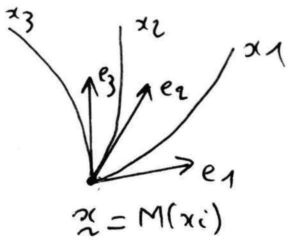
Changement Quelconque de Référentiel en Mécanique des Milieux Continus

On se propose de définir et d'effectuer un changement de référentiel quelconque pour lequel le référentiel mobile a un mouvement de milieu continu.

1 Cinématique sur un repère de coordonnées curvilignes:

11 L'Espace:

Soit E un espace Euclidien et x^i un système de coordonnées curvilignes permettant de repérer la position $\underset{\sim}{x} = M(x_i)$ de tout point de l'espace.



$\underset{\sim}{x} = M(x_i)$

courbes à x_i variant et x_j fixes $j \neq i$

En chaque point $\boxed{\underset{\sim}{x} = M(x_i)}$ (relation de définition d'un point),

on définit le vecteur $\overrightarrow{MM'}(x_i, x_i')$ tel que $M'(x_i') = M(x_i) + \overrightarrow{MM'}$

On note $M(x_i) = \underset{\sim}{x}$ et $\overrightarrow{MM'} = \underset{\sim}{x}' - \underset{\sim}{x}$. On définit alors:

$$\vec{e_i}(x_i) = \lim_{\substack{x_i' \to x_i \\ M \text{ fixé} \\ x_j' \; j \neq i \text{ fixés}}} \frac{\overrightarrow{MM'}}{x_i' - x_i} = \boxed{\left.\frac{\partial M}{\partial x_i}\right|_{x_j} = \left.\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x_i}\right|_{x_j} = \vec{e_i}(x_i)}$$

En chaque point de l'espace, les $\vec{e_i}$ forment une base vectorielle, et les $\vec{e_i}(\underset{\sim}{x})$ sont dit vecteurs de base au point $M(x_i)$

Remarque : La notation $\left.\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial x_i}\right|$ est abusive ; on devrait noter uniquement $\frac{\partial M}{\partial x_i}$ car on dérive la fonction M et non sa valeur $\underset{\sim}{x}$.

On définit Γ_{ij}^{k} tel que $\boxed{\left.\frac{\partial \vec{e_i}}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_l \\ l\neq j}} = \Gamma_{ij}^{k} e_k}$

(12) Le mouvement :

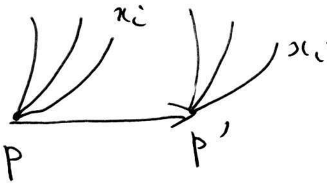
Dans E, il y a des "particules" qui se "meuvent" en fonction du temps t. Une particule est définie par un marqueur ε_i et une relation $\phi(\varepsilon_i, t)$ permettant de définir sa position dans l'espace E en tout temps :

$$\boxed{\underset{\sim}{x} = M(x_i = \phi(\varepsilon_i, t)) = P(\varepsilon_i, t)}$$ (relation de definition d'une particule)

position — particule

Cette relation permet de définir ce qu'on appelle le mouvement des particules dans E. Différentes grandeurs dérivées sont alors intéressantes : Pour chaque particule $\underset{\sim}{x} = P(\varepsilon_i, t)$ et en chaque temps t, on définit le vecteur $\vec{PP'}(\varepsilon_i, t, t')$ tel que $P'(\varepsilon_i, t') = P(\varepsilon_i, t) + \vec{PP'}$ et on note $\underset{\sim}{x}' - \underset{\sim}{x} = \vec{PP'}$. On définit alors la vitesse de la particule $P(\varepsilon_i, t)$ au temps t par :

$$\vec{v}(\varepsilon_i,t) = \lim_{\substack{t'\to t\\ \varepsilon_i \text{ fixé}}} \frac{\overrightarrow{PP'}}{t'-t} = \boxed{\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i} = \left.\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i} = \vec{v}(\varepsilon_i,t)}$$



<u>Remarque :</u>

On note abusivement $\left.\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}$ au lieu de $\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}$; $\underline{x}$ valeur de la fonction est mise à la place de la fonction. Après le remplacement de M ou P par $\underline{x}$, on voit si on a affaire à la fonction M ou P en regardant les variables de dérivation.

Comme $\underline{x} = P(\varepsilon_i,t) = M(x_i = \phi(\varepsilon_i,t))$, on a $P = M\circ\phi$ et en utilisant la formule de dérivée composée, il vient :

$$\vec{v}(\varepsilon_i,t) = \left.\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}(\varepsilon_i,t) = \left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i} = \left.\frac{\partial M}{\partial x_i}\right|_{x_j} \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{\varepsilon_j} = \left.\frac{\partial M}{\partial x_i}\right|_{x_j} \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}$$

$$= \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i} e_i(x_i=\phi(\varepsilon_i,t))$$

On note abusivement $e_i(x_i=\phi(\varepsilon_i,t)) = e_i(\varepsilon_i,t)$; la fonction e_i étant en fait ici $e_i\circ\phi$. On voit que $\left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}$ sont donc les composantes v^i de $\vec{v}$ sur la base e_i :

$$\boxed{\vec{v}(\varepsilon_i,t) = v^i(\varepsilon_i,t)\, e_i(\varepsilon_i,t)} \text{ avec } \boxed{v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\varepsilon_i}}$$

Comme $x_i = \phi(\xi_i, t)$, on note abusivement :

$\vec{v}\left(\xi_i = \phi^{-1}(x_i, t), t\right) = \vec{v}(x_i, t)$. La description de la vitesse par $\vec{v}(x_i, t)$ est dite Eulerienne alors que celle par $\vec{v}(\xi_i, t)$ est dite Lagrangienne.

On définit l'accélération de la particule $P(\xi_i, t)$ au temps t par : $\boxed{\vec{a}(\xi_i, t) = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right|_{\xi_i} = a^i e_i(x_i)}$.

