans le voisinage d'épaisseur $\varepsilon \ll 1$ d'une courbe tridimensionnelle \mathcal{C} fermée de longueur S , appelée la *fibre centrale*. Nous sommes intéressé de savoir quel développement

en ε prend la formule de Biot et Savart précédente. C'est à dire, connaissant le champ de vorticité de d'un anneau de vorticité de faible épaisseur, nous voulons connaître le développement en ε du champ de vitesse induit.

II. MODÉLISATION

La fibre centrale est repérée à l'aide d'une représentation paramétrique $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(s, t)$, qui donne un point de la courbe \mathcal{C} en fonction d'un paramètre s et du temps t (figure 1). En chaque point de cette courbe, nous définissons le repère de Fr net $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}})$ constitué respectivement des vecteurs tangent, normal et binormal. Les formules de Fr net sont :

$$\bar{\mathbf{X}}_s = \sigma \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}_s = \sigma K \bar{\mathbf{n}} \quad \bar{\mathbf{n}}_s = \sigma(T\bar{\mathbf{b}} - K\bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad \bar{\mathbf{b}}_s = -\sigma T \bar{\mathbf{n}}$$

où $\sigma(s, t) = |\bar{\mathbf{X}}_s|$, T est la *torsion* locale de \mathcal{C} , K la *courbure* locale de \mathcal{C} et où la différentiation d'une fonction f par rapport à sa variable x est notée f_x .

Nous introduisons un *système de coordonnées locales* valable uniquement au voisinage de la fibre centrale du filament. C'est celui utilisé par Callegari et Ting (1978). Si un point \mathbf{M} voisin de la courbe (figure 1) est projet  orthogonalement en $\mathbf{P}(s)$ sur \mathcal{C} , alors \mathbf{PM} est dans le plan $(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}})$ formé par la normale et la binormale. Ainsi nous utilisons les coordonnées polaires (r, φ) dans ce plan et les vecteurs polaires unitaires $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\theta}})$. De cette façon, nous définissons les coordonnées $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$ et la base curviligne $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{\tau}})$. La transformation entre les coordonnées $\mathbf{M}(x_1, x_2, x_3)$ et les coordonnées $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$ satisfait

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{OM} = \bar{\mathbf{X}}(s, t) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, s, t).$$

Sur ces coordonnées locales, le champ de vitesse induit par $\bar{\boldsymbol{\omega}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ est donné par

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}}(r, \varphi, s, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}(r', \varphi', s', t) \wedge \left[(\bar{\mathbf{X}}(s, t) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)) - (\bar{\mathbf{X}}(s', t) + r'\bar{\mathbf{r}}') \right]} \left| (\bar{\mathbf{X}}(s, t) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)) - (\bar{\mathbf{X}}(s', t) + r'\bar{\mathbf{r}}') \right|^3} h_3' r' dr' d\varphi' ds' \quad (2)$$

où $h_3' = \sigma(s', t) (1 - K(s', t)r' \cos(\varphi'))$. La conservation du flux de vorticité ($\text{div } \bar{\boldsymbol{\omega}} = 0$)   travers la section d'épaisseur ε montre que le champ de vorticité est de la forme $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon^{-2} \bar{\boldsymbol{\omega}}^1(\bar{r}, \varphi, s)$, où $\bar{r} = r/\varepsilon$. Après le changement de variables $\bar{r}' = r'/\varepsilon$, la relation (2) devient

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}}(r, \varphi, s, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^1(\bar{r}', \varphi', s', t) \wedge \left[(\bar{\mathbf{X}}(s, t) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)) - (\bar{\mathbf{X}}(s', t) + \varepsilon\bar{r}'\bar{\mathbf{r}}') \right]} \left| (\bar{\mathbf{X}}(s, t) + r\bar{\mathbf{r}}(\varphi, s, t)) - (\bar{\mathbf{X}}(s', t) + \varepsilon\bar{r}'\bar{\mathbf{r}}') \right|^3} h_3' \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' ds' \quad (3)$$

