Margerit D

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

COURS DE MATHEMATIQUES

--ooOoo--

NOTIONS SUR LES TENSEURS CARTESIENS

(MODELISATION : 1re partie)

Par Hélène DUCAUQUIS

Année Universitaire 1990/1991

Licence de Mécanique

NOTIONS SUR LES TENSEURS CARTESIENS

I - INTRODUCTION. GENERALITES. RAPPELS. 1
1 - Introduction 1
2 - Vecteurs 1
3 - Changement de repère orthonormal dans R^3 5
3.1. Construction de la matrice de passage 5
3.2. Propriétés de la matrice de passage 6
3.3. Transformation d'une matrice dans un changement de repère orthonormé 7
II - TENSEURS. 8
1 - Définitions d'un tenseur du second ordre 8
2 - Distinction entre tenseur du second ordre et matrice carrée 9
3 - Espace vectoriel des tenseurs du second ordre 10
4 - Forme bilinéaire associée à un tenseur du second ordre 10
5 - Tenseurs d'ordre supérieur 11
6 - Opérations sur les tenseurs 12
6.1. Produit tensoriel 12
6.2. Contraction 13
6.3. Produits contractés 13
III - EXEMPLES DE TENSEURS UTILES DANS LES CALCULS. 15
1 - Tenseurs unité ou tenseurs de Kronecker. 15
2 - Tenseur d'orientation où tenseur alterné fondamental 15
2.1. Introduction et définition 15
2.2. Relations importantes 16
2.3. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur soit symétrique 20
2.4. Ecriture rapide de quelques identités 20
IV - DIRECTIONS PRINCIPALES ET VALEURS PROPRES D'UN TENSEUR D'ORDRE 2. INVARIANTS ELEMENTAIRES. 21
1 - Cas général 21
2 - Cas des tenseurs symétriques (ou autoadjoints) 22
V - POSSIBILITES DE DECOMPOSITIONS D'UN TENSEUR DU SECOND ORDRE. 25
1 - Décomposition canonique d'un tenseur en parties symétrique et anti-symétrique 25
2 - Décomposition d'un tenseur en partie sphérique et déviateur 26
3 - Décomposition polaire d'un tenseur non dégénéré 26

VI - NOTIONS ELEMENTAIRES D'ANALYSE TENSORIELLE.

1 - Champ de tenseur 29

1.1. Notion de différentielle : gradient et divergence d'un champ de tenseur 29

2 - Tenseur gradient d'un champ de vecteur 30

2.1. Définition et décomposition canonique 30

2.2. Champ de moment (ou champ des vitesses d'un mt de solide) 32

2.3. Champ de gradient 33

3 - Equations de compatibilité (ou d'intégrabilité) 34

3.1. Introduction 34

3.2. Problème 1 34

3.3. Problème 2 37

VII - FONCTION DE TENSEURS 39

1 - Définition et exemples 39

2 - Fonctions isotropes 41

2.1. Remarque et définition 41

CONCLUSION - REFERENCES 46

NOTIONS SUR LES TENSEURS CARTESIENS.

\- - - -

I - INTRODUCTION. GENERALITES. RAPPELS.

1 - Introduction.

La notion de tenseur est fondamentale en mécanique. La théorie générale des tenseurs est assez complexe mais elle devient extrêmement simple si l'on se restreint à ne considérer que des repères orthonormés, on a alors des tenseurs cartésiens. Nous nous placerons ici dans ce cadre simplifié parce qu'il sera suffisant pour la théorie mathématique élémentaire des milieux déformables et parce qu'il nous permettra ainsi d'introduire des techniques de calculs assez utiles.

2 - **Vecteurs** : L'espace usuel de la mécanique classique est l'espace $\mathcal{E}$ de la géométrie Euclidienne affine de dimension 3 dont les éléments sont des points correspondants à la notion physique de lieu ou position. A $\mathcal{E}$ correspond l'espace vectoriel Euclidien E de dimension 3 par l'application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ qui à deux points P et Q de $\mathcal{E}$ associe le vecteur X=PQ de E tel que PQ = -QP et PQ= PM+MQ.
E est un espace vectoriel de dimension finie 3, sur le corps des réels, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire, d'une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée est définie positive.

A tout couple X, Y $\in$ E on associe X.Y $\in$ R tel que :

(1) $$(aX + bY).Z = a(X.Z) + b(Y.Z) \quad \forall Z \in E;\ a,b \in R$$

(2) $$X.Y = Y.X$$

(3) $$X.X \geqslant 0; \quad X.X = 0 \longleftrightarrow X=0$$

Considérons une base orthonormée de E : e_1, e_2, e_3 c'est-à-dire que

(4) $$e_i . e_j = \delta_{ij}$$

(5) $$\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker } = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\forall X \in E, \exists\ x_1, x_2, x_3 \in R$ tels que

(6) $$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_i e_i,$$

en faisant ici la convention de l'indice muet : selon cette convention, lorsqu'un indice est répété deux fois dans un monôme, ce monôme doit être en fait remplacé par la somme de tous les termes obtenus en donnant à cet indice successivement les valeurs 1, 2, 3 (1,2...,n; dans le cas d'un espace à n dimensions) dans ce monôme. L'indice i dans (6) est appelé muet car la lettre qui le représente n'a aucune importance. En effet : $x_i e_i = x_k e_k$.

Les x_i sont appelés composantes de X dans la base (e_i).

Le produit scalaire de l'espace vectoriel Euclidien E est alors défini par

(7) $$X.Y = x_i\, y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Cette opération est linéaire en Y et dépend de X (où inversement). Si nous posons :

(8) $$\mathcal{L}[X]\ (Y) = X.Y,$$

$\mathcal{L}[X]$ est une forme linéaire sur E donc :

(9) $$\mathcal{L}[X] \in E^* \text{ dual de } E$$

(10) E^* = ensemble des formes linéaires sur E (applications linéaires de E dans son corps R).

Proposition 1 : $\mathcal{L}$ est un isomorphisme de E sur E^*

Démonstration :

.$\mathcal{L}$ est linéaire; en effet $\forall$ X, Y, Z $\in$ E et $\forall$ a, b $\in$ R,

$$\mathcal{L}[aX + bY]\ (Z) = (aX + bY).Z = a(X.Z)+b(Y.Z) = a\mathcal{L}[X]\ (Z) + b\mathcal{L}[Y]\ (Z)$$

.$\mathcal{L}$ est injectif car, si $\mathcal{L}[X] = \mathcal{L}[Y]$ cela suppose

$$X.Z = Y.Z \quad \forall\ Z \in E \quad \text{soit } (X-Y).Z = 0 \quad \forall\ Z \in E$$

en particulier $(X-Y).(X-Y)=0$ soit $X=Y$ d'après (3)

.$\mathcal{L}$ est surjectif : à $f \in E^*$ associons $X = f(e_i)e_i \in E$; il suffit de vérifier que $f(Y) = \mathcal{L}[X]\ (Y) = X.Y \quad \forall\ Y \in E$

or $f(Y) = f(y_i e_i) = y_i f(e_i) = y_i x_i = Y.X = X.Y$ c.q.f.d.

Remarque 1 : La proposition 1 nous permet d'identifier E à son dual E^*. Tout élément X de E, c'est-à-dire tout vecteur, peut être considéré comme une application linéaire qui à tout vecteur $Y \in E$ associe un scalaire :

(11) $$S = X.Y = x_i y_i$$

Remarque 2 : Supposons un instant que la base ne soit pas orthonormée; alors

(12) $$e_i \cdot e_j = g_{ij} \neq \delta_{ij}$$

(g_{ij}) est seulement symétrique et définie positive car $e_i . e_j = e_j . e_i$ et si l'on a

(13) $$X = x^i e_i,$$ alors d'après (3), on doit avoir

$$X.X = x^i x^j g_{ij} \geq 0 \quad \forall X \in E \quad \text{et} \quad g_{ij} x^i x^j = 0 \Leftrightarrow X=0$$

Notons que :

(14) $$X.e_j = x^i g_{ij} = x_j \neq x^j$$

ainsi un vecteur $X \in E$ a, dans le cas d'une base (e_i) non orthonormée deux suites de composantes :

les composantes contravariantes x^i

les composantes covariantes x_i.

Si l'on pose

(15) $$X.Y = g_{ij} x^i y^j = x_j y^j = \mathcal{L}[X](Y),$$

$\mathcal{L}$ est encore un isomorphisme de E sur E^* à condition d'associer à $f \in E^*$ l'élément de E défini par

(16) $$x^j = g^{ij} f(e_i)$$ $\rightarrow X = (G^{-1})^t F \Rightarrow F = G^t X$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}) qui existe puisque (g_{ij}) est définie positive. On a bien alors $\forall Y \in E$

(17) $$f(Y) = f(y^i e_i) = y^i f(e_i) = y^i g_{ij} x^j = g_{ij} x^i y^j = \mathcal{L}[X](Y).$$

$F = G^t X$

La base $e^i = g^{ij} e_j$ est appelée base réciproque des (e_i) et

(18) $$X = x^i e_i = x_i e^i$$

on peut ainsi apprécier la simplification apportée par la considération de bases orthonormées : g_{ij}, g^{ij} sont alors des matrices unités, les bases e_i et e^i sont identiques ainsi que les composantes x^i et x_i d'un même vecteur X; par suite, la position des indices importe peu. Dans cette identification, on perd la possibilité de distinguer la nature algébrique de certaines grandeurs, mais dans la majorité des questions de mécanique cet inconvénient est mineur en comparaison de l'avantage apporté par la simplification d'écriture.

Remarque 3 : sur l'utilisation de la convention de l'indice muet.

. Un indice non muet est dit franc; par exemple dans

$x_i = a_{ij}\, y_j$, i est franc et j est muet, on a encore

$$x_i = a_{ij} y_j = a_{ik} y_k$$

. Il faut toujours prendre soin de désigner un indice muet par une lettre différente de celles utilisées pour les indices francs.

. Si dans la formule précédente on a $y_i = b_{ij} z_j$, on pourra écrire $x_i = a_{ij}\, b_{jk} z_k$, car évidemment, deux indices muets intervenant dans le même monôme doivent nécessairement être désignés par deux lettres différentes et différentes également des lettres utilisées pour les indices francs.