Recherchons l'expression de a^i :

$$\vec{a} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial v^i e_i}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{\xi_i} e_i + v^i \left.\frac{\partial e_i}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{\xi_i} e_i + v^j \left.\frac{\partial e_j}{\partial t}\right|_{\xi_i}$$

Or $\left.\frac{\partial e_j}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial e_j}{\partial x_k}\right|_{x_i} \left.\frac{\partial x_k}{\partial t}\right|_{\xi_i} = v^k \Gamma^i_{jk} e_i$ et donc :

$$\boxed{a^i = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{\xi_i} + v^j v^k \Gamma^i_{jk}}$$

On définit, comme pour la vitesse, une description eulerienne $\vec{a}(x_i, t)$ de l'accélération.

$$\vec{a} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{x_i} + \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}\right|_t \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{x_i} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$$

$= \frac{d\vec{v}}{dt}$ par définition du gradient et d'une dérivée particulaire.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Recherchons l'expression de a^i en description eulerienne :

$$\underline{\left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{\xi_i}} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{x_j} + \left.\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|_{t,x_i} \left.\frac{\partial x_j}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{x_j} + v^j \left.\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|_{t,x_i}$$

d'où $$a_i = \left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{x_j} + v^j\left(\left.\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|_t + v^k \Gamma^i_{jk}\right) = \underline{\left.\frac{\partial v^i}{\partial t}\right|_{x_j} + v^j \nabla_j v^i}$$

par définition de la dérivée contravariante ∇_j

On définit également :

- le tenseur taux de déformation : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$
- le tenseur taux de rotation : $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j)$

On a : $\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} = \nabla_j v_i$; $\Omega_{ij} f^j = \vec{\Omega} \wedge \vec{f}$ où $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\omega}$ où $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$ est le champ de vorticité.

<u>Remarque</u> :

A t fixé, $\underset{\sim}{x} = P(\xi_i, t) = \hat{P}(\xi_i)(t)$ correspond à faire un changement de coordonnées curvilignes de repérage des points de l'espace. On définit alors :

$$\hat{e_i}(\xi_i)(t) = \left.\frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_j}(t) = \left.\frac{\partial P}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_j, t}$$

C'est les vecteurs de base des coordonnées ξ_i à l'instant t. On a :

$$\hat{e_i}(\xi_i)(t) = \left.\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\right|_t e_j(x_i).$$

② Mouvement virtuel et Référentiel :

②1 Mouvement virtuel :

Dans E, considérons un mouvement de particules virtuelles p^* repérées par les marqueurs x_i^* et défini par la relation :

$$\boxed{\underset{\sim}{x} = M(x_i = f(x_i^*, t)) = P^e(x_i^*, t)}$$

Pour ce mouvement, comme pour le précédent, on définit :

$$\boxed{\vec{v}^e(x_i^*, t) = \vec{v}^e(x_i, t) = \left.\frac{\partial P^e}{\partial t}\right|_{x_i^*}} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{x_i^*} e_i(x_i = f(x_i^*, t))$$

$$= \underline{v_i^e e_i}$$

La fonction e_i est en fait $e_i \circ f$.

Pour l'accélération :

$$\underline{a^e(x_i^*, t) = \vec{a}^e(x_i, t) = \left.\frac{\partial \vec{v}^e}{\partial t}\right|_{x_i^*}} = \left.\frac{\partial^2 P^e}{\partial t}\right|_{x_i^*} = a_i^e e_i$$

$$\underline{= \left.\frac{\partial \vec{v}^e}{\partial t}\right|_{x_i} + \vec{v}^e \cdot \text{grad}\, \vec{v}^e = \frac{d^e \vec{v}^e}{dt}}$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j^e + \nabla_j v_i^e) \qquad \Omega_{ij}^e f^j = \vec{\Omega}^e \wedge f \qquad \vec{\Omega}^e = \frac{1}{2}\vec{\omega}^e$$

$$\Omega_{ij}^e = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) \qquad \vec{\omega}^e = \text{rot}\, \vec{v}^e$$

A chaque instant t, la relation :

$$\underset{\sim}{x} = M(x_i = f(x_i^*, t)) = M \circ f = P^e(x_i^*, t) = M^e(x_i^*)(t)$$

correspond à faire un changement de coordonnées curvilignes de repérage de l'espace **E**. On définit alors :

$$e_i^e(x_i,t) = e_i^e(x_i^*,t) = e_i^e(x_i^*)(t) = \left.\frac{\partial M^e}{\partial x_i^*}\right|_{x_j^*}(t) = \left.\frac{\partial P^e}{\partial x_i^*}\right|_{x_j^*,t}$$

, les vecteurs de base des coordonnées x_i^* au temps t.

Par dérivation de fonctions composées, on a :

$$e_i^e(x_i,t) = \boxed{e_i^e(x_i^*)(t)} = \left.\frac{\partial M}{\partial x_j}\right|_{x_\ell} \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i^*}\right|_{t,x_j^*} = \boxed{\left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i^*}\right|_{x_\ell^*,t} \cdot e_j(x_i)}$$

(22) Notion de référentiel :

Inversons la relation $x_i = f(x_i^*,t)$:

x_i : coordonnées des particules ; x_i^* : marqueur des particules.

il vient $\boxed{x_i^* = f^{-1}(x_i,t)}$

On identifie alors les particules x_i^* comme les coordonnées d'un nouvel espace $E^*(f)$: $\underset{\sim}{x}^* = M^{*(f)}(x_i^*)$ et les coordonnées x_i avec les marqueurs d'une nouvelle particule virtuelle qui qui se déplace dans cet espace $E^{*(f)}$ suivant le mouvement :

$$\underset{\sim}{x}^* = M^{*(f)}(x_i^* = f^{-1}(x_i,t)) = P^0(x_i,t)$$

On identifie ensuite les particules ξ_i de E avec des particules de $E^*(f)$ se déplaçant suivant le mouvement :

$$\underset{\sim}{x}^* = M^{*(f)}\left(x_i^* = f^{-1}(\phi(\xi_i,t),t)\right)$$

$$= M^{*(f)}\left(x_i^* = \phi^{*(f)}(\xi_i,t)\right) = P^f(\phi)(\xi_i,t)$$

$$= P^*(\xi_i,t).$$

On identifie également les vecteurs de base $e_i^e(x_i^*)(t)$ dans E avec les vecteurs de base $e_i^*(x_i^*)$ de $E^*(f)$.

