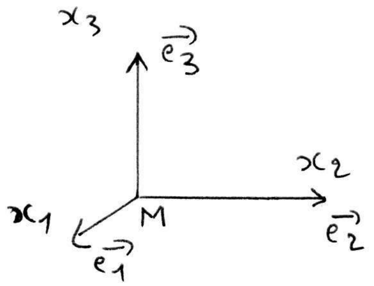
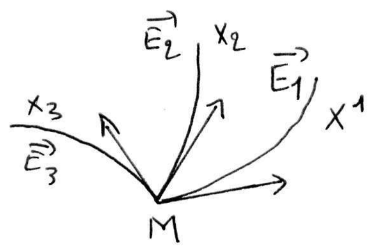
Changement de Repère Mobile

$$\vec{E_i} = \frac{\partial OM}{\partial X_i} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial X_i} \text{ (voir suite)} = \vec{E_i}(X_i, t)$$



Ancien Repère R



Nouveau repère R^* : base curviligne mobile dans R

Le changement de ~~relation~~ coordonnées est défini par la relation :

$$x^i = G^i(X^j, t)$$

formule qui définit (en Lagrangien) le mouvement du référentiel R^* par rapport à R.

Par exemple, dans le cas habituelle du changement de repère cartésien mobile on a :

$\vec{x} = x_i \cdot \vec{e_i} = \vec{OO'}(t) + X_i \vec{E_i}(t)$ où $\vec{E_i}(t)$ est une base cartésienne mobile de mouvement connu et de centre O' se déplaçant. Le mouvement du référentiel R^* par rapport à R est ici un mouvement de solide (champ de moment).

Cas de la translation : $x_i \vec{e_i} = \vec{OO'}(t) + X_i E_i$

Cas de la rotation : $x_i \vec{e_i} = X_i \cdot \vec{E_i}(t)$ avec $\frac{d\vec{E_i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{E_i}$

Généralement, on a :

$$dx^i = \frac{\partial G^i}{\partial X^j} dX^j + \frac{\partial G^i}{\partial t} dt \overset{def}{=} a^i_j dX^j + v_e^i dt$$

soit $d\vec{OM} = dx^i \vec{e_i} + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} dt = \vec{E_j} dX^j + \vec{v_e} dt$

$\vec{v_e} = \left.\frac{\partial^R \vec{G}}{\partial t}\right|_{X_k}$ = champ de vitesse du repère mobile R^* = vitesse d'entraînement

On a $E_j = e_i a^i_j$

Un vecteur $\vec{F}$ vérifie :

$$\vec{F} = F^i \vec{e_i} = F^i \vec{E_i}$$

$\frac{\partial E_k}{\partial X^i} = \Gamma^j_{ki} E_j$ où Γ^j_{ki} est le symbole de Christoffel

$= \frac{\partial^2 G^e}{\partial X_i \partial X_k} \vec{e_e}$

et $\frac{\partial E_k}{\partial t} = \Delta^j_k E_j = \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial X_k \partial t} = \frac{\partial \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}}{\partial X_k} = \left.\frac{\partial \vec{v_e}}{\partial X_k}\right|_t = \vec{Grad}_{X_k} \vec{v_e}$

① Mouvement d'un fluide repéré dans R :

$x^j = x^j(\xi^i, t)$ avec $\xi^i = x^i(\xi^i, 0)$ Mouvement du fluide

$\vec{v}(\xi^i, t) \overset{def}{=} \frac{\partial^R \vec{x}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\right)_{\xi^i} e_j = v^j e_j$ en Lagrange.

$= \vec{v}(\vec{x}, t)$ en Euler

$e_j = e_j(x_i) = e_j(\xi_i, t)$ si coo curvilignes.

$\vec{a}(\xi^i, t) = \left(\frac{\partial^R \vec{v}(\xi^i, t)}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial t}\right)_{\xi^i} e_j = a^j e_j$ en Lagrange.

pour cartésien

$= \frac{d^R \vec{v}}{dt} = \left.\frac{\partial^R \vec{v}(x, t)}{\partial t}\right|_{x^i} + \vec{grad}\,\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{a}(x, t)$ en Euler.

def de la dérivée particulaire.