. Il faut que la dimension de l'espace sur lequel on travaille soit claire; par exemple :

dans R^2 : $\delta_{ii} = 2$ car $i = 1,2$

dans R^n : $\delta_{ii} = n$

Il arrivera enfin qu'il ne faille pas sommer sur les indices répétés [illegible], on soulignera le couple d'indices qui ne comptera que pour un indice. Par exemple si x_1, x_2, x_3 , forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales, X_1, X_2, X_3 étant les coordonnées dans un trièdre cartésien fixe on a :

(19) $$M(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} X_1 = X_1(x_1,x_2,x_3) \\ X_2 = X_2(x_1,x_2,x_3) \\ X_3 = X_3(x_1,x_2,x_3) \end{cases}$$

Le repère local se définit alors par

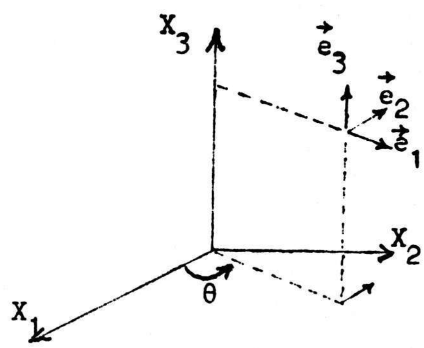
$$(20) \qquad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_{\underline{i}}} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_{\underline{i}}}\right| \quad \text{et nous poserons} \quad h_i = \left|\frac{\partial M}{\partial x_i}\right|$$

en coordonnées cylindriques par exemple on a

$x_1 = r,\qquad X_1 = r\cos\theta,\qquad h_1 = 1\ ;$

$x_2 = \theta,\qquad X_2 = r\sin\theta,\qquad h_2 = r\ ;$

$x_3 = X_3,\qquad X_3 = x_3,\qquad h_3 = 1\ ;$



L'élément de longueur est obtenu par

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_i}\, dx_i = \left|\frac{\partial M}{\partial x_{\underline{i}}}\right| dx_i\ \vec{e}_{\underline{i}} = h_{\underline{i}}\, dx_{\underline{i}}\ \vec{e}_i \quad \text{d'où}$$

$$(ds)^2 = |d\vec{M}|^2 = h_1^2\, dx_1^2 + h_2^2\, dx_2^2 + h_3^2\, dx_3^2$$

soit dans le cas cylindrique

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (dx_3)^2$$

3 - Changement de repère orthonormal dans R^3.

3.1. Construction de la matrice de passage. Il s'agit de calculer les composantes d'un vecteur $\vec{X}$ de R^3 par rapport à un repère orthonormé $(\vec{e}_i{}')$ lorsque l'on connaît les composantes de ce même vecteur dans un autre repère orthonormé $(\vec{e}_i)$, ces deux repères ayant même origine.

Nous avons :

$$\vec{e}_i{}' = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}_i{}')\vec{e}_1 + \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_i{}')\,\vec{e}_2 + \cos(\vec{e}_3, \vec{e}_i{}')\,\vec{e}_3 = \cos(\vec{e}_j, \vec{e}_i{}')\,\vec{e}_j$$

Si nous posons $\quad q_{ij} = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}_j{}')$ alors

$$(21) \qquad \boxed{\begin{aligned} \vec{e}_i{}' &= q_{ji}\,\vec{e}_j \\ \text{et}\quad \vec{e}_j &= q_{ji}\,\vec{e}_i{}' \end{aligned}}$$

Soit donc Q la matrice de composantes q_{ij}, c'est la matrice dont la $i^{ème}$ colonne est formée des composantes du $i^{ème}$ vecteur $\vec{e}'_i$ de la nouvelle base dans l'ancienne. Q est appelée matrice de passage (c'est une question de convention, on aurait pu choisir Q^t, transposée de Q, comme matrice de passage).

Soient x_i les composantes de $\vec{X}$ dans le repère $(\vec{e}_i)$

x'_i " " " " " $(\vec{e}'_i)$

$$X = x_j \vec{e}_j = x'_i \vec{e}'_i = x'_i q_{ji} \vec{e}_j = x_j q_{ji} \vec{e}'_i \qquad \text{d'où}$$

(22)
$$\boxed{\begin{aligned} x_j &= q_{ji}\, x'_i \\ x'_i &= q_{ji} x_j \end{aligned}}$$

3.2. Propriétés de la matrice de passage.

a) Q est inversible; $Q^{-1}=Q^t$; les vecteurs lignes sont orthonormés entre eux ainsi que les vecteurs colonnes.

En effet, les relations (22) traduisent $X = QX'$ et $X' = Q^t X$ si l'on désigne par X la matrice colonne (x_i) et X' la matrice colonne x'_i; d'où :
$X = QX' = QQ^t X$ et donc

(23)
$$QQ^t = I \quad \text{soit} \quad q_{il}\, q_{jl} = \delta_{ij}$$

q_{il} et q_{jl} étant respectivement les composantes du $i^{ème}$ et du $j^{ème}$ vecteur ligne de Q, $q_{il}\, q_{jl}$ est le produit scalaire de l'un par l'autre; il est nul si $i \neq j$ (d'où l'orthogonalité) et égal à 1 si $i=j$ (d'où la normalisation).

De même $X' = Q^t X = Q^t Q X'$ entraîne

(24)
$$Q^t Q = I \quad \text{soit} \quad q_{li}\, q_{lj} = \delta_{ij}$$

d'où l'orthonormalité des vecteurs colonnes de Q.

Enfin (23) et (24) impliquent bien :

(25) $$\boxed{Q^{-1} = Q^t}$$

b) det $Q = \pm 1$ (26)

En effet : det (QQ^t) = det(I) = 1

det $(Q.Q^t)$ = det Q det Q^t = $(\det Q)^2 = 1$ c.q.f.d.

car det Q = det Q^t

Remarque 4 : si les deux systèmes $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_i)$ sont pris dans le même sens, det Q=1, la matrice Q est dite orthonormale.

3.3 Transformation d'une matrice dans un changement de repère orthonormé.

Soient M l'image dans $(\vec{e}_i)$ d'un opérateur linéaire $\mathcal{M}$ et M' son image dans $(\vec{e}_i)$.

Soient $\vec{X}$ un vecteur d'images X dans $(\vec{e}_i)$ et X' dans $(\vec{e}'_i)$

$\vec{Y}$ le transformé de $\vec{X}$ par $\mathcal{M}$ d'image Y dans $(\vec{e}_i)$ et Y' dans $(\vec{e}'_i)$

alors $Y = MX$, $Y = QY'$, $X = QX'$

d'où $QY' = MQX'$, $Y' = Q^{-1} MQX'$

soit en tenant compte de (25) : $Y' = Q^t MQX'$ ce qui implique

(27) $$\boxed{M' = Q^t M Q}$$

$m'_{ij} = q_{\ell i} q_{mj} m_{\ell m}$

Ceci est valable encore dans R^n.

Remarque 5 :

Un scalaire peut être défini comme une grandeur caractérisée par un nombre qui ne dépend pas du système de coordonnées.

De la même manière, on peut définir un vecteur de R^n comme une grandeur caractérisée dans un repère cartésien donné par n nombres $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et qui dans un changement de base orthonormal de matrice $Q = (q_{ij})$, deviennent $(u'_1, \ldots, u'_n)$ tels que

(28) $$\boxed{u'_i = q_{ji} u_j}$$

II - TENSEURS.

1 - Définitions d'un tenseur du second ordre.

A partir des remarques 11 et 5, on peut envisager une généralisation de la notion de vecteur en introduisant le tenseur du second ordre dont on peut donner deux définitions équivalentes.

Définition 1. Un tenseur du second ordre $\bar{\bar{T}}$ est une grandeur définie dans une base de R^n par n^2 nombres t_{ij} qui, dans un changement de base orthonormal $Q = (q_{ij})$ deviennent :

(29) $$\boxed{t'_{ij} = q_{ei}q_{mj}t_{em}}$$

Définition 2 Un tenseur du second ordre $\bar{\bar{T}}$ est un opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{Y}$ de R^n associe un vecteur $\vec{V}$ de ce même espace

$$\vec{V} = \bar{\bar{T}}\,\vec{Y}$$

Remarque 6 : de par ces définitions, nous voyons qu'un "tenseur du second ordre" $\bar{\bar{T}}$ (def 1 ou 2) est déterminé de façon unique dans R^n si on connaît les n^2 nombres t_{ij} tels que

$$\bar{\bar{T}}\,\vec{e}_i = t_{ji}\,\vec{e}_j$$

On a alors : $\bar{\bar{T}}\,\vec{Y} = \bar{\bar{T}}\,y_i\,\vec{e}_i = t_{ji}y_i\,\vec{e}_j$, ainsi

(30) $$\boxed{v_j = t_{ji}\,y_i}$$

. Montrons que ces deux définitions sont bien équivalentes

1→2 sachant que $t'_{ij} = q_{li}q_{mj}t_{lm}$

et $y'_j = q_{pj}\,y_p$

montrons que $\vec{V} = \bar{\bar{T}}\,\vec{Y}$ est bien un vecteur de R^n au sens de la remarque 5 ;

"d'après (30)" $v_i = t_{ij}\,y_j$ et $v'_i = t'_{ij}\,y'_j$ dans les bases $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_i)$

donc $$v'_i = q_{li}\, q_{mj}\, t_{lm}\, q_{pj}\, y_p$$

$$= q_{li}\, \delta_{mp}\, t_{lm}\, y_p \qquad \text{d'après (23)}$$

$$= q_{li}\, t_{lp}\, y_p = q_{li}\, v_l \qquad \text{c.q.f.d;}$$

enfin, la linéarité de l'opération $v_i = t_{ij}\, y_j$ est évidente

$2 \longrightarrow 1$ Soit $\overset{=}{\Pi}$ un opérateur linéaire sur R^n

$\vec{V} = \overset{=}{\Pi}\, \vec{Y}$ entraîne $v_i = t_{ij}\, y_j$ dans $(\vec{e}_i)$ et $v'_i = t'_{ij}\, y'_j$ dans $(\vec{e}'_i)$;

on sait par ailleurs d'après (28) que $v_i = q_{il}\, v'_l$ et $y_j = q_{jm}\, y'_m$

donc $$q_{il}\, v'_l = t_{ij}\, q_{jm}\, y'_m$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par q_{ip} et sommons en i

$$q_{ip}\, q_{il}\, v'_l = q_{ip}\, t_{ij}\, q_{jm}\, y'_m$$

soit $$\delta_{pl}\, v'_l = v'_p = q_{ip}\, q_{jm}\, t_{ij}\, y'_m = t'_{pm}\, y'_m$$

d'où $$t'_{pm} = q_{ip}\, q_{jm}\, t_{ij}$$

Les n^2 nombres t_{ij} se transforment bien dans le changement de base Q comme les composantes d'un tenseur du second ordre. La relation (29) est appelée critère de tensorialité .