<u>Définition :</u>

> Le couple formé d'un espace $\mathcal{E}$ et d'une fonction $\mathcal{P}$ pour décrire les mouvements est appelé <u>référentiel</u>. On le note $\mathcal{R} = (\mathcal{E}, \mathcal{P})$. $\mathcal{P}$: mouvement de particules $\longrightarrow$ position des particules à tout t dans $\mathcal{E}$.

Comme cas particulier de référentiels, on a :

$R^* = (E^*(f), P^{(f)} = P^*)$ et $R = (E, P^{(id)} = P)$. Si $f = \phi$, on appelle le nouvel espace $\mathcal{E} = \hat{E}(\phi)$: $\underset{\sim}{\xi} = M^{*(\phi)}(\xi_i)$, et comme $\underset{\sim}{\xi} = P^\phi(\xi_i,t)$, on a $P^\phi = id$. On note $\hat{R}(\phi) = (\hat{E}(\phi), Id)$ ce nouveau référentiel que l'on appelle : <u>référentiel concomitant</u> au mouvement ϕ des particules (ξ_i)

<u>Définition :</u>

> f est appelé le <u>mouvement</u> d'entraînement de R^* par rapport à R et $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$ sont dits vitesse et accélération d'entraînement.

Définition :

$\boxed{\text{On définit également le mouvement d'un référentiel } R_2 = (\mathcal{E}_2, p^{f_1}) \text{ par rapport à un référentiel } R_1 = (\mathcal{E}_1, p^{f_2}) \text{ par la fonction } (f_1^{-1} \circ f_2)(x_{i2}^*, t) \text{ car :}}$

$$\left.\begin{array}{l} x_i = f_1(x_{i1}^*, t) \\ x_i = f_2(x_{i2}^*, t) \end{array}\right\} \text{ d'où } x_{i1}^* = (f_1^{-1} \circ f_2)(x_{i2}^*, t)$$

On peut alors définir le référentiel R_2 à partir du référentiel R_1 et de son mouvement par rapport à R_1 : $f_1^{-1} \circ f_2$ au lieu d'à partir de R et f, ce qui fait qu'il n'y a pas de référentiel privilégié ; tous ont une définition équivalente. On a donc la notion d'un espace et de <u>mouvements intrinsèques</u> qui se décrivent dans différents référentiels (relation d'équivalence et plongement de R).

Dans le référentiel R^*, à l'aide de la relation de mouvement : $\underset{\sim}{x}^* = p^*(\xi_i, t)$ et de la fonction coordonnées $\underset{\sim}{x} = M^*(x_i^*)$ on définit comme sur R : $e_i^*(x_i^*) = \left.\dfrac{\partial M^*}{\partial x_i^*}\right|$; $\dfrac{\partial e_i^*}{\partial x_j^*} = \Gamma_{ij}^{*k} e_k^*$

$$\vec{v}^*(\xi_i, t) = \left.\frac{\partial p^*}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial \underset{\sim}{x}^*}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial x_i^*}{\partial t}\right|_{\xi_i} e_i^*(x_i^*) = \vec{v}^*(x_i^*, t)$$

$$\vec{a}^* = a^{i*} e_i^*(x_i^*) = \left.\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t}\right|_{\xi_i} = \left.\frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2}\right|_{\xi_i} \quad \text{et on a } a^{*i} = \left.\frac{\partial v^{i*}}{\partial t}\right|_{\xi_i} + v^{*j} v^{*k} \Gamma_{jk}^{*i}$$

$$\vec{a}^* = \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t}\Big|_{x_i^*} + \vec{v}^* . \vec{\text{grad}}\, \vec{v}^* = \frac{d^* \vec{v}^*}{dt} \qquad a_i^* = \frac{\partial v^{*i}}{\partial t}\Big|_{x_j^*} + v^{*j} \nabla_j^* v^{*i}$$

$$\vec{\omega}^* = \vec{\text{rot}}\, \vec{v}^* = 2\vec{\Omega}^*$$

Remarque :

Comme à chaque instant, la relation :

$\underset{\sim}{x} = M(x_i = f(x_i^*, t)) = P^e(x_i^*, t) = M^*(x_i^*)(t)$ correspond à faire un changement de coordonnées curvilignes de repérage de l'espace et que $\vec{\text{grad}}$, $\vec{\text{rot}}$, div, ... sont des opérateurs de dérivation partielle ~~de~~ temps fixé, ces opérateurs sont des êtres intrinsèques à tous les référentielles.

(23) Formules de changement de référentiel :

On rappelle que l'on a $x_i = f(x_i^*, t)$ et $x_i = \varphi(\xi_i, t)$

231 Composition des vitesses :

On utilise la formule de dérivation composée sur les variables : $\begin{matrix}\xi_i\\ t\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}x_i^*\\ t\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}x_i\\ t\end{matrix}$:

$$\vec{v} = \frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_i(x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^*}\Big|_t \frac{\partial x_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_i + \frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{x_j^*} \frac{\partial t}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_i$$

$$= \vec{v_e} + \frac{\partial x_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_j^e(x_i^*, t)$$

On a donc $\boxed{\vec{v} = \vec{v_e} + \vec{v}^*}$ après identification de $e_j^e(x_i^*, t)$ avec $e_j^*(x_i^*)$

<u>232</u> <u>Composition des accélérations :</u>

On utilise $\vec{v} = \vec{v_e} + \vec{v}^*$ dans l'expression de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v_e}}{dt} + \frac{d\vec{v}^*}{dt}$$