Le développement asymptotique de ce champ de vitesse n'est pas uniforme dans tout l'espace. Il faut distinguer un développement *extérieur*, défini par la *limite extérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé, qui décrit la situation loin de la fibre centrale et un développement *intérieur*, défini par une *limite intérieure* : $\varepsilon \rightarrow 0$ à $\bar{r} = r/\varepsilon$ fixé, qui décrit la situation près de la ligne centrale. Connaissant le champ de vorticité d'un anneau tourbillon, on voudrait connaître les développements extérieur et intérieur suivants du champ de vitesse :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}} &= \bar{\mathbf{v}}^{(0)}(r, \varphi, s, t) + \varepsilon \bar{\mathbf{v}}^{(1)}(r, \varphi, s, t) + \dots \\ \bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}} &= \varepsilon^{-1} \bar{\mathbf{v}}^{i(0)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \bar{\mathbf{v}}^{i(1)}(\bar{r}, \varphi, s, t) + \varepsilon \bar{\mathbf{v}}^{i(2)} + \dots \end{aligned}$$

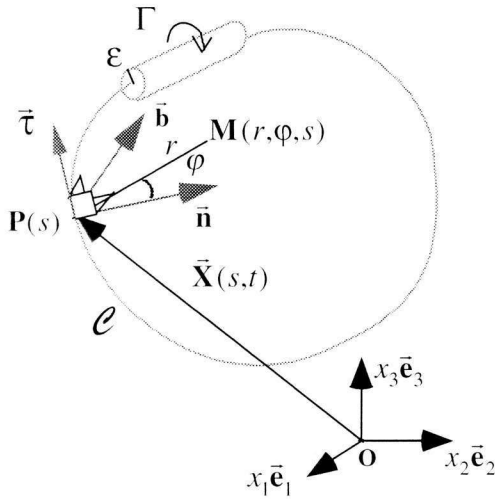
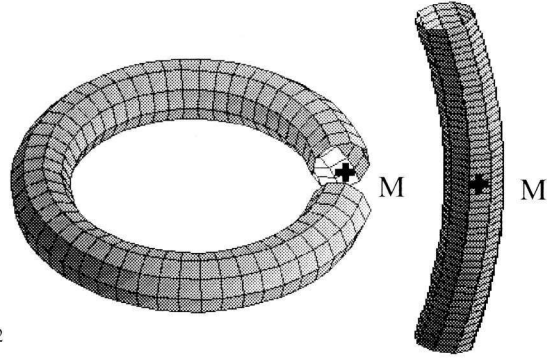


Figure 1 :
La courbe centrale et les coordonnées locales d'un anneau tourbillon



$\varepsilon \rightarrow 0$ à $s' - s$ fixé $\varepsilon \rightarrow 0$ à $(s' - s)/\varepsilon$ fixé

Figure 2 :
Méthode de développement de l'intégrale singulière (5)

III. RÉOLUTION

La limite intérieure de (3) donne :

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}}(r, s, \varphi, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\mathcal{e}} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}(s') \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(s'))}{|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}(s')|^3} ds' + O(\varepsilon) \quad (4)$$

où Γ est la circulation de l'anneau (i.e. le flux de la vorticité dans une section). C'est la vitesse induite par une distribution de Dirac $\Gamma \delta_{\mathcal{e}} \bar{\boldsymbol{\tau}}$ concentrée sur la fibre centrale.

Lorsque l'on fait le changement de variables $\bar{r} = r/\varepsilon$ dans la relation (3), l'expression du champ de vitesse devient

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}}(\bar{r}, \varphi, s, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}^i(\bar{r}', \varphi', s') \wedge \left[(\bar{\mathbf{X}}(s) + \varepsilon \bar{r} \bar{\mathbf{r}}) - (\bar{\mathbf{X}}(s') + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}') \right]}{\left| (\bar{\mathbf{X}}(s) + \varepsilon \bar{r} \bar{\mathbf{r}}) - (\bar{\mathbf{X}}(s') + \varepsilon \bar{r}' \bar{\mathbf{r}}') \right|^3} h_3' \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' ds' \quad (5)$$

Nous cherchons le développement intérieur ($\varepsilon \rightarrow 0$ à \bar{r} fixé) du champ de vitesse au point $\mathbf{M}(\bar{r}, \varphi, s)$. Si nous imposons brutalement $\varepsilon = 0$ dans cette expression (5), une singularité apparaît alors lorsque $s' = s$. C'est donc une *intégrale singuläre* par rapport au petit paramètre ε . Afin de trouver le développement de cette intégrale, nous utilisons la méthode des *développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières* (François 1981). Le principe de cette méthode consiste à séparer l'intégrale en deux parties (figure 2) : en dehors d'un voisinage du point $\mathbf{M}(r, \varphi, s)$, nous développons l'intégrand par rapport à ε   $s' - s$ fixé et nous intégrons selon s' , tandis que dans un voisinage de \mathbf{M} nous développons l'intégrand

par rapport à ε à $\bar{s} = (s' - s)/\varepsilon$ fixé et nous intégrons selon \bar{s} . Le développement recherché est alors la somme des deux développements obtenus.