② Mouvement d'un fluide repéré dans R^* :

$$X^j = X^j(\Sigma^i, t) \text{ avec } \Sigma^i = X^i(\Sigma^i, 0)$$

$\vec{v}^* \overset{def}{=} \left(\frac{\partial X^j}{\partial t}\right)_{\Sigma_i} E_j = V^{*j} E_j$ en Lagrange.

$= \vec{v}^*(X^j, t)$ en Euler

$$\vec{a}^* \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial^{R^*} v^*(\xi^i,t)}{\partial t}\right)_{\xi^i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial V^{*j}}{\partial t}\Big|_{\xi^i} E_j = \frac{\partial^2 X^j}{\partial t}\Big|_{\xi^i} E_j = A^{*j} E_j \text{ en Lagrangien}$$

NON Qu'en cartésien

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{d^{R^*} \vec{v}^*(x^j,t)}{dt} = \frac{\partial^{R^*} \vec{v}^*}{\partial t}\Big|_{x^i} + \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial X_i}\Big|_t \frac{\partial X_i}{\partial t}\Big|_{\xi_i}$$

$$= \frac{\partial^{R^*} \vec{v}^*}{\partial t} + \overset{\Rightarrow}{\text{grad}}\, \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* = \vec{a}^*(x_i,t) \text{ en Euler.}$$

(inutil) car intrinsèque.

③ Relation entre $\vec{v}$ et $\vec{v}^*$:

$$v^\ell(x^j,t) = \left(\frac{\partial x^\ell}{\partial t}\right)_{\xi^j} = \frac{\partial G^\ell}{\partial t}\Big|_{X^q} + \frac{\partial G^\ell}{\partial X_q}\frac{\partial X_q}{\partial t}\Big|_{\xi_i}$$

$$\text{D'où } \vec{v} = v^\ell \vec{e_\ell} = \frac{\partial^R \vec{G}}{\partial t}\Big|_{X_q} + v^*$$

d'où $\boxed{\vec{v} = \vec{v_e} + \vec{v}^*}$ où $\boxed{\vec{v_e} = \frac{\partial^R \vec{G}}{\partial t}\Big|_{X^q}}$ vitesse d'entraînement

④ Relation entre $\vec{a}$ et $\vec{a}^*$:

$$\vec{a} = \frac{d^R \vec{v}}{dt} = \frac{d^R \vec{v_e}}{dt} + \frac{d^R \vec{v}^*}{dt}$$

$$\text{Or } \frac{d v_e^i}{dt} = \frac{\partial v_e^i}{\partial t}\Big|_{X^q} + \frac{\partial v_e^i}{\partial X_q}\Big|_t v_q^* = \frac{\partial v_e^i}{\partial t}\Big|_{X_q} + \left(\frac{\partial v_e^i}{\partial X_q}\Big|_t \; b_q \; v_q^*\right)$$

$$= \frac{\partial v_e^i}{\partial t}\Big|_{X^q} + \frac{\partial \left(\frac{\partial G^i}{\partial X_q}\big|_t\right)}{\partial t}\Big|_{X_q} v_q^* = \frac{\partial v_e^i}{\partial t}\Big|_{X^q} + \frac{\partial a_q^i}{\partial t}\Big|_{X_q} v_q^*$$

$$\text{d'où } \frac{d^R \vec{v_e}}{dt} = \frac{d v_e^i}{dt}\vec{e_i} = \frac{\partial^R \vec{v_e}}{\partial t}\Big|_{X^q} + v_q^* \frac{\partial^R \vec{E_q}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^R \vec{v_e}}{\partial t} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial t^2}\Big|_{X_q} \vec{e_i} = \vec{a_e} = \text{accélération du repère mobile } R^* = \text{accélé d'entraînement}$$

$$\text{De plus } \frac{d^R v^*}{dt} = \frac{d^R \frac{\partial X^j}{\partial t}\big|_{\xi_i} E_j}{dt} = \frac{\partial^2 X^j}{\partial t^2}\Big|_{\xi_j} E_j + v^{*j}\frac{\partial^R E_j}{\partial t}\Big|_{\xi_i}.$$