4) Distinction entre tenseur du second ordre et matrice carrée.

Un vecteur et un tenseur du second ordre sont en tant qu'opérateurs (cf. remarque 1 et définition 2) des grandeurs intrinsèques ayant une existence indépendante de tout repère.

Une matrice carrée est un tableau de n^2 nombres, image d'un opérateur linéaire sur R^n; nous savons bien que ce tableau dépend essentiellement du repère choisi.

Une matrice carrée nxn peut être considérée comme l'image dans un certain repère d'un tenseur du second ordre de R^n exactement comme une colonne de n composantes peut être considérée comme l'image dans un certain repère d'un vecteur de R^n.

Un tenseur du second ordre, être intrinsèque que nous noterons par une lettre majuscule avec double barre $\overline{\overline{\Pi}}$, est représenté orthonormés différents $(\vec{e}_i)$, $(\vec{e}_i{}')$, respectivement par deux matrices que nous noterons par une lettre majuscule simple T et T' et, si Ω est la matrice de passage, nous avons d'après (27).

$$T' = \Omega^t T \Omega$$

3 - Espace vectoriel des tenseurs du second ordre.

La donnée de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de E permet de définir un tenseur par l'application linéaire

(31) $\quad \vec{Y} \longrightarrow \vec{A}(\underset{\text{Produit scalaire}}{\underline{\vec{B},\vec{Y}}}) = \vec{V}$ de R^n dans R^n

soit $\quad V_i = a_i b_j y_j = t_{ij} y_j$ dans la base $(\vec{e}_i)$

Ce tenseur $\overline{\overline{\Pi}}$ est le produit tensoriel de A et B et on le note

(32) $\quad \overline{\overline{\Pi}} = \vec{A} \otimes \vec{B}$

Ce produit est évidemment linéaire par rapport à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$. Les produits tensoriels de deux vecteurs forment un sous-ensemble de l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre, espace à 9 dimensions sur R^3, (ou n^2 dimensions sur R^n), qui contient en particulier les 9 éléments (resp. n^2 éléments)

$$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

qui sont linéairement indépendants dans l'espace des tenseurs du second ordre ; (les composantes de $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ sont toutes nulles à part la composante ij qui est égale à 1). L'espace des combinaisons linéaires de produits tensoriels de 2 vecteurs est donc identique à l'espace des tenseurs du second ordre dont les $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ forment donc une base. Un tenseur du second ordre quelconque peut donc s'écrire :

(33) $\quad \overline{\overline{\Pi}} = t_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

4) Forme bilinéaire associée à un tenseur du second ordre.

à tout tenseur du second ordre, on peut associer la forme bilinéaire

$$\tau(\vec{X},\vec{Y}) = \vec{X}\, \overline{\overline{\Pi}}\, \vec{Y} = x_i t_{ij} y_j = t_{ij} x_i y_j$$

et

$$t_{ij} = \tau(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$$

Réciproquement, à toute forme bilinéaire on peut associer un tenseur du second ordre en posant

(34) $\tau(\vec{e}_i,\vec{e}_j)= t_{ij}$; montrons en effet le caractère de tensorialité du tableau défini de cette manière; on aura

$$t'_{ij} = \tau(\vec{e}'_i,\vec{e}'_j) = \tau(q_{li}\,\vec{e}_l,\, q_{mj}\,\vec{e}_m) = q_{li}\, q_{mj}\, \tau(\vec{e}_l,\vec{e}_m)= q_{li}q_{mj}t_{lm}$$

. Si l'on pose $\tau(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = t^t_{ji}$ alors $\tau(\vec{X},\vec{Y})= x_i\, y_j\, t^t_{ij} = \cancel{X}.\overset{=t}{\Pi}\, \cancel{X},Y$;
on vérifie aisément que ce nouvel être mathématique $\overset{=t}{\Pi}$ est un tenseur; on l'appelle transposé de $\overset{=}{\Pi}$.

Un tenseur $\overset{=}{\Pi}$ sur R est dit symétrique ou autoadjoint si $\overset{=}{\Pi} = \overset{=t}{\Pi}$, c'est-à-dire si $t_{ij}= t^t_{ij}= t_{ji}$. La forme bilinéaire associée est alors symétrique.

5 Tenseurs d'ordre supérieur.

Nous avons défini un tenseur du second ordre comme une généralisation de la notion de vecteur. Un vecteur peut donc être considéré d'après les remarques 1 et 5 comme un tenseur d'ordre 1 et un scalaire comme un tenseur d'ordre 0.

Nous pouvons encore généraliser les notions précédentes et nous obtenons les deux définitions équivalentes suivantes.

Définition 3. Un tenseur d'ordre m sur R^n est un ensemble de n^m nombres $t_{i_1 i_2 \dots i_m}$ (i_k pouvant prendre les n premières valeurs entières) qui, dans un changement de repère Q deviendront

$$t'_{j_1 j_2 \dots j_m} = q_{i_1 j_1} q_{i_2 j_2} \dots q_{i_m j_m}\, t_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

Définition 4. Un tenseur d'ordre m sur R^n est une application linéaire qui à tout vecteur de R^n fait correspondre un tenseur d'ordre m-1 sur R^n.

. Comme précédemment, on peut montrer l'équivalence de ces deux définitions et constater que m vecteurs $\vec{A}_1,\vec{A}_2\, \dots,\, \vec{A}_m$ définissent un tenseur d'ordre m par l'application

(35) $$\vec{Y} \longrightarrow \vec{A}_1 \otimes \vec{A}_2 \dots \otimes \vec{A}_{m-1}\, (\vec{A}_m . \vec{Y})$$

On notera

ce n'est pas le produit tensoriel de 2 vecteurs

c'est un tout

$$\overset{=m}{\Pi} = \vec{A}_1 \otimes \vec{A}_2 \cdots \otimes \vec{A}_m \quad \text{ce tenseur}$$

Il est clair que $\left(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \cdots \otimes \vec{e}_{i_m}\right)$ $(i_k \in \{1,2,\dots n\})$, est une base pour l'espace vectoriel de dimension n^m des tenseurs d'ordre m sur R^n : tout élément de cet espace peut donc s'écrire :

(36)
$$\overset{=m}{\Pi} = t_{i_1 i_2 \dots i_m} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \cdots \otimes \vec{e}_{i_m}$$

A chaque tenseur d'ordre m on peut associer la forme m-linéaire

$$\mathcal{T}\underbrace{(\vec{X},\vec{Y}, \dots \vec{Z})}_{m} = t_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} y_{i_2} \cdots z_{i_m},$$

Réciproquement à chaque forme m-linéaire on peut associer un tenseur d'ordre m en posant

(37)
$$t_{i_1 i_2 \dots i_m} = \mathcal{T}(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots \vec{e}_{i_m})$$

6) opérations sur les tenseurs.

En plus des opérations classiques sur les espaces vectoriels de tenseurs de même ordre, addition et multiplication par un élément du corps R, nous allons définir des opérations sur l'ensemble de tous les tenseurs.

6.1. Produit tensoriel.

Soient $\overset{=m}{\Pi} = t_{i_1 i_2 \dots i_m} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \cdots \otimes \vec{e}_{i_m}$ un tenseur d'ordre m

et $\overset{=q}{S} = s_{j_1 j_2 \dots j_q} \vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \cdots \otimes \vec{e}_{j_q}$ un tenseur d'ordre q

Nous poserons par définition :

(38)
$$\overset{=m}{\Pi} \otimes \overset{=q}{S} = t_{i_1 i_2 \dots i_m} s_{j_1 j_2 \dots j_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_m} \otimes \vec{e}_{j_1} \cdots \otimes \vec{e}_{j_q}$$

Il faut faire la vérification de la cohérence des notations car on reprend un sigle déjà défini dans certains cas :

- il est associatif
- $\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_m} = ((\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2}) \otimes \dots) = \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_m}$

+ il est clair que le résultat de l'opération est un tenseur d'ordre m+q

$$\overset{=m+q}{\mathbb{P}} = t_{i_1 i_2 \dots i_m} s_{i_{m+1} \dots i_{m+q}} \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_{m+q}}$$

de composantes $p_{i_1 \dots i_{m+q}} = t_{i_1 \dots i_m} S_{i_{m+1} \dots i_{m+q}}$ dans la base $(\vec{e}_i)$

les i_j décrivant l'ensemble des n premiers entiers puisque nous sommes dans R^n.

+ Le produit tens est indep de la base.

6.2. Contraction.

. La simple contraction sur deux indices d'un tenseur est l'opération qui consiste à prendre toujours ces deux indices égaux et à faire la somme de toutes les possibilités obtenues ainsi

exemple : la contraction sur les 2ème et 3ème indices des composantes t_{ijklm} de $\overset{=5}{\Pi}$ donne :

$$s_{ilm} = t_{ijjlm} = t_{i11lm} + t_{i22lm} + \dots t_{innlm}$$

Le tenseur $ obtenu est d'ordre 5-2=3.

. Une simple contraction sur un tenseur diminue son ordre de 2. On peut envisager plusieurs contractions en précisant à chaque fois sur quels indices elle a lieu, ces indices n'étant pas nécessairement voisins. Par exemple, la double contraction de $\overset{=5}{\Pi}$ sur les indices 2-3 et 1.5 conduit à un vecteur de composantes

$$u_l = t_{ijjli} = s_{ili}$$

Exercice 1 : On vérifiera que l'opération contraction ne dépend pas du repère : c'est-à-dire que si t_{ijklm} et t'_{ijklm} sont les composantes du même tenseur $\overset{=5}{\Pi}$ dans les repères $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_i)$ alors, t_{ijjlm} et t'_{ijjlm} sont bien les composantes s_{ilm} et s'_{ilm} du même tenseur $\overset{=3}{\$}$.