On a : $\frac{d\vec{v_e}}{dt} = \frac{\partial \vec{v_e}}{\partial t}\Big|_{x_i} + \vec{v}\cdot \text{grad}\,\vec{v_e} = \frac{\partial v_e}{\partial t}\Big|_{x_i} + \vec{v_e}\cdot \text{grad}\,\vec{v_e} + \vec{v}^*\cdot \text{grad}\,\vec{v_e}$.

$$= \vec{a_e} + \vec{v}^*\cdot \text{grad}\,\vec{v_e}$$

De plus :

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt} = \frac{\partial\, v_j^* e_j^e(x_i^*, t)}{\partial t}\Big|_{\xi_i} = \frac{\partial v_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_j^e(x_i, t) + v_j^* \frac{\partial e_j^e(x_i^*, t)}{\partial t}\Big|_{\xi_i}$$

$$= \frac{\partial v_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_j^e(x_i^*, t) + v_j^* \left(\frac{\partial e_j^e}{\partial x_i^*}\Big|_t \frac{\partial x_i^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} + \frac{\partial e_j^e}{\partial t}\Big|_{x_i^*} \frac{\partial t}{\partial t}\Big|_{\xi_i} \right)$$

Or $\vec{a}^* = \frac{\partial v_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_j(x_j^*) + v_j^* \frac{\partial e_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i}$

$$= \frac{\partial v_j^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i} e_j(x_j^*) + v_j^* \frac{\partial e_j'}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial t}\Big|_{\xi_i}.$$

Après identification, il vient :

$$\frac{dv^*}{dt} = a^* + v_j^* \frac{\partial e_j^e}{\partial t}\Big|_{x_i^*}$$

Or $\left.\frac{\partial e_j^e}{\partial t}\right|_{x_i^*} = \left.\frac{\partial \left.\frac{\partial p^e}{\partial x_j^*}\right|_{t,x_i^*}}{\partial t}\right|_{x_i^*} = \left.\frac{\partial \left.\frac{\partial p^e}{\partial t}\right|_{x_i^*}}{\partial x_j^*}\right|_{t,x_i} = \frac{\partial \vec{v}^e}{\partial x_j^*}$ et

donc : $v_j^* \left.\frac{\partial e_j^e}{\partial t}\right|_{x_i^*} = v_j^* \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial x_j^*} = \vec{v}^* . \operatorname{grad} \vec{v}_e$

La relation de composition des accélérations s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

où $\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{v}^* . \operatorname{grad} \vec{v}_e}$ est le champ d'accélération de Coriolis.

Comme $\vec{v}^e = \vec{\vec{\varepsilon}}^e + \vec{\vec{\Omega}}^e$ on a également $\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_c &= 2\vec{\vec{\varepsilon}}^e \vec{v}^* + 2\vec{\Omega}^e \wedge \vec{v}^* \\ &= 2\vec{\vec{\varepsilon}}^e \vec{v}^* + \vec{\omega}^e \wedge \vec{v}^*\end{aligned}}$

233 Composition de la vorticité :

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v}_e + \operatorname{rot} \vec{v}^* = \boxed{\vec{\omega}_e + \vec{\omega}^* = \vec{\omega}}$$

div ω = div ω^* = div ω_e = 0.

③ Equations de Navier - Stokes dans R^* :

On note $\left.\frac{\partial v^*}{\partial t}\right|_{x_i^*} = \frac{\partial^{R^*} \vec{v}}{\partial t}$ et $\frac{d^* \vec{v}^*}{dt} = \frac{d^{R^*} \vec{v}^*}{dt}$.

Dans R les équations s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{d^R \vec{v}}{dt} = \frac{\partial^R \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} . \operatorname{grad} \vec{v} = \frac{\partial^R \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} \qquad \operatorname{div} \vec{\omega} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^R \vec{\omega}}{\partial t}\right|_{x_i} + \operatorname{Rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = \frac{d^R \vec{\omega}}{dt} - \vec{\omega} . \operatorname{grad} \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega}$$

Dans R^* :

- la conservation de la masse devient :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v}^* = -\mathrm{div}\,\vec{v_e}}$$

- $\omega_e = \mathrm{rot}\, v_e$ et $\vec{\omega}^* = \mathrm{rot}\, v^*$ d'où $\mathrm{div}\,\omega^* = \mathrm{div}\,\omega_e = 0$.

- Equation de Navier Stokes.

$$a^* = \frac{d^{R^*}\vec{v}^*}{dt} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t} + \vec{v}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^* + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\vec{v}^* + \nu\Delta\vec{v_e}$$

$$= \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t} + \vec{v}^*\cdot\mathrm{grad}(\vec{v}^* + 2\vec{v_e}) + \vec{a_e}$$

$$= \frac{\partial^{R^*}\vec{v}^*}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\frac{v^{*2}}{2} + (\vec{\omega}^* + \vec{\omega_e})\wedge\vec{v}^* + 2v^*\,\overset{\Rightarrow}{\varepsilon_e} + \vec{a_e}$$

- Equation de la vorticité :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} + \frac{d\omega^*}{dt}.$$

Or $\displaystyle \frac{d\vec{\omega_e}}{dt} = \frac{\partial\vec{\omega_e}}{\partial t}\Big|_{x_i} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e} = \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt} + \vec{v}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e}$

et $\displaystyle \frac{d\vec{\omega}^*}{dt} = \frac{d^*\vec{\omega}^*}{dt} + \cancel{v}^*\,\mathrm{grad}\,\cancel{\omega_e}$ d'où $\displaystyle \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^*\vec{\omega}^*}{dt} + \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt} + 2\vec{v}^*\cdot\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e}$ $+\vec{\omega}^*\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v_e}$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - \vec{\omega}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v} = \frac{d^*\omega^*}{dt} + 2\vec{v}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e} - \vec{\omega}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^* + \omega^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e}$$
$$-\vec{\omega_e}\cdot\mathrm{grad}\,\vec{v_e} + \frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt} - \omega^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e} - \vec{\omega_e}\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^*.$$

D'où

$$\left\{\boxed{\frac{d^*\vec{\omega}^*}{dt} - \vec{\omega}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^*}\right\} + \left\{\frac{d^e\vec{\omega_e}}{dt} - \vec{\omega_e}\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e}\right\} + 2\vec{v}^*\,\mathrm{grad}\,\vec{\omega_e} - \cancel{\omega^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e}} - \vec{\omega_e}\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^*$$
$$= \nu\Delta\vec{\omega}^* + \nu\Delta\vec{\omega_e}$$

4) Situations particulières :

4.1) Cas de la translation solide :

On a $x_i \vec{e_i} = \vec{OO'}(t) + x_i^* e_i^*$

$\vec{v_e} = \dfrac{d\vec{OO'}}{dt}$ $\quad \vec{a_e} = \dfrac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}$ $\quad \varepsilon_{ij}^e = \Omega_{ij}^e = \Omega^e = \omega^e = 0$.