Par cette méthode, nous obtenons (Margerit 1997) le développement intérieur suivant du champ de vitesse

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{\text{Biot}}(\bar{r}, \varphi, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \iint \bar{\mathbf{g}}(\bar{r}', \varphi', \bar{r}, \varphi, s) \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' + \frac{K(s)}{4\pi} \left[\ln \frac{S}{\varepsilon} - 1 \right] \bar{\mathbf{b}}(s) + \bar{\mathbf{A}}(s) \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint \bar{\omega}_s^i(\bar{r}', \varphi', s) \wedge \bar{\boldsymbol{\tau}}(s) \ln \frac{1}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & - \frac{K(s)}{8\pi} \iint \bar{\omega}^i(\bar{r}', \varphi', s) \wedge \bar{\mathbf{n}}(s) \ln \frac{1}{k^2} \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & - \frac{\bar{r}T(s)}{2\pi} \iint \frac{\bar{\omega}^i(\bar{r}', \varphi', s) \wedge \bar{\boldsymbol{\tau}}(s)}{k^2} \sin(\varphi - \varphi') \bar{r}'^2 d\bar{r}' d\varphi' \\ & - \frac{K(s)\bar{r} \cos \varphi}{4\pi} \iint \bar{\mathbf{g}}(\bar{r}', \varphi', \bar{r}, \varphi, s) \bar{r}' d\bar{r}' d\varphi' \\ & + \frac{K(s)}{4\pi} \iint \bar{\mathbf{g}}(\bar{r}', \varphi', \bar{r}, \varphi, s) \cos \varphi' \bar{r}'^2 d\bar{r}' d\varphi' + O(\varepsilon \ln \varepsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} k^2 &= \bar{r}^2 + \bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}' \cos(\varphi - \varphi') \\ \bar{\mathbf{g}}(\bar{r}', \varphi', \bar{r}, \varphi, s) &= \bar{\omega}^i(\bar{r}', \varphi', s) \wedge (\bar{r}' \bar{\mathbf{r}}(\bar{r}', s) - \bar{r} \bar{\mathbf{r}}(\bar{r}, s)) / k^2 \\ \bar{\mathbf{A}}(s) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \left[\int_{-S/2}^{+S/2} \frac{\bar{\boldsymbol{\tau}}(s+s') \wedge (\bar{\mathbf{X}}(s) - \bar{\mathbf{X}}(s+s'))}{|\bar{\mathbf{X}}(s) - \bar{\mathbf{X}}(s+s')|^3} - \frac{K(s)\bar{\mathbf{b}}(s)}{2|s'|} \right] ds' \end{aligned}$$

Cette formule (6) donne le développement intérieur du champ de vitesse à *proximité et dans* l'anneau tourbillon jusqu'à l'ordre $\varepsilon \ln \varepsilon$. Pour obtenir (6), nous n'avons pas eu à choisir les échelles du développement intérieur du champ de vitesse. Ce résultat démontre donc que les échelles asymptotiques de ce développement sont : $1/\varepsilon, \ln \varepsilon, 1, \dots$. Comme le terme d'ordre $\ln \varepsilon$ est indépendant de \bar{r} , il participe à la vitesse de la fibre centrale de l'anneau. On a effectué également ce calcul à l'aide d'un calculateur formel, ce qui permet de vérifier les calculs préalablement faits à la main et d'obtenir rapidement les ordres supérieurs $O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ et $O(\varepsilon^2)$, si on les désire. Pour un tourbillon avec un champ de vorticit e qui a seulement une composante selon la tangente, le terme en $1/\varepsilon$ de (6) est la formule de Biot et Savart en deux dimensions

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \nabla \varphi(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\bar{\omega}(\bar{\mathbf{x}}') \wedge (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}')}{|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}'|^2} dx' \quad (7)$$

Tous les termes qui apparaissent dans (6) sont des termes locaux sauf le terme $\bar{\mathbf{A}}$. Les termes d'ordre $1/\varepsilon$ et $\ln \varepsilon$ ont  e trouvées initialement par Levi-Civita (1932). Lorsque $\bar{r} = 0$, (6) donne la vitesse de la fibre centrale et nous retrouvons le r esultat de Klein et Knio (1995). Le raccord asymptotique entre le d eveloppement int erieur (6) et le d eveloppement ext erieur (4) a  e également directement v erifi e à l'aide du calculateur formel jusqu'à l'ordre $O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$.