6.3. Produits contracté .

Le produit contracté est la combinaison des deux opérations précédentes : produit tensoriel et contraction.

Soient par exemples c_{ijkl} et d_{ijk} les composantes respectives dans le même repère de $\bar{\bar{C}}^4$ et $\bar{\bar{D}}^3$. Le produit une fois contracté 3.6 de $\bar{\bar{C}}^4$ par $\bar{\bar{D}}^3$ est obtenu comme suit :

- Produit tensoriel : $\bar{\bar{T}}^7 = \bar{\bar{C}}^4 \otimes \bar{\bar{D}}^3$

soit

$$t_{ijklmnp} = c_{ijkl}\, d_{mnp}$$

- Contraction 3.6 : $s_{ijlmp} = t_{ijklmkp} = c_{ijkl}\, d_{mkp}$

soit

$$\bar{\bar{S}}^5 = \text{produit une fois contracté 3.6 de } \bar{\bar{C}}^4 \text{ et } \bar{\bar{D}}^3.$$

Le produit 3 fois contracté 1.4, 2.7, 3.6 aurait conduit au vecteur de composantes :

$$u_m = t_{ijkimkj} = c_{ijki}\, d_{mkj}$$

Il découle de ce qui précède que le produit k fois contracté d'un tenseur d'ordre p par un tenseur d'ordre q est un tenseur d'ordre p+q-2k.

On peut enfin effectuer toutes ces opérations sur plus de deux tenseurs :

Exemple

Avec $\bar{\bar{A}}^2, \vec{X}, \vec{Y}, \bar{\bar{B}}^3$ on peut obtenir

- $\bar{\bar{T}}^7 = \bar{\bar{A}}^2 \otimes \vec{X} \otimes \vec{Y} \otimes \bar{\bar{B}}^3$ de composantes $t_{ijklmnp} = a_{ij} x_k y_l b_{mnp}$ (produit tensoriel)
- $\bar{\bar{S}}^5$ de composantes $s_{ijkln} = t_{ijklmnm} = a_{ij} x_k y_l b_{mnm}$ (produit contracté 5.7),
- $\bar{\bar{P}}^3$ de composantes $p_{jkl} = t_{ijklmim} = a_{ij} x_k y_l b_{mim}$ (produit contracté 5.7 et 1.6),

et bien d'autres tenseurs encore.

Remarque 6 : Le produit classique de deux matrices correspond en fait au produit tensoriel une fois contracté sur les indices intermédiaires des deux tenseurs qu'elles représentent dans le repère donné : $c_{ij} = a_{il} b_{lj}$.

L'opération classique d'un tenseur sur un vecteur est le produit une fois contracté, toujours sur les indices intermédiaires, du tenseur sur le vecteur:

$\vec{V} = \overset{(2)}{T}\, \vec{Y}$ $\qquad$ $\overset{(2)}{T} = \overset{(3)}{S}\, \vec{Y}$ $\qquad$ $\overset{(3)}{S}\vec{Y} = \overset{(3)}{S}(y_k \vec{e_k}) = y_k \overset{(3)}{S}(\vec{e_k}) = y_k[\underline{S_{ijk}}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}] = y_k s_{ijk}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$

$$v_i = t_{ij} y_j \quad \text{ou} \quad t_{ij} = S_{ijk} y_k$$

Enfin, le produit scalaire de deux vecteurs est le produit contracté de ces deux vecteurs

$$S = x_i v_i$$

III - EXEMPLES DE TENSEURS UTILES DANS LES CALCULS.

1 - Tenseurs unité ou tenseurs de Kronecker.

On appelle tenseur unité d'ordre 2, l'opérateur identité qui **fait correspondre** à tout vecteur Y de R^n le même vecteur Y ; ainsi on doit avoir $y_i = t_{ij} y_j$ ce qui entraîne $t_{ij} = \delta_{ij}$

Le tenseur unité est donc défini par

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{1}}} = \delta_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i} \tag{39}$$

Le tenseur unité a les mêmes composantes dans tous les repères.

2 - Tenseur d'orientation où tenseur alterné fondamental.

2.1. Introduction et définition.

Soit $\vec{V}$ un vecteur de R^3.

Soit Π_V l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{X}$ de R^3 **associe le vecteur** $\vec{X} \wedge \vec{V}$; Π_V est un tenseur du second ordre d'après la définition 2

$$\bar{\bar{\Pi}}_V \vec{X} = \vec{X} \wedge \vec{V} \; ; \qquad (\vec{X} \wedge \vec{V})_i = t_{ij} x_j \tag{40}$$

Soit maintenant $\mathcal{E}$ l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{V}$ de R^3 **associe** le tenseur $\bar{\bar{\Pi}}_V$. $\mathcal{E}$ est par la définition 2 un tenseur du troisième ordre :

$$\bar{\bar{\Pi}}_V = \bar{\bar{\mathcal{E}}} \overset{3}{} \vec{V} ; \qquad t_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, v_k \tag{41}$$

Calculons les composantes du tenseur $\bar{\bar{\Pi}}_V$ dans un repère $(\vec{e}_i)$ donné:

$$\vec{X} \wedge \vec{V} = \begin{cases} \qquad\quad v_3 x_2 - v_2 x_3 \\ -v_3 x_1 + \qquad\quad v_1 x_3 \\ v_2 x_1 - v_1 x_2 \end{cases}$$

$(\vec{e}_i)$ orthonormé direct

d'où

$$T_V = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice image de } \overline{\overline{\Pi}}_V \text{ dans } (\vec{e}_i)$$

(41) nous permet d'écrire un système linéaire de 9 identités pour déterminer les ε_{ijk}; $\forall \vec{V}$ de R^3,

$$\varepsilon_{111}\, v_1 + \varepsilon_{112}\, v_2 + \varepsilon_{113}\, v_3 = 0 \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = 0$$

$$\varepsilon_{121}\, v_1 + \varepsilon_{122}\, v_2 + \varepsilon_{123}\, v_3 = v_3 \quad " \quad \varepsilon_{121} = \varepsilon_{122} = 0;\ \varepsilon_{123} = 1$$

$$\varepsilon_{131}\, v_1 + \varepsilon_{132}\, v_2 + \varepsilon_{133}\, v_3 = -v_2 \quad " \quad \varepsilon_{131} = \varepsilon_{133} = 0;\ \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{211}\, v_1 + \varepsilon_{212}\, v_2 + \varepsilon_{213}\, v_3 = -v_3 \quad " \quad \varepsilon_{211} = \varepsilon_{212} = 0;\ \varepsilon_{213} = -1$$

$$\varepsilon_{221}\, v_1 + \varepsilon_{222}\, v_2 + \varepsilon_{223}\, v_3 = 0 \quad " \quad \varepsilon_{221} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{223} = 0$$

$$\varepsilon_{231}\, v_1 + \varepsilon_{232}\, v_2 + \varepsilon_{233}\, v_3 = v_1 \quad " \quad \varepsilon_{232} = \varepsilon_{233} = 0;\ \varepsilon_{231} = 1$$

$$\varepsilon_{311}\, v_1 + \varepsilon_{312}\, v_2 + \varepsilon_{313}\, v_3 = v_2 \quad " \quad \varepsilon_{311} = \varepsilon_{313} = 0 \quad \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321}\, v_1 + \varepsilon_{322}\, v_2 + \varepsilon_{323}\, v_3 = -v_1 \quad " \quad \varepsilon_{322} = \varepsilon_{323} = 0;\ \varepsilon_{321} = -1$$

$$\varepsilon_{331}\, v_1 + \varepsilon_{332}\, v_2 + \varepsilon_{333}\, v_3 = 0 \quad " \quad \varepsilon_{331} = \varepsilon_{332} = \varepsilon_{333} = 0$$

On peut donc définir les composantes du tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}^3$ de la manière suivante

(42) $$\boxed{\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ si } i,j,k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3 \\ -1 \text{ si } i,j,k \text{ est une permutation impaire de } 1,2,3 \\ 0 \text{ si un même indice est répété} \end{cases}}$$

2.2 Relations importantes.

En groupant (40) et (41) on obtient

(43) $$\boxed{\vec{X} \wedge \vec{V} = \varepsilon_{ijk}\, x_j v_k}$$

d'où le <u>produit mixte</u>

(46) $$\boxed{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \vec{X}.\ (\vec{Y}\wedge\vec{Z}) = \varepsilon_{ijk}\ x_i y_j z_k}$$

Si l'on se souvient que le déterminant d'une matrice A (3,3) de composantes a_{ij} est égal au produit mixte de ses trois vecteurs colonnes (ou vecteurs lignes) pris à une permutation près dans l'ordre 1,2,3 on aura :

Le p$^{\text{ème}}$ vecteur colonne étant $\vec{u}^{(p)} = a_{ip}\ \vec{e}_i$

(47) $$\boxed{\varepsilon_{lmn}\ \det A = \varepsilon_{ijk}\ a_{il}\ a_{jm}\ a_{kn}}$$

Soit $\vec{\nabla}$ le vecteur symbolique "nabla" de composantes $\frac{\partial}{\partial x_i}$, nous savons alors que :

$$\overrightarrow{\text{rot}\ V}_i = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \varepsilon_{ijk}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ v_k,$$

en convenant d'écrire $\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = v_{k,i}$ on a finalement :

(48) $$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}\ V} = \varepsilon_{ijk}\ v_{k,j}\ \vec{e}_i}$$ V est un champ de vecteurs

Vérifions maintenant que

(49) $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{lmn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}}$$

en effet, si 2 indices sont égaux sur le même ε (exemple i=j sans sommation) alors le tableau a 2 lignes où 2 colonnes égales, le déterminent est donc nul. Permuter 2 indices sur le même ε revient à échanger deux lignes ou deux colonnes du tableau et donc à changer le signe du déterminant. Il suffit donc de vérifier la formule pour une seule position d'indice soit :

$$\varepsilon_{123}\ \varepsilon_{123} = \det(\mathbb{1}) = 1 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

déterminant du tenseur?