$\vec{a_c} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v}^* = 0 \qquad \operatorname{div} \omega^* = 0 \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}^* \\ \dfrac{\partial^{R^*} \vec{v}^*}{\partial t} + \operatorname{grad} \dfrac{v^{*2}}{2} + \omega^* \wedge v^* + \underline{\underline{\dfrac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}}} = -\dfrac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}^* \\ \dfrac{d^* \vec{\omega}^*}{dt} - \vec{\omega}^* \operatorname{grad} \vec{v}^* = \nu \Delta \vec{\omega}^* \end{array}}$$

4.2) La rotation solide :

Soit un référentiel R^* tournant autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}^s(t)$. On a :

$$x_i \vec{e_i} = x_i^* e_i^*(t) \text{ avec } \frac{de_i^*}{dt} = \vec{\Omega}^s \wedge \vec{e_i}^*$$

D'où : $\vec{v_e} = \vec{\Omega}^s \wedge \vec{OM}$ $\qquad \operatorname{div} \vec{v_e} = 0$

$$\vec{a_e} = \vec{\Omega}^s \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} = \vec{\Omega}^s \wedge (\vec{\Omega}^s \wedge \vec{OM}) + \frac{d\vec{\Omega}^s}{dt} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\omega_e} = \operatorname{rot} \vec{v_e} = \operatorname{rot}(\vec{\Omega}^s \wedge \vec{OM}) = 3\vec{\Omega}^s - \vec{\Omega}^s \operatorname{grad} \vec{OM} = 2\vec{\Omega}^s.$$

$$\operatorname{div} \vec{\omega_e} = 0$$

$$\operatorname{grad} \vec{v_e} = v_{e_{i,j}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega^s_{x_3} & \Omega^s_{x_2} \\ \Omega^s_{x_3} & 0 & -\Omega^s_{x_1} \\ -\Omega^s_{x_2} & \Omega^s_{x_1} & 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_i}} \quad \text{d'où } \varepsilon_{ij}^e = 0$$

$$\Delta \vec{v_e} = \Delta(\vec{\Omega}^s \wedge OM) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v_e}) = 0.$$

(15

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}_e = \mathrm{rot}(\vec\Omega \wedge \vec v_e) + \mathrm{rot}\left(\frac{d\vec\Omega^s}{dt} \wedge \vec{OM}\right)$$

$$= (\underbrace{\mathrm{div}\,\vec v_e}_{0} - \vec\Omega^s . \mathrm{grad}\,\vec v_e) + 2\frac{d\Omega^s}{dt} = (-\vec\omega_e \wedge \vec\Omega^s) + 2\frac{d\Omega^s}{dt} = 2\frac{d\vec\Omega^s}{dt}.$$

Si $\vec\Omega^s$ est indépendant du temps, $\vec a_e$ est un gradient.

$$\vec\Omega \wedge (\vec\Omega \wedge \vec{OM}) = (\vec\Omega . \vec{OM})\vec\Omega - (\vec\Omega . \vec\Omega)\vec{OM} \qquad \mathrm{grad}\frac{OM^2}{2} = \vec{OM}$$

$$= (\vec\Omega . \vec{OM})\vec\Omega - |\vec\Omega|^2 \vec{OM} \qquad \mathrm{grad}\frac{(\vec{OM}.\vec\Omega)^2}{2} = (\vec{OM}.\vec\Omega)\vec\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\left[(\vec{OM}.\vec\Omega)^2 - \Omega^2 \vec{OM}^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,|\vec\Omega \wedge \vec{OM}|^2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v_e^2$$

Si $\vec\Omega^s = 0$ il vient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{div}\, v^* = 0 \\ \left.\dfrac{\partial v^*}{\partial t}\right|^{R^a} + (\omega^* + 2\vec\Omega^s)\wedge \vec v^* + \mathrm{grad}\,\dfrac{\vec v^{*2}}{2} - \mathrm{grad}\,\dfrac{v_e^2}{2} = -\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P + \nu\Delta v^* \end{array}}$$

$$\boxed{\omega = \omega^* + 2\vec\Omega^s} \qquad \mathrm{div}\,\omega^* = 0$$

$$\left.\frac{\partial \omega^*}{\partial t}\right|_{x_i^*} + \vec v^* . \mathrm{grad}(\omega^* + 2\vec\Omega^s) - (\omega^* + 2\vec\Omega^s).\mathrm{grad}\,\vec v^* = \nu\Delta\omega^*$$ (en prenant le rotationnel dans)

c'est à dire $$\boxed{\frac{d^*\vec\omega^*}{dt} - (\omega^* + 2\vec\Omega^s)\,\mathrm{grad}\,\vec v^* = \nu\Delta\vec\omega^*}$$

(43) Repère concomitant : On prend $x_i^* = \xi_i$

$$\vec v_e = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{x_i^*} e_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi_i} e_i = \vec v \qquad \vec a_e = \vec a \qquad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} \qquad \vec\omega^e = \vec\omega$$

$$\boxed{v^* = 0} \qquad \vec a_c = 0 \qquad a^* = 0$$

Ici $\vec v_e$ est une inconnue qui vérifie la même équation de Navier Stokes que $\vec v$.