D'où

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a_e} + \vec{a_c}}$$

où $\boxed{\vec{a_e} = \frac{\partial^R \vec{v_e}}{\partial t}\Big|_{X_i}}$

et où $\boxed{\vec{a_c} = 2\, v_q^* \frac{\partial^R \vec{E_q}}{\partial t}}$ accélération de Coriolis

$$\boxed{= 2\,\vec{v}^* \cdot \overset{\Rightarrow}{\text{Grad}}_{X_q} \vec{v_e}} = 2\left(\vec{v}^* \cdot \overset{\Rightarrow}{\mathcal{E}}_e + \frac{\vec{\omega_e}}{2} \wedge \vec{v}^*\right)$$

$$\boxed{= 2\,\vec{v}^* \cdot \overset{\Rightarrow}{\mathcal{E}}_e + \vec{\omega_e} \wedge \vec{v}^*}$$

$\vec{\omega_e} = \text{rot}\, \vec{v_e}$ vorticité d'entraînement de R^*

$\vec{\mathcal{E}}_e = \left(\frac{v_{e\,i,j} + v_{e\,j,i}}{2}\right)$ = taux de déformation d'entraînement de R^*

(5) Cas d'un repère en rotation :

$$x_i \vec{e_i} = X_i \vec{E_i}(t) = \vec{G} \qquad \frac{d\vec{E_i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{E_i}$$

$$\vec{v_e} = \frac{\partial^R \vec{G}}{\partial t}\Big|_{X_k} = X_i \frac{d\vec{E_i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge X_i \vec{E_i} = \underline{\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}$$

$$\vec{a_e} = \frac{\partial^R \vec{v_e}}{\partial t} = \vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t}\Big|_{X_i} = \vec{\Omega} \wedge X_i(\vec{\Omega} \wedge \vec{E_i})$$
$$= \underline{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})}$$

$$\vec{a_c} = 2 v_k^* \frac{\partial^R \vec{E_k}}{\partial t} = 2 v_k^* \vec{\Omega} \wedge \vec{E_k} = \underline{2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}^*}$$

Rem : un calcul direct est possible avec $\begin{cases} \theta' - \theta = \Omega t \\ r' = r \end{cases}$ $\quad x' = r'\cos\theta' = x\cos\Omega t - y \sin\Omega t$, $\quad y' = r'\sin\theta' = x \sin\Omega t + y\cos\Omega t$

(6) Navier Stokes dans R^* :

$$\frac{d^R \vec{v}}{dt} = \frac{\partial^R \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\vec{v} = \frac{\partial^R \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{v^2}{2} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,P + \nu \Delta \vec{v}$$

où $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$

$$\vec{a_e} + \vec{a_c} + \frac{d^{R^*} \vec{v}^*}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,P + \nu \Delta \vec{v} .$$

$$\cancel{\mathrm{grad}\,P = \frac{\partial P}{\partial x_i}\vec{e_i} = \frac{\partial P}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\vec{e_i}}$$

$$\boxed{\frac{d^{R^*} \vec{v}^*}{dt} = \frac{\partial^{R^*} \vec{v}^*}{\partial t} + \vec{v}^*\,\vec{\mathrm{grad}}\,v^* + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,P + \nu \Delta \vec{v}^* + \nu \Delta \vec{v_e}}$$

$$\vec{v}^*\,\mathrm{grad}\,v^* = \mathrm{grad}\,\frac{v^{*2}}{2} + \vec{\omega}^* \wedge \vec{v}^* \qquad \text{où } \vec{\omega}^* = \mathrm{rot}\,\vec{v}^*$$

Remarquons que $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{v_e} + \mathrm{rot}\,\vec{v}^* = \mathrm{rot}\,v_e + \vec{\omega}^*$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^* + \vec{\omega_e}$$

$\vec{\omega_e}$ = vorticité d'entraînement = vorticité du repère mobile R^*

en rotation : $\vec{\omega_e} = \mathrm{rot}(\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = (\mathrm{div}\,\vec{OM})\vec{\Omega} - \vec{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{OM}$
$= 3\vec{\Omega} - \vec{\Omega} = 2\vec{\Omega}$ $\qquad \boxed{\vec{\omega_e} = 2\vec{\Omega}}$

$$\vec{a_e} + \vec{a_c} = \vec{\Omega} \wedge (\overbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}^{\vec{v_e}}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}^* \qquad \mathrm{div}\,\vec{v_e} = \mathrm{div}(\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = -\vec{\Omega}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{OM} = 0$$