De (49), nous déduisons aisément

(50) $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}}$$

en effet :

$$\varepsilon_{ijk}\quad\varepsilon_{imn} = \text{det}\ {}''\begin{pmatrix}\delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{pmatrix}''$$, en développant par exemple

par la règle de Sarrus, compte tenu du fait que $\delta_{ii} = 3$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn} &= 3\,(\delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}) - \delta_{ji}(\delta_{im}\,\delta_{kn} - \delta_{in}\,\delta_{km}) + \delta_{ki}(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\\ &= 3\,(\delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}) - \delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{jn}\,\delta_{km} + \delta_{km}\,\delta_{jn} - \delta_{kn}\,\delta_{jm}\\ &= \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}\end{aligned}$$

c.q.f.d.

A partir de (50) nous obtenons

(51) $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn} = 2\,\delta_{kn}}\quad,$$

en effet : $\varepsilon_{ijk}\quad\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{jk} = 3\,\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\,\delta_{kn}$

Enfin (51) implique puisque $\delta_{kk} = 3$

(52) $$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6}$$

De là, en multipliant (47) par ε_{lmn} et en sommant en l, m, n suivant la convention, on obtient grâce à (52): 6 det A = $\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\,a_{il}a_{jm}a_{kn}$

(53) $$\boxed{\text{det } A = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,a_{il}\,a_{jm}\,a_{kn}}$$

Il sera pratique aussi d'avoir une écriture maniable de l'inverse d'une matrice. Posons donc $B=A^{-1}$ en supposant évidemment det $A\neq 0$

$$b_{ij}\,a_{jk} = \delta_{ik},$$

ce qui peut s'écrire d'après (51) :

$$2b_{ij}\, a_{jk} = \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{kpq} \frac{\det A}{\det A}$$

(l'idée du calcul consiste à isoler b_{ij} à gauche et donc à faire apparaître a_{ij} à droite pour qu'une mise en facteur soit possible),

or, $\varepsilon_{kpq} \det A = \varepsilon_{jlm}\, a_{jk}\, a_{lp}\, a_{mq}$

donc $\quad 2b_{ij}\, a_{jk} \det A = \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jlm}\, a_{jk}\, a_{lp}\, a_{mq}$,

(il n'est pas question de simplifier par a_{jk} à cause de la sommation en j)

ainsi $(2b_{ij} \det A - \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jlm}\, a_{lp}\, a_{mq})a_{jk}=0 \qquad \forall_i$ et $\forall_k$

Pour i fixé, cette relation est de la forme,

$a_{jk}v_j=0$ soit $\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{V}=0$ en posant,

$$v_j = 2b_{ij} \det A - \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jlm}\, a_{lp} a_{mq}$$

Comme $\quad \det A \neq 0$, cela implique : $v_j=0$ soit
et $A^t\vec{v}=0$

$2b_{ij} \det A = \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jlm}\, a_{lp}\, a_{mq}$ et donc

(54) $$\boxed{(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{2\det A}\, \varepsilon_{jlm}\varepsilon_{ipq}\, a_{\ell p} a_{mq}}$$

<u>Remarque 7</u> : Il est intéressant de savoir comment se comporte le tenseur

$\overset{=3}{\mathcal{E}} = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$ dans un changement de base orthonormée Q.

Dans la base $(\vec{e}_i^{\,\prime})$, ses composantes sont

d'après (47) $\quad \varepsilon'_{lmn} = q_{il} q_{jm} q_{kn}\, \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{lmn} \det Q$;

la matrice Q étant orthogonale on a : $\det Q = \pm 1$. $\qquad$ cf(26)

On obtient donc $\varepsilon'_{lmn} = \varepsilon_{lmn}$ si det$O$=1, c'est-à-dire si la base $(\vec{e}'_i)$ à même orientation que la base $(\vec{e}_i)$; mais $\varepsilon'_{lmn} = -\varepsilon_{lmn}$ si $(\vec{e}'_i)$ à une orientation différente. Ainsi ε_{ijk} représente des composantes d'un tenseur dans toutes les bases orthonormées ayant même orientation. On dira que $\overset{=}{\mathcal{E}}^3$ n'est qu'un pseudo-tenseur. Cela vient du fait que $\vec{X} \wedge \vec{V}$ n'est qu'un pseudo-vecteur obtenu à partir de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par une opération non tensorielle.

2.3. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur soit symétrique.

D'après le paragraphe 4, un tenseur $\overset{=}{T}$ est dit symétrique si ses composantes $t_{ij}=t_{ji}$. Nous allons montrer que :

Ds 1 base ⇒ ds toutes les bases (c'est l'exercice 4)

(55) $$\boxed{\overset{=}{T} \text{ symétrique} \iff \varepsilon_{ijk}t_{ij}=0}$$

En effet :

- Supposons $t_{ij}=t_{ji}$ alors,

$$\varepsilon_{ijk}\, t_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, t_{ji},$$

mais les indices i et j sont muets, on peut donc échanger leur nom :

$$\varepsilon_{ijk}\, t_{ij} = \varepsilon_{jik} t_{ji} = -\, \varepsilon_{ijk} t_{ji} = -\, \varepsilon_{ijk} t_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} t_{ij} = 0$$

- Supposons $\varepsilon_{ijk}t_{ij}=0$, alors,

$$\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}t_{ij}=0=(\delta_{li}\delta_{mj}-\delta_{lj}\delta_{mi})t_{ij}=t_{lm}-t_{ml} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

2.4. Ecriture rapide de quelques identités.

Exercice 2 : En notant que $\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \phi_{,i}\, \vec{e}_i$, div $\vec{A} = a_{i,i}$ et $\Delta\phi = \phi_{,ii}$; retrouver en utilisant les notations et propriétés ci-dessus les identités classiques

div $(\vec{A}\phi)$

rot $(\vec{A}\phi)$

div $(\vec{A}\wedge\vec{B})$

div $(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A})$

$\overrightarrow{\text{rot}}$ $(\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi)$

div $(\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi)$

$\overrightarrow{\text{rot}}$ $(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A})$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} \wedge \vec{A}$

IV - DIRECTIONS PRINCIPALES ET VALEURS PROPRES D'UN TENSEUR D'ORDRE 2. INVARIANTS ELEMENTAIRES.

1 - Cas général.

On cherche $\vec{V} \neq 0$ et λ scalaire associé tels que

(56) $$\overline{\overline{T}}\vec{V} = \lambda\vec{V}$$

Si λ et $\vec{V}$ conviennent, λ et $k\vec{V}$ conviennent encore (k, scalaire arbitraire), $k\vec{V}$ est appelé vecteur propre ou direction principale de $\overline{\overline{T}}$
λ est la valeur propre correspondante.

La relation (56) s'écrit encore

$$(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}})\,\vec{V} = 0,$$

c'est un système linéaire : $\det(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}}) = \det(T-\lambda 1)$ où T est la matrice image de $\overline{\overline{T}}$ dans un repère orthonormé quelconque, car toutes les matrices images d'un même tenseur ont même déterminant : $\det T' = \det(Q^t T Q) = (\det Q)^2 \det T = \det T$.

Si $\det(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}}) \neq 0$, $\vec{V}=0$ est la seule solution de (56); il n'y a donc ni direction principale, ni valeur propre.

Les solutions acceptables de (56) sont donc caractérisées par :

$$\det(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}}) = 0$$

Nous savons que le premier membre de cette relation est un polynôme du troisième degré en λ appelé polynôme caractéristique. Posons :

(58) $$\boxed{\det(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}}) = -\lambda^3 + T_1\lambda^2 - T_2\lambda + T_3}$$

Définition 5. Les coefficients T_1, T_2 et T_3 du polynôme caractéristique de $\overline{\overline{T}}$ (indépendant du repère choisi) sont appelés invariants élémentaires de $\overline{\overline{T}}$.

. Calculons ces invariants; d'après (53) nous avons dans un repère $(\vec{e}_i)$

$$\det(\overline{\overline{T}} - \lambda\overline{\overline{1}}) = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,(t_{il} - \lambda\delta_{il})(t_{jm} - \lambda\delta_{jm})(t_{kn} - \lambda\delta_{kn})$$

d'où par identification :

$$T_3 = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,t_{il}\,t_{jm}\,t_{kn} \quad \text{soit}$$

(58) $$\boxed{T_3 = \det \overline{\overline{T}}}$$

$$T_2 = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,(\delta_{il}t_{jm}t_{kn} + t_{il}\,\delta_{jm}\,t_{kn} + t_{il}t_{jm}\,\delta_{kn}),$$

tous les indices étant muets, nous voyons que T_2 est la somme de trois termes analo gues tels que :

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\delta_{il}t_{jm}t_{kn} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn}t_{jm}t_{kn} \text{ soit d'après (50)}$$

$$= \frac{1}{6}\,(\delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km})\;t_{jm}t_{kn} \qquad \text{d'où en multipliant par 3}$$

(59) $$\boxed{T_2 = \frac{1}{2}\,(t_{jj}t_{kk} - t_{jk}t_{kj})}$$; de même enfin :

$$T_1 = \frac{3}{6}\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\,t_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}\,t_{il} \text{ soit d'après (51)}$$

$$= \delta_{il}t_{il} \qquad \text{et donc}$$

(60) $$\boxed{T_1 = t_{ii} = \text{trace de } \overline{\overline{T}}}$$

Remarque 9 : Nous ne pouvons, dans le cas général affirmer que le polynôme caractéristique aura des racines réelles mais, les tenseurs rencontrés en mécanique étant souvent symétriques, nous nous contenterons de l'étude des solutions dans ce cas.

2 - Cas des tenseurs symétriques (ou autoadjoints).

Proposition 2 : Un tenseur symétrique sur R^n possède n valeurs propres réelles; à deux valeurs propres distinctes correspondent deux directions principales orthogonales.