Remarques Complémentaires.

Soit $x_i = f(x_j^*)$ un changement de coordonnées curvilignes

① Lien entre les vecteurs de base :

$$\boxed{e_i^* = \frac{\partial x_j}{\partial x_i^*} e_j} \quad \text{et} \quad \boxed{e_i = \frac{\partial x_j^*}{\partial x_i} e_j^*}$$

② Lien entre les tenseurs métriques :

$$g_{ij}^* = e_i^* \cdot e_j^* = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} e_k\right) \cdot \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_j^*} e_p\right) = \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_p}{\partial x_j^*} e_k e_p$$

D'où

$$\boxed{g_{ij}^* = \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_p}{\partial x_j^*} g_{kp}}$$

et

$$\boxed{g_{ij} = \frac{\partial x_k^*}{\partial x_i} \frac{\partial x_p^*}{\partial x_j} g_{kp}^*}$$

③ A propos de $\mathrm{Grad}\,\vec{V}$: $\vec{V} = \sum v^i e_i$

On a $\boxed{d\vec{V} = \mathrm{grad}\,\vec{V} \cdot d\vec{M}}$ par définition de $\mathrm{grad}\,\vec{V}$.

Comme $\vec{V} = \sum v^i e_i$ on a : $d\vec{V} = \sum_i dv^i e_i + \sum_j v^j de_j$

Or $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx_j$ et $de_j = \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i = \Gamma_{ji}^k e_k\, dx_i$

D'où $d\vec{V} = \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x_j} e_i\, dx_j + \sum_{ij} v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial v^j}{\partial x_i} e_j\, dx_i + \sum_{ij} v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \sum_{ij} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x_i} e_j + v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i}\right) dx_i = \frac{\partial v^j e_j}{\partial x_i} dx_i$$

Or $d\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v} \cdot d\vec{M} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v} \cdot (\vec{e_j}\, dx_j) = \vec{e_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v} \cdot dx_i$

Il vient donc $\vec{e_i} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = \sum_j \frac{\partial v^j e_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$

D'où $\vec{f} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = (f_i \vec{e_i}) \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = f_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$

$$\boxed{\vec{f} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = f_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}}$$ $\forall$ le système de coordonnées curvilignes ortogonales ~~ou~~ ~~pas~~.

On a également :

$$\vec{e_i} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial v^j e_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v^j}{\partial x_i} e_j + v^j \frac{\partial e_j}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial v^k}{\partial x_i} e_k + v^j \Gamma^k_{ij} e_k$$

$$\boxed{\vec{e_i} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x_i} + v^j \Gamma^k_{ij}\right) \vec{e_k}}$$

Determinons alors la divergence :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \mathrm{Trace}\ \mathrm{grad}\,\vec{v} = \boxed{\frac{\partial v^i}{\partial x_i} + v^j \Gamma^i_{ij} = \mathrm{div}\,\vec{v}}$$

Pour des coordonnées cartésiennes non orthogonales, on a $\Gamma^i_{ij} = 0$ et il vient $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x_i}$.

4 Calcul de grad φ dans le cas général (coordonnées non orthogonales) :

41 Calcul direct :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\vec{M} = \mathrm{grad}_i\,\varphi\, \vec{e_i} \cdot (dx_j\, e_j) \quad \text{car } dM = \frac{\partial M}{\partial x_j} dx_j = e_j\, dx_j$$

$$= \mathrm{grad}_i\,\varphi\; g_{ij}\, dx_j \quad \text{d'où } \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \mathrm{grad}_i\,\varphi\; g_{ij} = G\ \mathrm{grad}\,\varphi$$

et donc $$\boxed{\mathrm{grad}\,\varphi = G^{-1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)}$$

4?) Calcul indirect :

On connait l'expression de grad φ dans une base cartésienne e_i pour des coordonnées x_i :

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i$$

. On veut avoir son expression sur des coordonnées x_i^α. Cherchons $\operatorname{grad}\varphi \cdot e_\ell^\alpha$:

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot e_\ell^\alpha = (\operatorname{grad}_k \varphi \cdot e_k^\alpha) \cdot e_\ell^\alpha = \operatorname{grad}_k \varphi \, g^\alpha_{k\ell}$$

On a également :

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot e_\ell^\alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot e_i\right) \cdot e_\ell^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i \cdot e_\ell^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_\ell^\alpha} \cdot e_k\right)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_\ell^\alpha} \delta_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\ell^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell^\alpha}$$

On retrouve $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\ell^\alpha} = \operatorname{grad}_k \varphi \, g^\alpha_{k\ell}$ c'est à dire

$$\operatorname{grad}\varphi = G^{\alpha -1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^\alpha}\right)$$

$\boxed{\text{Compléments}}$

① Composition des vitesses en description d'Euler :

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec{v_e}}{dt} + \frac{d v^*}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{v_e}}{dt} = \vec{a_e} + v^* \,\mathrm{grad}\, \vec{v_e}.$$

$$\frac{dv^*}{dt} = \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_x + \vec v \cdot \mathrm{grad}\, v^* \qquad \text{Or } \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_{x^*} = \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_x + \frac{\partial v^*}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{x^*} = \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_x + \vec{v_e}\,\mathrm{grad}\, v^*$$

D'où
$$\frac{dv^*}{dt} = \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_{x^*} - v_e\,\mathrm{grad}\, v^* + v\,\mathrm{grad}\, v^*$$
$$= \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_{x^*} + v^*\,\mathrm{grad}\, v^*$$
$$= \frac{\partial v_i^*}{\partial t}\Big|_{x^*} e_i^* + v^*\,\mathrm{grad}\, v^* + v_i^*\frac{\partial e_i^*}{\partial t} = a^* + v_i^*\frac{\partial e_i^*}{\partial t}\Big|_{x_i^*} = a^* + v^*\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e}$$

d'où $\vec a = a^* + \vec{a_e} + 2\vec{v^*}\,\mathrm{grad}\,\vec{v_e}$.