Cas Général :

$$\vec{a_e}+\vec{a_c} = \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} + 2\vec{v}^*.\vec{\vec{\varepsilon}}_e + \vec{\omega_e}\wedge v^*$$

$$\vec{a_e}+\vec{a_c} + \vec{v}^* \mathrm{grad}\, v^* = \mathrm{grad}\frac{v^{*2}}{2} + \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t} + \underbrace{(\omega^* + \vec{\omega_e})}_{\vec{\omega}} \wedge \vec{v}^* + 2\vec{v}^*.\vec{\vec{\varepsilon}}_e$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial^{R^*} v^*}{\partial t} + v^* .(\vec{\mathrm{grad}}[v^*+2\vec{v_e}]) + \vec{a}_e = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \nu\Delta(\vec{v}^*+\vec{v_e})\\ &\frac{\partial^{R^*} v^*}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^{*2}}{2} + (\vec{\omega}^*+\vec{\omega_e})\wedge\vec{v}^* + 2\vec{v}^*.\vec{\vec{\varepsilon}}_e + \vec{a_e} = \_\_\_\_\end{aligned}}$$

Rem: écrire l'équa de vorticité.

conservation de la masse

$$\mathrm{div}\,\vec{v_e} + \mathrm{div}\,\vec{v}^* = 0.$$

Équa de la vorticité : $\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\Big|_{x_i} + \mathrm{Rot}(\vec{\omega}\wedge\vec{V}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{\omega}.\mathrm{grad}\vec{v} = \nu\Delta\vec{\omega}$ devient.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega_e}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}^*}{dt}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{\omega_e}}{dt} = \frac{\partial\omega_e}{\partial t}\Big|_{\varepsilon_i} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e} = \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt} + \vec{v}^*.\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e}$$

$$\frac{d\vec{\omega}^*}{dt} = \frac{d^*\omega^*}{dt} + \vec{v}^*.\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^*\omega^*}{dt} + 2\vec{v}^*\mathrm{grad}\,\cancel{\vec{\omega}} + \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt}$$

Cas d'une rotation : $\Delta\vec{v_e} = \Delta(\Omega\wedge OM) = 0.$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a_e} = \mathrm{rot}(\vec{\Omega}\wedge\vec{v_e}) = \underbrace{\mathrm{div}\, v_e}_{0} - \vec{\Omega}.\mathrm{grad}\,\vec{v_e}$$

$$= -\vec{\omega_e}\wedge\vec{\Omega} = 0 \Rightarrow \vec{a_e} = \mathrm{grad}\frac{p_e}{\rho}$$

d'où
$$\boxed{\frac{\partial v^*}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^{*2}}{2} + (\omega^* + 2\vec{\Omega})\wedge\vec{v}^* + \vec{\mathrm{grad}}\frac{p_e}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\vec{\mathrm{grad}}\, p + \nu\Delta\vec{v}^*}$$
Pour une rotation.

$$\vec{\Omega}\wedge(\Omega\wedge\vec{OM}) = (\vec{\Omega}.\vec{OM})\vec{\Omega} - (\vec{\Omega}.\vec{\Omega})\vec{OM}$$
$$= (\vec{\Omega}.\vec{OM})\vec{\Omega} - |\Omega|^2\vec{OM}$$

$$\mathrm{grad}\frac{OM^2}{2} = \vec{OM}$$

$$\mathrm{grad}\frac{(\vec{OM}.\vec{\Omega})^2}{2} = (\vec{OM}.\vec{\Omega})\vec{\Omega}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\mathrm{grad}}\left[(\vec{OM}.\vec{\Omega})^2 - \Omega^2\vec{OM}^2\right]$$

$$\boxed{\frac{p_e}{\rho} = \frac{(\vec{OM}.\vec{\Omega})^2 - \Omega^2\vec{OM}^2}{2}} \boxed{= -\frac{1}{2}|\vec{\Omega}\wedge\vec{OM}|^2} \boxed{= -\frac{1}{2}v_e^2}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{\omega}.\mathrm{grad}\, v = \frac{d^*\vec{\omega}^*}{dt} + 2v^*\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e} - \omega^*\mathrm{grad}\, v^* - \vec{\omega_e}\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e} + \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt}.$$
$$- \vec{\omega}^*\mathrm{grad}\,\vec{v_e}.$$
$$- \vec{\omega_e}\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^*.$$

$$\cancel{\frac{\partial^{R^*}\omega^*}{\partial t} + (\mathrm{div}\, v^*)(\vec{\omega}^* + \vec{\omega_e}) + \vec{v}^*.\mathrm{grad}\,\vec{\omega}} =$$