

13<sup>ème</sup> congrès Français de Mécanique  
Poitiers 1-5 sept. 97, Vol 1, p. 81-84

## LES OSCILLATIONS D'UN ANNEAU TOURBILLON

Daniel MARGERIT, Jean-Pierre BRANCHER

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA)  
2 avenue de la Forêt de Haye - 54504 Vandoeuvre les Nancy cedex

### I. INTRODUCTION

L'évolution d'un anneau tourbillon est déterminée traditionnellement par la méthode dite 'de la coupure' dont on donne une justification ici. A l'aide de cette méthode une étude de stabilité linéaire donne les périodes d'oscillation d'un anneau tourbillon circulaire que l'on compare avec des simulations numériques de l'équation d'évolution de l'anneau.

### II. MODELISATION

Dans ce paragraphe nous définissons un anneau tourbillon. D'abord, rappelons qu'un *anneau tourbillon* de faible épaisseur de corps est un champ de vorticité  $\omega(\mathbf{x})$  qui est non nul uniquement dans le voisinage d'une courbe  $\mathcal{C}$  de l'espace, appelée *la ligne centrale*. Cette courbe est décrite à l'aide d'une représentation paramétrique  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, t)$ , qui donne la position d'un point de la courbe en fonction du paramètre  $s$  et du temps  $t$  (figure 1). En tout point de cette courbe existe un repère de Frenet  $(\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  où on a respectivement le vecteur tangent, normal et binormal.

Nous introduisons un système de *coordonnées curvilignes locales* qui est valide proche de la ligne centrale. On a repris celui que Callegari & Ting [1] ont utilisés en 1978. Comme on le voit sur la figure 1, si un point  $M$  proche de la courbe est projeté sur  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{P}(s)$ , alors  $PM$  est dans le plan  $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ . Ainsi on utilise les coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  dans ce plan et les vecteurs polaires associés  $(\mathbf{r}, \theta)$ . De cette façon, on définit des coordonnées  $M(r, \varphi, s)$  et des vecteurs de bases  $(\tau, \mathbf{r}, \theta)$ . Ainsi le lien entre les coordonnées cartésiennes  $M(x_1, x_2, x_3)$  et les coordonnées curvilignes locales  $M(r, \varphi, s)$  satisfait  $\mathbf{x} = \mathbf{OM} = \mathbf{X}(s, t) + r\mathbf{r}(\varphi, s, t)$  où  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  définissent un repère cartésien. Bien sûr nous avons :

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{X} / \partial s &= \sigma \tau & \sigma(s, t) &= \|\partial\mathbf{X} / \partial s\| & \partial\mathbf{b} / \partial s &= -\sigma T\mathbf{n} & \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\varphi, s) = \mathbf{n}(s)\cos\varphi + \mathbf{b}(s)\sin\varphi \\ \partial\tau / \partial s &= \sigma K\mathbf{n} & \partial\mathbf{n} / \partial s &= \sigma(T\mathbf{b} - K\tau) & \theta &= \theta(\varphi, s) = -\mathbf{n}(s)\sin\varphi + \mathbf{b}(s)\cos\varphi \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme usuelle de  $\mathbf{R}^3$ ,  $T$  la *torsion* locale de  $\mathcal{C}$  et  $K$  la *courbure* locale de  $\mathcal{C}$ .

Les longueurs caractéristiques du problème différentes de l'épaisseur de corps  $\delta$  de l'anneau, c'est à dire : le rayon de courbure, la longueur de l'anneau  $S$ , ... sont de l'ordre

d'une même longueur  $L$  avec  $\delta/L = O(\varepsilon) \ll 1$ . En fait nous n'avons pas besoin de préciser la valeur exacte de  $L$ . Nous définissons  $\varepsilon$  par  $\varepsilon = \delta_0/L = \delta(t=0)/L$ . Le nombre de Reynolds  $R_e$  est défini par  $R_e = \Gamma/\nu$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Définissons le nombre  $\alpha$  tel que  $R_e^{-1/2} = \alpha\varepsilon$ . Ainsi le cas du fluide parfait est obtenu pour  $\alpha = 0$ .

En conséquence il existe un problème extérieur défini par une limite extérieure :  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $r$  fixé, qui décrit la situation loin de la ligne centrale et un problème intérieur défini par la limite intérieure :  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $\bar{r} = r/\varepsilon$  fixé, qui décrit la situation proche de la ligne centrale.