② Les théorèmes intégraux en repère absolu :

$$F = \int_{\Lambda t} f(x,t)\,dx$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \underbrace{\int_{\Lambda_u}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\vec U)\right]dx}_{=\text{"}\frac{dF_u}{dt}\text{"}} + \int_{\partial\Lambda_u} f\,(\vec V - \vec U)\cdot n\,ds$$

Soit $\underset{\sim}{x} = M(x_i = f(x_i^*,t)) = p_e(x_i^*, t)$ $\qquad U = v_e = \frac{\partial p_e}{\partial t}\Big|_{x_i^*}$

Soit $\underline{f^*(x^*,t) = f(p_e(x_i^*,t),t)}$

On a $\frac{\partial \tilde f^*}{\partial t}\Big|_{x^*} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\underset{\sim}{x}} + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{x_i}}\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_{x^*} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{grad}\, f\cdot\vec U$

$$\int_{\Lambda_v} \left[\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x + \mathrm{div}(f\vec{v})\right] dx$$

$$= \int_{\Lambda_v} \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_x dx + \int_{\partial\Lambda_v} f\,\vec{v}.\vec{n}\,ds = \int_{\Lambda_v} \left(\frac{\partial f^a}{\partial t}\Big|_{x^a} - \vec{\mathrm{grad}}\, f.\vec{v}\right) + \int_{\partial\Lambda_v} f\,\vec{v}.\vec{n}\,ds$$

$$= \int_{\Lambda_v} \left(\frac{\partial f^a}{\partial t}\Big|_{x^a} - f\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) dx = \int_{\Lambda_v^a} \left(\frac{\partial f^a}{\partial t}\Big|_{x^a} - f^a\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) dx^a$$

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Lambda_v^a} \frac{\partial f^a}{\partial t}\Big|_{x^a} dx^a + \int_{\partial\Lambda_v^a} f^a (V-v).\vec{n}\,ds - \int_{\Lambda_v^a} f^a\,\mathrm{div}\,\vec{v}\,dx^a .$$

$\Rightarrow$ Calcul sur $\Lambda_t, \Lambda_0, \Lambda_v$.

③ les <u>théoremes intégraux en repère relatif</u> : cas de la QDM.

$$\vec{A} = \frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho\vec{v}\,dx = \sum F_{ext}.$$

$\vec{v} = \vec{v_e} + v^R$.

$$\vec{A} = \frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho \vec{v_e}\,dx + \frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho v^a\,dx$$

Or $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho v_e\,dx = \int_{\Lambda} \frac{\partial v_e}{\partial t}\Big|_x dx + \int_{\partial\Lambda} \rho\vec{v_e}\,\vec{v}.\vec{n}\,ds = \int_{\Lambda} \frac{\partial v_e}{\partial t}\Big|_x dx + \int_{\partial\Lambda} \rho v_e \vec{v_e}.\vec{n}\,ds + \int_{\partial\Lambda} \rho v_e\, v^a.\vec{n}\,ds.$

$$= \vec{A_e} + \int_{\partial\Lambda} \rho v_e\,\vec{v}^a.\vec{n}\,ds. \qquad = \int_{\Lambda} \frac{\partial v_e}{\partial t}\Big|_x dx + \int_{\Lambda} (\mathrm{div}\,\vec{v})\,\vec{v_e} + v\,\mathrm{grad}\,v_e\,dx.$$

$$= \hat{A_e} + \int_{\Lambda} (\mathrm{div}\,v^a)\,\vec{v_e} + v^a\,\mathrm{grad}\,v_e$$

$$\vec{A}^a = \frac{d^a}{dt}\int_{\Lambda_t^a} \rho\vec{v}^a\,dx^a = \int_{\Lambda_t^a} \frac{\partial \rho\vec{v}^a}{\partial t} dx^a + \int_{\partial\Lambda_t^a} \rho v^a v^a.\vec{n}\,ds = \int_{\Lambda_t^a} \left(\frac{\partial v^a}{\partial t} dx^a + (\mathrm{div}\,\vec{v}^a)\vec{v}^a + \vec{v}^a\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^a\right) dx^a$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho v^a\,dx = \int_{\Lambda} \frac{\partial v^a}{\partial t}\Big|_x dx + \int_{\partial\Lambda} v^a\,\vec{v}.\vec{n}\,ds \qquad \text{Or } \frac{\partial v^a}{\partial t}\Big|_x = \frac{\partial v^a}{\partial t}\Big|_{x^a} - \vec{v_e}\,\mathrm{grad}\,v^a$$

d'où $\displaystyle \cancel{\frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho v^a\,dx = \int_{\Lambda} \frac{\partial v^a}{\partial t}\Big|_{x^a} dx + \int_{\Lambda} -\vec{v_e}.\vec{\mathrm{grad}}\,v^a\,dx + \int_{\partial\Lambda} v^a\,v^a.\vec{n}\,ds + \int_{\partial\Lambda} v^a\,\vec{v_e}.\vec{n}\,ds}$

$$\cancel{= \int_{\Lambda} \frac{\partial v^a}{\partial t}\Big|_{x^a} dx + \int_{\partial\Lambda} v^a v^a.\vec{n}\,ds + \int_{\Lambda} \vec{v}^a\,\mathrm{div}\,v_e\,dx}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Lambda_t} \rho v^* dx = \int_\Lambda \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_x dx + \int_\Lambda \left[(\mathrm{div}\,\vec{v}')\,\vec{v}^{\,*} + \vec{v}'\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^{\,*}\right] dx$$

$$= \int_\Lambda \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_{x^*} dx + \int_\Lambda -\vec{v_e}'\,\mathrm{grad}\,v^* + v_e\,\mathrm{grad}\,\vec{v}^{\,*} + v^*\,\mathrm{grad}\,v^* + (\mathrm{div}\,\vec{v}')\,v^*$$