Démonstration :

a) Soit λ une valeur propre et $\vec{V}$ un vecteur propre associé. Si λ est racine du polynôme caractéristique, il en est de même de $\bar{\lambda}$ de même $\vec{V} = v_i\vec{e}_i$ vecteur propre associé à λ implique $\vec{V}^* = \bar{v}_i\vec{e}_i$ est vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$ car

t_{ij} est réel

$$t_{ij}v_j = \lambda v_i \qquad \text{implique} \qquad t_{ij}\bar{v}_j = \bar{\lambda}\,\bar{v}_i \quad \text{d'où}$$

(61) $$t_{ij}v_j\bar{v}_i = \lambda v_i\bar{v}_i \qquad \text{et}$$

(62) $$t_{ij}\bar{v}_jv_i = \bar{\lambda}\bar{v}_iv_i$$

Les premiers membres de (61) et (62) étant égaux, grâce à la symétrie de $\overline{\overline{T}}$, nous avons $(\lambda - \bar{\lambda})\ |\vec{V}|^2 = 0$ soit puisque $\vec{V} \neq 0$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda \text{ réel}$$

b) Soient $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deux valeurs propres de $\overline{\overline{T}}$ et $\vec{V}^{(1)}$ et $\vec{V}^{(2)}$ deux vecteurs propres qui leur soient respectivement associées, nous avons :

(63) $$t_{ij}\ v_j^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)}$$

(64) $$t_{ij}\ v_j^{(2)} = \lambda_2 v_i^{(2)}$$

de là nous tirons :

$$t_{ij} v_j^{(1)} v_i^{(2)} = \lambda_1 v_i^{(1)} v_i^{(2)} \quad \text{et} \quad t_{ij} v_j^{(2)} v_i^{(1)} = \lambda_2 v_i^{(2)} v_i^{(1)}$$

Soit, grâce à la symétrie de $\overline{\overline{T}}$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\ \vec{V}^{(1)} . \vec{V}^{(2)} = 0 \quad \text{mais} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \vec{V}^{(1)} . \vec{V}^{(2)} = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Définition 6 : On appelle multiplicité d'une valeur propre, le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants qui lui sont associés (où encore la dimension de son espace propre)

Remarque 10 : La multiplicité d'une valeur propre ne doit pas en général être confondue avec son ordre en tant que racine du polynôme caractéristique.

Proposition 3 : Dans le cas d'un tenseur symétrique, la multiplicité de chaque valeur propre est égale à l'ordre de la racine correspondante du polynôme caractéristique. (Nous ne démontrerons pas ici cette proposition).

Corollaire 2.3 : à un tenseur symétrique correspond toujours au moins un repère principal orthogonal dans lequel il s'exprime par une matrice diagonale. Les valeurs propres constituent alors les éléments de la diagonale et les vecteurs de base sont directions principales. On note alors v_1, v_2, v_3 les éléments de la diagonale

Démonstration : Le polynôme caractéristique dans R^n ayant n racines réelles, la somme des multiplicités est exactement n- ce qui signifie que dans chaque espace propre on pourra choisir une base orthogonale de dimension égale à la multiplicité de la racine correspondante. Les espaces propres étant orthogonaux entr'eux, on pourra ainsi trouver n vecteurs propres orthogonaux formant la base cherchée : par exemple dans R^3

si $\tau_1 \neq \tau_2 \neq \tau_3$: Il y a trois directions principales orthogonales correspondant chacune à une valeur propre distincte. Ces trois directions principales déterminent un nouveau repère orthonormé dans lequel le tenseur est exprimé par une matrice diagonale.

si $\tau_1 = \tau_2 = \tau \neq \tau_3$. à τ, racine double, correspond un espace propre de dimension 2, c'est-à-dire un plan qui est orthogonal à la direction principale relative à τ_3. Le tenseur est dit cylindrique.

si $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau$: à τ racine triple correspond un espace propre de dimension 3, c'est-à-dire R^3 tout entier. On dit alors que le tenseur est sphérique. Toute direction de R^3 est direction principale.

. Les invariants élémentaires d'un tenseur symétrique s'expriment de façon très simple.

(63)
$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ T_2 &= \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 \\ T_3 &= \tau_1\,\tau_2\tau_3 \end{aligned}}$$

Théorème 1 (de Hamilton Cayley). Si $\overset{=}{\mathbb{T}}$ est symétrique, on peut exprimer toutes les puissances positives de $\overset{=}{\mathbb{T}}$ comme combinaison linéaire de $\overset{=}{\mathbb{T}}^2$, $\overset{=}{\mathbb{T}}$ et $\mathbb{1}$. Les coefficients de ces combinaisons linéaires étant des fonctions polynomiales des 3 invariants élémentaires T_1, T_2, T_3)

(64)
$$\boxed{\overset{=}{\mathbb{T}}^n = f_n(T_1, T_2, T_3)\,\overset{=}{\mathbb{T}}^2 + g_n(T_1, T_2, T_3)\,\overset{=}{\mathbb{T}} + h_n(T_1, T_2, T_3)\,\overset{=}{\mathbb{1}}}$$

Démonstration : Soit T la matrice image de $\overset{=}{\mathbb{T}}$ dans le repère principal $\overset{=}{\mathbb{T}}^p$ a pour image T^p dans ce repère (et en général dans tout repère) T étant diagonale, T^p l'est et a pour termes τ_1^p, τ_2^p, τ_3^p . Donc tout repère principal de $\overset{=}{\mathbb{T}}$ est repère principal de $\overset{=}{\mathbb{T}}^p$ et les valeurs propres de $\overset{=}{\mathbb{T}}^p$ sont les $p^{\text{èmes}}$ puissances des valeurs propres de $\overset{=}{\mathbb{T}}$

Chaque valeur propre de $\overset{=}{\mathbb{T}}$ vérifiant l'équation caractéristique, nous pouvons rassembler dans le repère principal les trois équations scalaires en une relation matricielle

$$T^3 = T_1 T^2 - T_2 T + T_3 1$$

Exercice 3 : Montrer que cette relation est valable dans tout repère

On peut donc écrire de façon intrinsèque :

(65) $$\boxed{\overset{=3}{\mathbb{T}} = T_1 \overset{=2}{\mathbb{T}} - T_2 \overset{=}{\mathbb{T}} + T_3 \overset{=}{\mathbb{1}}}$$

en multipliant les deux membres de cette relation par $\overset{=}{\mathbb{T}}$ nous obtenons

$$\overset{=4}{\mathbb{T}} = T_1 \overset{=3}{\mathbb{T}} - T_2 \overset{=2}{\mathbb{T}} + T_3 \overset{=}{\mathbb{T}}$$ soit, en tenant compte de (65)

$$\overset{=4}{\mathbb{T}} = (T_1^2 - T_2)\overset{=2}{\mathbb{T}} - (T_1 T_2 - T_3)\overset{=}{\mathbb{T}} + T_1 T_3 \overset{=}{\mathbb{1}}$$

En procédant ainsi de proche en proche on obtient le résultat (64).

V - POSSIBILITES DE DECOMPOSITIONS D'UN TENSEUR DU SECOND ORDRE.

1 - Décomposition canonique d'un tenseur en parties symétrique et antisymétrique

$\overset{=}{\mathbb{T}}$ est dit symétrique ou autoadjoint si $\quad \overset{=}{\mathbb{T}} = \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t$

$\overset{=}{\mathbb{T}}$ est dit antisymétrique si $\quad \overset{=}{\mathbb{T}} = -\overset{=}{\mathbb{T}}{}^t$

Proposition 4 : Un tenseur $\overset{=}{\mathbb{T}}$ quelconque peut toujours et de façon unique, être considéré comme la somme d'un tenseur symétrique $\overset{=}{\mathbb{T}}_s$ et d'un tenseur antisymétrique $\overset{=}{\mathbb{T}}_a$.

En effet, supposons l'existence de cette décomposition

$$\overset{=}{\mathbb{T}} = \overset{=}{\mathbb{T}}_s + \overset{=}{\mathbb{T}}_a$$

$$\overset{=}{\mathbb{T}}{}^t = \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t_s + \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t_a = \overset{=}{\mathbb{T}}_s - \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t_a$$

alors

(66) $$\boxed{\overset{=}{\mathbb{T}}_s = \frac{\overset{=}{\mathbb{T}} + \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t}{2}}$$ soit $\quad t_{(ij)} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji})$

(67) $$\boxed{\overset{=}{\mathbb{T}}_a = \frac{\overset{=}{\mathbb{T}} - \overset{=}{\mathbb{T}}{}^t}{2}}$$ soit $\quad t_{[ij]} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji})$

$\overset{=}{\mathbb{T}}_s$ de composantes $t_{(ij)}$ est appelé partie symétrique de $\overset{=}{\mathbb{T}}$

$\overset{=}{\mathbb{T}}_a$ de composantes $t_{[ij]}$ est appelé partie antisymétrique de $\overset{=}{\mathbb{T}}$

La forme de ces deux tenseurs montre qu'ils existent toujours.

2 - Décomposition d'un tenseur en partie sphérique et déviateur.

Définition 7 : Un tenseur sphérique est un tenseur pour lequel toute direction de l'espace est vecteur propre. Toutes ses valeurs propres sont égales et toutes ses matrices images sont diagonales.

C'est un tenseur de la forme

(68) $$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{S}}} = s\,\delta_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}$$

Définition 8 : Un déviateur est un tenseur de trace nulle

(69) $$\boxed{D_{ii} = D_1 = 0}$$

Proposition 5 : Un tenseur $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ quelconque est décomposable de façon unique en la somme d'une partie sphérique $\bar{\bar{S}}_T$ et d'un déviateur $\bar{\bar{\mathbb{D}}}_T$.

Supposons en effet qu'une telle décom position soit possible

$$\bar{\bar{\mathbb{T}}} = \bar{\bar{\mathbb{S}}} + \bar{\bar{\mathbb{D}}} \quad \text{alors } T_1 = T_{ii} = S_{ii} = 3s \quad \text{d'où } s = \frac{T_1}{3}$$

et $$d_{ij} = t_{ij} - s\delta_{ij} = t_{ij} - \frac{T_1}{3}\delta_{ij}$$

Cette décomposition existe donc et est unique

(70) $$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{S}}}_T = \frac{T_1}{3}\,\bar{\bar{\mathbb{1}}} \text{ et } \bar{\bar{\mathbb{D}}}_T = \bar{\bar{\mathbb{T}}} - \frac{T_1}{3}\,\bar{\bar{\mathbb{1}}}}$$

Notons que $\bar{\bar{\mathbb{D}}}_T$ à mêmes directions principales que $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ et que ses valeurs propres sont :

(71) $$\delta_i = \tau_i - s$$

3 - Décomposition polaire d'un tenseur non dégénéré.

. Définissons pour commencer le tenseur $\bar{\bar{\mathbb{T}}}^{1/2}$:

Un tenseur symétrique $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ est dit non négatif (respectivement positif) si toutes les valeurs propres sont non négatives (respectivement positives).