### III OSCILLATIONS D'UN ANNEAU TOURBILLON

La vitesse  $\overset{\circ}{\mathbf{X}} = \partial \mathbf{X} / \partial t$  d'un point de la ligne centrale peut être déterminée par la méthode de Burger:

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}(0,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{s_c}^{2\pi-s_c} \frac{\sigma(s',t)\tau(s',t) \wedge (\mathbf{X}(0,t) - \mathbf{X}(s',t))}{|\mathbf{X}(0,t) - \mathbf{X}(s',t)|^3} ds'$$

où la variable inconnue  $s_c$  est un petit paramètre introduit pour éliminer la singularité de l'intégrale de Biot et Savart. Cette méthode formelle est appelée la 'méthode de la coupure' et  $s_c$  la longueur de coupure.

Un développement asymptotique raccordé dans les équations de Navier-Stokes [1] conduit à une équation d'évolution de la ligne centrale de l'anneau tourbillon :

$$\overset{\circ}{\mathbf{X}}^{(0)}(s,t) = \mathbf{Q}^* + \frac{K^{(0)}(s,t)}{4\pi} [-\ln \varepsilon + \ln(S) - 1 + C_v(t) + C_w(t)] \mathbf{b}^{(0)}$$

avec  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{A}(s,t) - [\mathbf{A}(s,t) \circ \tau(s,t)] \tau(s,t)$  ;  $\lambda(s,\bar{s}) = \int_s^{s+\bar{s}} \sigma(s^*) ds^*$  et :

$$\mathbf{A}(s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ -\sigma(s+\bar{s}) \frac{\tau(s+\bar{s}) \wedge (\mathbf{X}_0(s+\bar{s}) - \mathbf{X}_0(s))}{|\mathbf{X}_0(s+\bar{s}) - \mathbf{X}_0(s)|^3} - \frac{K(s)}{2} \frac{\mathbf{b}(s)\sigma(s+\bar{s})}{|\lambda(s,\bar{s})|} \right] d\bar{s}$$

Dans cette expression  $C_v(t)$  et  $C_w(t)$  sont des fonctions connues, pourvu que le champ de vorticité initial ait été spécifié.

La méthode de Burger introduit le petit paramètre  $s_c$  pour lequel l'intégrale est singulière. Ainsi nous pouvons développer cette intégrale par rapport à  $s_c$  à l'aide de la méthode du développement asymptotique raccordé des intégrales singulières [2] et comparer le premier ordre de ce développement avec celui du développement asymptotique en  $\varepsilon$  de l'équation du mouvement. En fait, pourvu que l'on choisisse bien le lien entre  $s_c$  et  $\varepsilon$ , la méthode de coupure est équivalente à l'équation asymptotique du mouvement de la ligne centrale. Nous devons choisir  $s_c$  comme suit :

$$C_v(t) + C_w(t) - \ln \varepsilon = 1 - \ln 2 - \ln l_c \text{ où } l_c = \int_s^{s+s_c} \sigma^{(0)}(s^*) ds^* .$$

Ainsi la stabilité linéaire d'un anneau tourbillon circulaire de rayon  $R_0$  (figure 2) a été étudiée avec la méthode de la coupure, plutôt qu'avec l'équation asymptotique du mouvement, de la même manière que [3] mais avec la valeur précédente de la longueur de coupure. L'évolution dans le cas non-visqueux est de la forme suivante :

$$\mathbf{X} = d(t)\mathbf{e}_3 + R_0\mathbf{i}_r + 2\cos(n\theta)\rho_0(\cos(\omega(n)t)\mathbf{i}_r + \frac{V_\rho(n)}{\omega(n)}\sin(\omega(n)t)\mathbf{e}_3).$$

où  $\rho_0$  est l'amplitude des perturbations. On l'a représenté sur la figure 3 pour un mode 4. Nous avons l'expression suivante de la période  $T = 2\pi / \omega$  d'oscillation :

$$T = \frac{8\varepsilon^2 R_0^2}{\sqrt{\left[ -n^2\tilde{V} + g_\xi(n) \right] \left[ (n^2 - 1)\tilde{V} + g_\rho(n) \right]}} \quad \text{où}$$

n	2	3	4
$g_\xi(n)$	6.66	20.8	43.1238
$g_\rho(n)$	-7	-21.33	-43.8

et  $\tilde{V} = \ln(4/\theta_c)$  avec  $\theta_c = \varepsilon[\exp(0.5 - A)] / (2R_0)$  et  $A = -0.058$ .

Nous avons réalisé un programme fortran qui simule numériquement l'équation asymptotique d'évolution d'un anneau tourbillon. La figure 4 montre le mouvement d'un mode trois non visqueux pour  $\varepsilon = 0.02$ .

La forme précédente de  $\mathbf{X}$  montre que les lobes tournent autour de la ligne centrale circulaire non perturbée comme on l'a représenté sur la Figure 5.