$$= \int_\Lambda \frac{\partial v^*}{\partial t}\Big|_{x^*} dx + \int_\Lambda v^*\,\mathrm{grad}\,v^* + (\mathrm{div}\,v^*)\,v^* + \int_\Lambda (\mathrm{div}\,v_e)\,v^* + \int_\Lambda v^*\cdot\mathrm{grad}\,v_e$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A_e} + \vec{A}^* + \int_\Lambda (\mathrm{div}\,\vec{v}^{\,*})\,\vec{v_e} + (v^*\,\mathrm{grad}\,v_e + (\mathrm{div}\,\vec{v_e})\,v^* = \Sigma F}$$

et

$$\int_\Lambda a_e + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(\mathrm{div}\,\vec{v})}}\,\vec{v_e} + a^* + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(\mathrm{div}\,v)}}\,v^* + 2v^*\,\mathrm{grad}\,v_e = \Sigma F.$$

$$\boxed{e_i^{*} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i^{*}} e_j} \quad \text{et} \quad \boxed{e_i = \frac{\partial x_j^{*}}{\partial x_i} e_j^{*}}$$

$$g_{ij}^{*} = e_i^{*} e_j^{*} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i^{*}} e_k\right)\left(\frac{\partial x_l}{\partial x_j^{*}} e_l\right) = \frac{\partial x_k}{\partial x_i^{*}} \frac{\partial x_l}{\partial x_j^{*}} e_k \cdot e_l$$

$$\boxed{g_{ij}^{*} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i^{*}} \frac{\partial x_l}{\partial x_j^{*}} g_{kl}} \quad \text{et} \quad \boxed{g_{ij} = \frac{\partial x_k^{*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_l^{*}}{\partial x_j} g_{kl}^{*}}$$

Calcul de grad φ :

① $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^{*}} dx_i^{*}$

$= \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot d\vec{M} = \text{grad}_i \varphi\, \vec{e_i} \cdot (dx_1 \vec{e_1} + dx_2 \vec{e_2} + dx_3 e_3)$ si $g_{ij} = \delta_{ij}$

ou $\underset{\text{(en général)}}{=} \text{grad}_i \varphi\, e_i^{*} \cdot \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_j^{*}} dx_j^{*}\right) = \text{grad}_{i^*} \varphi\, e_i^{*} \cdot e_j^{*} dx_j^{*} = \text{grad}_{i^*} \varphi\, g_{ij}^{*} dx_j^{*}$.

d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} = \text{grad}_{i^*} \varphi\, g_{ij}^{*} = G^{*} \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = G^{*-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}}\right)}$$

② $g_{ij} = \delta_{ij}$

$\cancel{\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} \frac{\partial x_j^{*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^{*}}{\partial x_i} e_k^{*} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} \delta_{il} \frac{\partial x_l^{*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^{*}}{\partial x_i} e_k^{*}}$

$\cancel{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot e_l^{*} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} \delta_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^{*}}}$ Or $\cancel{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \text{grad}_k \varphi\, e_k^{*}}$

$\cancel{\text{grad}\,\varphi \cdot e_l^{*} = \text{grad}_k \varphi\, g_{kl}^{*}}$

$\cancel{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot \vec{e_l}^{*} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} \frac{\partial x_j^{*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_k^{*}}{\partial x_i} g_{kl}^{*} = \delta_{pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}} \frac{\partial x_j^{*}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^{*}}{\partial x_k} g_{kl}^{*}}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot \vec{e_l}^{*} = (\text{grad}_k \varphi \cdot e_k^{*}) \cdot e_l^{*} = \text{grad}_k \varphi\, g_{kl}^{*}$

$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i\right) \cdot e_l^{*} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i \cdot e_l^{*} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e_i} \cdot \left(\frac{\partial x_q}{\partial x_l^{*}} \vec{e_q}\right)$

$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_l^{*}} \delta_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_l^{*}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_l^{*}}$

On retrouve $\underline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_l^{*}} = \text{grad}_k \varphi\, g_{kl}^{*}}$ cad $\boxed{\text{grad}\,\varphi = G^{*-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j^{*}}\right)}$

Calcul de grad $\vec{v}$:

- $\vec{V} = \sum v^i e_i$

$$\boxed{d\vec{v} = \text{grad}\,\vec{v}\cdot d\vec{M}}$$

$$= \sum_i dv^i e_i + \sum_j v^j de_j$$

$$= \text{grad}\,\vec{v}\cdot(\vec{e_j}\, dx_j) = \vec{e_j}\cdot\text{grad}\,\vec{v}\; dx_j .$$

$$dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} dx_j \qquad de_j = \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i = \Gamma^{q}_{ji}\, \vec{e_q}\, dx_i .$$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x_j} e_i dx_j + \sum_{ji} v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \sum_{ij} \frac{\partial v^j}{\partial x_i} e_j dx_i + \sum_{ij} v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \sum_{ij} \left(\frac{\partial v^j}{\partial x_i} e_j + v_j \frac{\partial e_j}{\partial x_i}\right) dx_i .$$

$$= \sum_{i} \left(\sum_j \frac{\partial v^j e_j}{\partial x_i}\right) dx_i \quad \text{d'où} \quad \vec{e_i}\cdot\text{grad}\,\vec{v} = \sum_j \frac{\partial v^j e_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

D'où $\vec{f}\cdot\text{grad}\,\vec{v} = (f_i \vec{e_i})\cdot\text{grad}\,\vec{v} = f_i \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$

$$\boxed{\vec{f}\cdot\text{grad}\,\vec{v} = f_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}}$$

$\forall$ système de coordonnées : curvilignes - non orthogonales.

- $\vec{e_i}\cdot\text{grad}\,\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_j e_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i} e_j + v_j \dfrac{\partial e_j}{\partial x_i}$

$$= \frac{\partial v_q}{\partial x_i} e_q + v_j \Gamma^q_{ij} e_q$$

$$= \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_i} + v_j \Gamma^q_{ij}\right)\vec{e_q}$$

$$\boxed{\text{div} = \text{Trace grad}\, v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_j \Gamma^i_{ij}}$$