Soit $\mathbb{R}$ le tenseur admettant même repère principal que $\mathbb{T}$ (non négatif) et des valeurs propres égales à la racine carrée ≥ 0 des valeurs propres de $\mathbb{T}$. On a évidemment

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{T} \text{ et l'on posera } \quad \underline{\mathbb{R} = \mathbb{T}^{1/2}}$$

$\mathbb{R}$ ainsi défini est unique et symétrique grâce au résultat suivant. (ex 4)

<u>*Exercice 4*</u> : Montrer qu'un tenseur qui est symétrique dans un système d'axe orthogonal l'est dans tout autre système orthogonal.

<u>*Lemme 1*</u> : <u>Si $\mathbb{F}$ est un tenseur du second ordre non dégénéré, $\mathbb{F}\ \mathbb{F}^t$ et $\mathbb{F}^t\ \mathbb{F}$ sont deux tenseurs du second ordre, symétriques, non dégénérés et positifs.</u>

(cad det $\mathbb{F} \neq 0$)

Ils sont symétriques car $(\mathbb{F}\,\mathbb{F}^t)^t = (\mathbb{F}^t)^t\,\mathbb{F}^t = \mathbb{F}\,\mathbb{F}^t$

non dégénérés car $\det(\mathbb{F}.\,\mathbb{F}^t) = (\det \mathbb{F})^2 \neq 0$

Positifs car : soit $\vec{u}$ vecteur propre de $\mathbb{F}\,\mathbb{F}^t$ et λ la valeur propre correspondante

$$(\mathbb{F}\,\mathbb{F}^t\,\vec{u}).\vec{u} = \lambda\vec{u}.\vec{u} = \lambda|\vec{u}|^2$$

vrai car $F_{ij}F_{kj}u_k u_i = (F_{ij}u_i)(F_{kj}u_k) = \mathbb{F}^t\vec{u}\,.\,\mathbb{F}^t\vec{u}$

$$= \mathbb{F}^t\,\vec{u}.\,\mathbb{F}^t\,\vec{u} = |\mathbb{F}^t\,\vec{u}|^2$$

d'où $\lambda = \dfrac{|\mathbb{F}^t\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2}$; alors nécessairement $\lambda > 0$ car $\mathbb{F}^t\vec{u} = 0$ entraînerait soit $\vec{u} = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $\vec{u}$ est vecteur propre; soit $\det \mathbb{F}^t = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $\mathbb{F}$ est non dégénéré.

La démonstration serait analogue pour $\mathbb{F}^t\,\mathbb{F}$.

<u>*Théorème 2*</u> <u>(Décomposition polaire)</u> : <u>Soit $\mathbb{F}$ un tenseur du second ordre non dégénéré On peut écrire $\mathbb{F}$ sous l'une des formes suivantes</u> :

(72) $\qquad \mathbb{F} = \mathbb{R}\ \mathbb{W}$

(73) $\qquad \underline{\mathbb{F} = \mathbb{V}\ \mathbb{R}}$

<u>où $\mathbb{W}$ et $\mathbb{V}$ sont des tenseurs symétriques, $\mathbb{R}$ un tenseur orthogonal.</u>

<u>Les deux décompositions sont uniques.</u>

Démonstration :

• S'il existe une telle décomposition (72), $\bar{\bar{\mathbb{W}}}$ est unique, en effet :

$$\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{F}}} = \bar{\bar{\mathbb{W}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}} = \bar{\bar{\mathbb{W}}}^2 \qquad \text{donc} \qquad \bar{\bar{\mathbb{W}}} = (\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{F}}})^{1/2}$$

et ceci a un sens d'après le lemme précédent.

• Posons donc :

(74) $$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{W}}} = (\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{F}}})^{1/2}}$$

$\bar{\bar{\mathbb{W}}}$ est symétrique d'après ce qui précède.

$\bar{\bar{\mathbb{W}}}$ est non dégénéré car : $(\det \bar{\bar{\mathbb{W}}})^2 = \det \bar{\bar{\mathbb{W}}}^2 = (\det \bar{\bar{\mathbb{F}}})^2 \neq 0$. Posons alors

(75) $$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{R}}} = \bar{\bar{\mathbb{F}}}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1}}$$

$\bar{\bar{\mathbb{R}}}$ est alors déterminé de façon unique à partir de $\mathbb{W}$.

• $\bar{\bar{\mathbb{R}}}$ est orthogonal, c'est-à-dire que $\bar{\bar{\mathbb{R}}}.\bar{\bar{\mathbb{R}}}^t = \bar{\bar{\mathbb{R}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{R}}} = \bar{\bar{\mathbb{1}}}$, en effet :

$$\bar{\bar{\mathbb{R}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{R}}} = (\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1})^t\,\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{F}}}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1} = \bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^2\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1} = \bar{\bar{\mathbb{1}}}$$

$$\bar{\bar{\mathbb{R}}}.\bar{\bar{\mathbb{R}}}^t = \bar{\bar{\mathbb{F}}}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}^{-1}\,\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t = \bar{\bar{\mathbb{F}}}\,(\overline{\overline{\mathbb{F}^t\,\mathbb{F}}})^{-1}\,\bar{\bar{\mathbb{F}}}^t = \bar{\bar{\mathbb{1}}}$$

c.q.f.d.

Exercice 5 : On vérifiera que si $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ est symétrique, alors $\bar{\bar{\mathbb{T}}}^{-1}$ l'est encore.

• On montre de même que l'on peut écrire $\bar{\bar{\mathbb{F}}} = \bar{\bar{\mathbb{V}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}'$ avec $\bar{\bar{\mathbb{V}}}$ symétrique et $\bar{\bar{\mathbb{R}}}'$ ortho gonal; cette décomposition unique étant donné par

$$\bar{\bar{\mathbb{V}}} = (\overline{\overline{\mathbb{F}\,\mathbb{F}^t}})^{1/2}, \qquad \bar{\bar{\mathbb{R}}}' = \bar{\bar{\mathbb{V}}}^{-1}\,\bar{\bar{\mathbb{F}}}$$

Reste, pour achever la démonstration à montrer que $\bar{\bar{\mathbb{R}}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}}'$:

On a : $$\bar{\bar{\mathbb{F}}} = \bar{\bar{\mathbb{V}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}' = (\overline{\overline{\mathbb{R}'\mathbb{R}'^t}})\,\bar{\bar{\mathbb{V}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}' = \mathbb{R}'\,\mathbb{R}'^t\,\mathbb{V}\,\mathbb{R}'$$

$\mathbb{V}$ étant symétrique, $\bar{\bar{\mathbb{R}}}'^t\,\bar{\bar{\mathbb{V}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}'$ l'est. En vertu de l'unicité de la décomposition $\bar{\bar{\mathbb{F}}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}}\,\bar{\bar{\mathbb{W}}}$ on a alors nécessairement $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$ et

(76) $$\boxed{\bar{\bar{\mathbb{W}}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}}^t\,\bar{\bar{\mathbb{V}}}\,\bar{\bar{\mathbb{R}}}}$$

VI - NOTIONS ELEMENTAIRES D'ANALYSE TENSORIELLE.

1 - Champ de tenseur.

Définition 9 : Si à chaque point x d'un certain nomaire Ω d'un espace euclidien on associe un tenseur $\overline{\overline{T}}$ d'ordre m. On dit que l'on a défini un champ de tenseur $\overline{\overline{T}}(x)$ sur Ω .

Soit x_i les composantes de x dans un repère orthonormé $(\vec{e}_i)$. Les composantes $t_{ij\ldots m}$ du champ de tenseur dans ce même repère sont fonctions de $x_1,\ldots x_n$ que nous désignerons globalement par $\underline{x}$.

Le champ $\overline{\overline{T}}(x)$ est continu dans Ω si les composantes sont des fonctions continues de $x_1,\ldots,x_n$ dans Ω.

$\dfrac{\partial T(x)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial t_{i_1 i_2 \ldots i_m}}{\partial x_i}\, \vec{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_m}$

1.1. Notion de différentielle : gradient et divergence d'un champ de tenseur.

Rappel : Soit $\mathcal{F}$ une application d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F. On dit que $\mathcal{F}$ est différentielle en x s'il existe L_x application linéaire continue de E dans F telle que :

$$\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) = L_x(h) + \varepsilon_x(h)\,\|h\|_E$$

avec $\lim\limits_{\|h\|_E \to 0} \|\varepsilon_x(h)\|_F = 0$

. Application à un champ de tenseur.

Soient $E = R^n$;

et F = l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre m sur R^n de dimension n^m

$\mathcal{F}(x) = \overline{\overline{T}}^m(x)$ champ de tenseur d'ordre m. Alors :

$$\overline{\overline{T}}^m(M') - \overline{\overline{T}}^m(M) = \mathbb{L}_M' . \overrightarrow{MM'} + |\overrightarrow{MM'}| \times O(\overrightarrow{MM'})$$

$\mathbb{L}_M$, application linéaire qui au vecteur $\overrightarrow{MM'} \in R^n$ associe le tenseur $\mathbb{L}_M . \overrightarrow{MM'}$ d'ordre m, est, si l'on se reporte à la définition 4, un ~~champ de~~ tenseur d'ordre m+1.

Ce tenseur $\overline{\overline{\mathbb{L}}}_M^{m+1}$ est défini en chaque point M de R^n où le champ $\overline{\overline{T}}^m$ est différentiable : nous l'appelons gradient du champ de tenseur $\overline{\overline{T}}^m$ et le notons $\text{grad}\,\overline{\overline{T}}^m$ ou encore $\overline{\overline{\nabla T}}^{m+1}$. Nous avons alors

$$\mathbb{L}_M . MM' = \text{grad}\,T_M . MM'$$

ce qui s'écrit

(77) $$\boxed{\overline{\overline{dT}}^m_M = \overline{\overline{\text{grad}\,T}}^{m+1}_M . \overrightarrow{dM}}$$

$\overrightarrow{dM} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ où dx_1 est la différentielle de la 1ère coordonnée.

$\overline{\overline{\text{grad}\,T}}^{m+1}$: gradient du champ de tenseur $\overline{\overline{T}}^m$ (c'est un champ de tenseurs d'ordre m+1)

En composantes dans le repère choisi, ceci s'écrit encore

$$dt_{i_1 \ldots i_m} = \frac{\partial t_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x_j} \, dx_j = t_{i_1 i_2 \ldots i_m, j} \, dx_j$$ d'après l'écriture de la matrice jacobienne (voir [illegible]).