Sur la figure 6 nous donnons la période en fonction de  $\varepsilon$  et du mode  $n$ . On constate un bon accord entre l'étude numérique et l'étude linéaire. Ici nous nous sommes limité au cas non visqueux mais le cas d'un anneau tourbillon visqueux ( $\alpha \neq 0$ ) a également été étudié [4].

#### IV CONCLUSION

La méthode du développement asymptotique raccordé des intégrales singulières a été utilisée pour obtenir le développement de l'intégrale de la méthode de la coupure avec la longueur de coupure pour petit paramètre. Finalement les distortions à grande longueur d'onde d'un anneau tourbillon ont été étudiées numériquement et comparées avec une étude précise de la stabilité linéaire d'un anneau tourbillon circulaire réalisée avec la méthode de la coupure que l'on a justifiée.

#### REFERENCES

1. CALLEGARI A.J. & TING L.; "Motion of a curved vortex filament with decaying core and axial velocity", SIAM J. Appl. Math., Vol. 35 n°1, pp. 148-175(1978).
2. FRANCOIS C.; "Les méthodes de perturbation en mécanique". ENSTA, pp.98-104 (1981).
3. WIDNALL S.E. & SULLIVAN J.P.; "On the stability of vortex ring", Proc. R.Soc. A322, pp.335-353 (1973).
4. MARGERIT D. & BRANCHER J-P., "On the velocity field and the motion of a non-circular slender vortex ring", Article soumis à J. Fluid Mech. (1996).

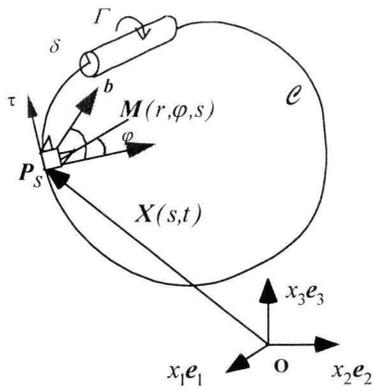


Figure 1: Repérage de la fibre et de l'espace

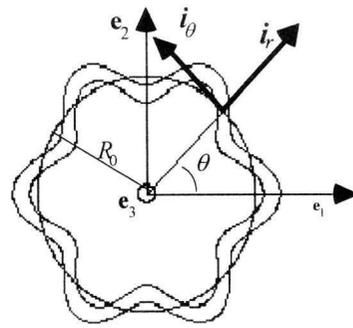


Figure 2 : L'anneau tourbillon circulaire et sa perturbation

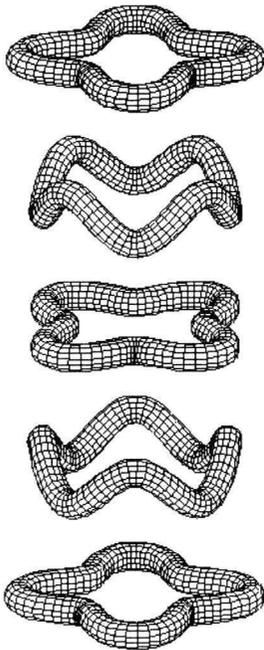


Figure 3 : Evolution linéaire d'un mode 4 (de bas en haut)

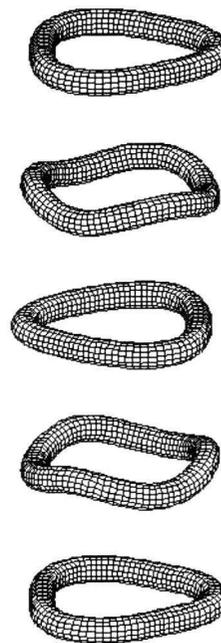
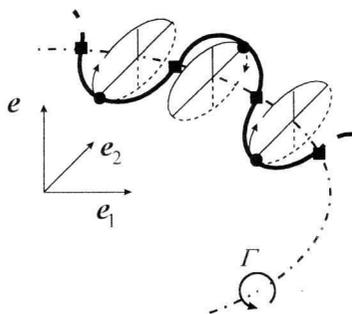


Figure 4: Simulation numérique d'un mode 3 (de bas en haut)



- - - ligne centrale non-perturbée
- ligne centrale perturbée
- point fixé
- point tournant

Figure 5 : Evolution des lobes

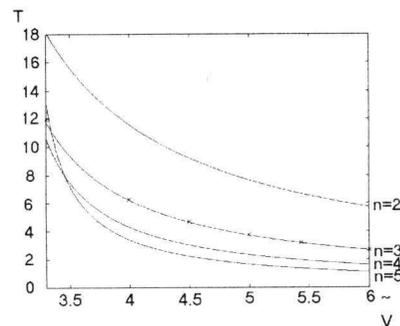


Figure 6 : Périodes des oscillations en fonction de  $\tilde{V}$  et de  $n$  (- étude linéaire, x étude numérique)