III. APPLICATION A UN ANNEAU CIRCULAIRE DE SECTION VARIABLE

Afin de bien réaliser l'intérêt de la formule (6), considérons un anneau (figure 3) dont la vorticité est concentrée autour d'une fibre \mathcal{C} circulaire de rayon 1 et de vorticité

$$\bar{\omega}^i = \frac{1}{2\pi\bar{r}_0^2(s)} \mathbf{H}\left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0(s)}\right) \bar{\tau} - \frac{\varepsilon\bar{r}dn\sin(ns)}{\pi\bar{r}_0^3(s)(1 - \varepsilon\bar{r}\cos\varphi)} \mathbf{H}\left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0(s)}\right) \bar{\mathbf{r}} \quad (8)$$

où $\bar{r}_0(s) = 1 + d\cos(ns)$ et \mathbf{H} est la fonction d'Heaviside. Ce champ est bien solénoïdal, car il vérifie $(\omega_1 r h_3)_r + (h_3 \omega_2)_\varphi + r \omega_{2s} - \sigma T r \omega_{2\varphi} = 0$ avec $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{\mathbf{r}} + \omega_2 \bar{\boldsymbol{\theta}} + \omega_3 \bar{\boldsymbol{\tau}}$, ce qui est l'écriture de $\text{div } \bar{\omega} = 0$ sur nos coordonnées locales. La frontière de la zone de vorticité est bien une surface de vorticité et les lignes de vorticité sont les lignes $\bar{r} = \lambda \bar{r}_0(s)$ avec $\lambda \in [0, 1]$ et φ constant.

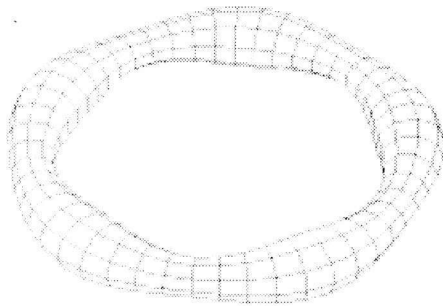


Figure 3 :
Domaine de vorticité

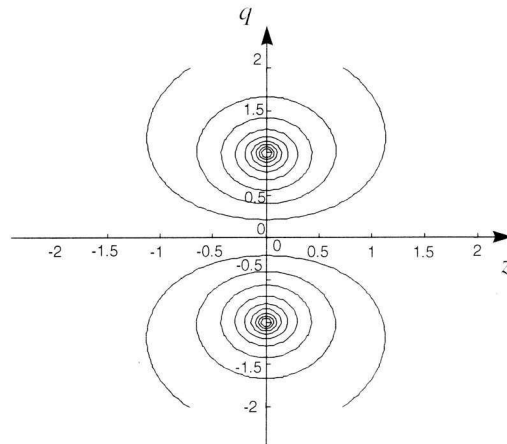


Figure 4 :
Lignes de courant du champ de vitesse extérieur
(coupe méridienne)

Pour cet anneau, l'application de (4) donne les lignes de courant de la figure 4, où (q, θ, z) sont les coordonnées cylindriques associées à \mathcal{C} . L'application de (6) donne

$$\bar{\mathbf{v}}^i(0) = \frac{\bar{r}\bar{\boldsymbol{\theta}}}{2\pi\bar{r}_0^2} \quad \text{si } \bar{r} < \bar{r}_0(s) \quad \quad \bar{\mathbf{v}}^i(0) = \frac{\bar{\boldsymbol{\theta}}}{2\pi\bar{r}} \quad \text{si } \bar{r} > \bar{r}_0(s) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}^i(1) &= \left(\ln \frac{8}{\varepsilon\bar{r}_0} - 1 \right) \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_0^2} \cos\varphi \bar{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{16\pi} \left[\left(4 - 3 \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_0^2} \right) \bar{\mathbf{b}} - 2 \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_0^2} \cos\varphi \bar{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad \text{si } \bar{r} < \bar{r}_0(s) \\ &= \left(\ln \frac{8}{\varepsilon\bar{r}_0} - 1 \right) \frac{\bar{\mathbf{b}}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \cos\varphi \bar{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{16\pi} \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{r}^2} \left[\bar{\mathbf{b}} - 2\cos\varphi \bar{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad \text{si } \bar{r} > \bar{r}_0(s) \end{aligned} \quad (10)$$

où l'on a utilisé les expressions des intégrales suivantes données par Gradshteyn (1980) :

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx}{(1 - 2a\cos x + a^2)} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{n\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2) dx.$$

Il était important et non trivial de déterminer la formule (10), car l'ordre 1 ainsi obtenu pour la région intérieure complète l'ordre 1 que l'on connaissait dans la région extérieure

(figure 4) et car dans le cadre d'une expérience $\ln \varepsilon$ est souvent de l'ordre de 1. En prenant $\bar{r} = 0$ dans (10), la vitesse obtenue pour la fibre centrale est $\ln[8/(\varepsilon \bar{r}_0)] \bar{\mathbf{b}}/(4\pi)$. On sait que la vitesse de la fibre centrale d'un anneau est plus grande en un point où sa courbure est plus grande. Par cet exemple, on démontre qu'elle est également plus grande en un point où la courbure de sa section est plus grande.

IV. CONCLUSION

La méthode des développements asymptotiques raccordés des intégrales singulières a été utilisée pour obtenir le développement asymptotique intérieur du champ de vitesse d'un anneau tourbillon de faible épaisseur. L'utilisation de cette méthode rend systématique le calcul d'un tel développement et permet d'utiliser le calcul formel pour réaliser les calculs fastidieux qu'il faut effectuer. L'utilisation de l'ordinateur rend alors possible le calcul d'ordres supérieurs qu'il aurait été inconcevable d'obtenir à la main. L'utilisation de cette méthodologie dépasse largement le cadre de la dynamique de la vorticité et trouve des applications en rayonnement, en combustion,...

La formule du développement intérieur de la loi de Biot et Savart obtenue a été utilisée avantagement pour fournir le champ de vitesse complet à l'ordre 1 d'un anneau tourbillon circulaire dont le rayon de la section est variable, ce qui donne de surcroît la vitesse de cet anneau. Elle peut s'avérer très utile également dans la détermination de l'hélicité d'anneaux tourbillons enlacés ou d'anneau auto-enlacé (Moffatt 1992) et une étude sur ce point est en cours. Elle peut apporter son aide également dans l'étude de l'évolution d'anneaux tourbillons de section non constante (Lundgren 1989), dans l'étude du phénomène d'éclatement tourbillonnaire (Schmitz 1996), ainsi que dans la mise au point des méthodes numériques de type tourbillons en hydrodynamique (Gustafson 1991).

REFERENCES

- CALLEGARI A.J., TING L. ; 1978, Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity, *SIAM J. Appl. Math.* Vol **35** (4), pp. 148-175
 FRANÇOIS C. ; 1981, Les méthodes de perturbation en mécanique, *ENSTA*, Paris, pp.98-104
 GRADSHTEYN I. S., RYZHIK I. M. ; 1980, Table of integrals, series, and products, NY.
 GUSTAFSON K., SETHIAN J. ; 1991, Vortex Methods and Vortex motion (*ed. K.Gustafsson & J.Sethian*), SIAM
 KLEIN R., KNIO O.M. ; 1995, Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments, *J. Fluid Mech.*, Vol **284**, pp. 257-321
 LEVI-CIVITA T. ; 1932, Attrazione newtoniana dei tubi sottili vortici filiformi, *Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa. Zanichelli, Bologna*, pp. 1-33
 LUNDGREN T.S., ASHURST W.T. ; 1989, Area-varying waves on curved vortex tubes with application to vortex breakdown, *J. Fluid Mech.* Vol **200**, pp. 283-307
 MARGERIT D. ; 1997, Dynamique et mouvement des filaments et des anneaux tourbillons de faible épaisseur, *Thèse de doctorat de l'INPL*, Nancy
 MOFFATT H.K., RICCA R.L. ; 1992, Helicity and the Calugareanu invariant, *Proc. R. Soc. London. A* **439**, pp. 411-429
 SCHMITZ M. ; 1996, Axiale Entwicklung der Kernstruktur schlanker Wirbelfäden, *PhD Thesis*, Aachen