Ceci nous montre que

(78) $$\boxed{(\overline{\overline{\text{grad } \mathbb{T}}})_{i_1 i_2 \ldots j} = t_{i_1 i_2 \ldots i_m, j}}$$

Nous appelons donc gradient du champ de tenseur $\overset{=m}{\mathbb{T}}(x)$ d'ordre m, le champ de tenseur d'ordre m+1 dont la composante $i_1 i_2 \ldots i_m j$ dans un repère donné n'est autre que $t_{i_1 i_2 \ldots i_m, j}$.

<u>Divergence d'un champ de tenseur</u> : Nous appellerons divergence d'un champ de tenseur $\mathbb{T}$ d'ordre m, le champ de tenseur d'ordre m-1 obtenu par contraction des deux derniers indices de grad $\overset{=m+1}{\mathbb{T}}$; ses composantes dans le repère choisi sont donc :

(79) $$\boxed{(\overline{\text{div } \mathbb{T}})_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} = t_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} j, j}}$$

<u>Application à un champ scalaire $\phi(x)$</u>

$\phi(x)$ est un champ de tenseur d'ordre 0.

$\overline{\text{grad}\phi}$ est donc un tenseur d'ordre 1 c'est-à-dire un vecteur qui dans le système orthonormé choisi s'écrira

(80) $$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}\phi} = \phi_{,i} \, \vec{e}_i}$$

La divergence d'un champ scalaire ne peut être définie car m=0

2 - Tenseur gradient d'un champ de vecteur.

2.1. Définition et décomposition canonique.

. Appliquons la définition précédente : unchamp de vecteurs est un champ de tenseur d'ordre 1; grad $\vec{U}$ est donc un champ de tenseur d'ordre 2

(81) $$\boxed{\overline{\overline{\text{grad } U}} = u_{i,j} \, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}$$

et div $\vec{V}$ est donc un champ de tenseur d'ordre 0 c'est-à-dire un champ scalaire

(82) $$\boxed{\text{div } \vec{U} = u_{i,i}}$$

appliqué à $\overline{\overline{\text{grad}}}\,U(M)\ \forall M$

. La décomposition canonique de la proposition 4 donne

(83) partie symétrique de grad U(M)

$$\boxed{\begin{aligned} u_{i,j} &= \varepsilon_{ij}(u) + \omega_{ij}(u) \\ \text{où } \varepsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \omega_{ij}(u) &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \end{aligned}}$$

. Le vecteur (appelé en mécanique vecteur tourbillon quand U est le champ de vitesse)

(84)
$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\,\vec{U}} \quad ,$$

est défini par la seule partie antisymétrique du tenseur gradient; en effet :

$\vec{\Omega}\ (\omega_i)$

$$\omega_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} U_{k,j} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{kj} + \omega_{kj}) \text{ d'où}$$

(85)
$$\boxed{\omega_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_{kj}} \qquad \text{(cf 55)} \qquad \cancel{\vec{\Omega} = -\frac{1}{2}\,\overline{\overline{\overline{\varepsilon}}} : \overline{\overline{\omega}}}$$

Inversement, le vecteur $\vec{\Omega}$ définit complètement la partie impaire du tenseur gradient en effet :

$$2\,\omega_i = 2\,\delta_{il}\,\omega_l = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}\,\omega_l$$

et donc d'après (85)
$$\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{ljk}\,\omega_l - \omega_{kj}) = 0$$

ceci implique, cf (55), que $\varepsilon_{ljk}\,\omega_l - \omega_{kj}$ est symétrique en kj et comme il est aussi antisymétrique en kj il ne peut être que nul ainsi :

(86)
$$\boxed{\omega_{kj} = \varepsilon_{jkl}\,\omega_l}$$

$\overline{\overline{\omega}} = (\overline{\overline{\overline{\varepsilon}}}\,\vec{\Omega})$

$\Rightarrow \left|\overline{\overline{\omega}}\,\vec{f} = \vec{\Omega} \wedge \vec{f}\,.\right|$

entr. dém. : on x 85 par ε_{lmi} pour inverser.

En conclusion, le tenseur $(\overline{\overline{\nabla U}})_a$ (partie antisymétrique de $\overline{\overline{\nabla U}}$) est déterminé entièrement par 3 fonctions ω_i. Il faut par contre 6 fonctions scalaires pour déterminer le tenseur $(\overline{\overline{\nabla U}})_s$.

3 6

Remarque 11

(87)
$$\boxed{\text{trace } \overline{\overline{\nabla U}} = \text{trace de } (\overline{\overline{\nabla U}})_s = u_{i,i} = \varepsilon_{ii}(u) = \text{div}\,\vec{U}}$$

• Relations entre les ω_i, et les ε_{ij} :

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jil}\,\omega_l$$

d'où

$$u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jil}\,\omega_{l,k}$$

or $\quad u_{i,jk} = u_{i,kj}$ peut s'écrire $\quad \underline{\varepsilon_{mjk}\,u_{i,jk} = 0}\quad$ d'après (55)
(en considérant le tenseur d'ordre 2 U^i : $u^i_{jk} = u_{i,jk}$)

soit

$$\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{jil}\,\omega_{l,k} = 0$$

$$\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,k} + (\delta_{ki}\,\delta_{ml} - \delta_{kl}\,\delta_{mi})\,\omega_{l,k} = 0 \qquad \text{d'après (50)}$$

$$\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,k} + \omega_{m,i} - \delta_{mi}\,\omega_{l,l} = 0 \qquad \text{mais}$$

$$\omega_{l,l} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{lpq}\,u_{q,pl} = 0 \qquad \text{d'après (55)}$$

d'où (88)

$$\boxed{\omega_{m,i} = \varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ji,k}}$$

2.2. Champ de moment (ou champ des vitesses d'un mt de solide)

Un champ de moment est un champ $\vec{U}$ tel que $\forall$ M et M'

(89) $$\vec{U}(M) - \vec{U}(M') = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$$

$\vec{\omega}$ étant constant, c'est-à-dire indépendant de M et M'.

On reconnaît le champ de vitesse d'un corps rigide.

Théorème 3 (des champs de moment) : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{U}$ soit un champ de moment est que $\varepsilon_{ij}(u) = 0$.

• la condition est nécessaire : si $\vec{U}$ est un champ de moment.

$$\vec{U}(M) - \vec{U}(M') = \vec{\omega} \wedge MM' \qquad \text{mais on ainsi}$$

$$\vec{U}(M) - \vec{U}(M') = \overline{\overline{\text{grad}U}}.\overrightarrow{MM'} \qquad \text{car } \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \text{ est une fonctionnelle linéaire}$$

d'où

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} = \overline{\overline{\text{grad}\,U}}.\overrightarrow{MM'}$$

soit

$$\varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,(x'_k - x_k) = u_{i,k}(x'_k - x_k) \qquad \forall\ \underline{x'} \text{ et } \underline{x}$$

ce qui signifie que pour i fixé, le vecteur de $k^{\text{ème}}$ composante $\varepsilon_{ijk}\,\omega_j - u_{i,k}$ est orthogonal à tout vecteur de R^3 d'où

$$u_{i,k} = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j = -\,u_{k,i} \quad \text{ce qui implique bien } \varepsilon_{ik}(u)=0 \;\forall\; i \text{ et } k$$

. La condition est suffisante : Soit $\varepsilon_{ij}(u)=0$, soit $u_{i,j}+u_{j,i}=0$ cela entraîne $u_{i,jk} + u_{j,ik} = 0$ et donc $\varepsilon_{lkj}\,u_{j,ik} = 0 \quad \forall\; i=1,2,3.$

Intégrons cette quantité en x_i, il vient

$$\varepsilon_{lkj}\,u_{j,k} = c_l \qquad\qquad (c_l \text{ constante})$$

mais

$$2\,c_l = 2\delta_{lp}\,c_p = \varepsilon_{lkj}\,\varepsilon_{pkj}\,c_p$$

d'où

$$\varepsilon_{lkj}\,(2u_{j,k} - \varepsilon_{pkj}\,c_p)=0$$

La quantité entre parenthèse étant antisymétrique en j et k, ne peut être que nulle puisque d'après (55) elle est aussi symétrique

d'où

$$u_{j,k} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{pkj}\,c_p$$

en intégrant

$$u_j = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{pkj}\,c_p\,x_k + a_j \qquad\qquad (a_j \text{ constante})$$

(car $u_{j,k} = C_{jk} \Rightarrow$ $u_j = C_{j1}x_1 + f_1^{\text{te}}$ (dépend pas de 1) ; $u_{j,2} = C_{j2} = f_{1,2}$ d'où $f_1 = C_{j2}x_2 + f_2^{\text{te}}$ (dépend pas de 1, 2) ..... par récurrence $u_j = C_{jk}x_k + a_j$)

et donc

$$u_j(\underline{x}') - u_j(\underline{x}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{pkj}\,c_p\,(x'_k - x_k)$$

ce qui, en posant $\omega_p = \dfrac{c_p}{2}$ = constante s'écrit

$$\vec{U}(M') - \vec{U}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \qquad\qquad \text{c.q.f.d;}$$

2.3. Champ de gradient.

Un champ de gradient $\vec{U}$ est un champ tel qu'il existe ϕ avec $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

Théorème 4 (des champs de gradient): Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{U}$ soit un champ de gradient est que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{U}=0$.

. La condition est nécessaire car si $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ alors $u_i = \phi_{,i}$ et donc

$$\text{rot}\,\vec{u} = \varepsilon_{lpq}\,\phi_{,qp}\,\vec{e}_l = 0 \qquad\qquad \text{cf(55)}$$

. La condition est suffisante car si $\text{rot}\vec{U}=0$ alors :

$\varepsilon_{ijk}\,u_{k,j}=0$ implique que $u_{k,j} = u_{j,k}$ et donc que $u_k\,dx_k$ est une différentielle totale.

Soit donc $d\phi = u_k \, dx_k$

alors $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$ c.q.f.d.

3 - EQUATIONS DE COMPATIBILITE (OU D'INTEGRABILITE).

3.1. Introduction : Les composantes $\omega_i = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\text{rot}\,U})_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,u_{k,j} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_{kj}$ et les composantes $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ représentent un ensemble de 9 fonctions scalaires exprimées à partir des dérivées partielles des 3 composantes U_i d'un champ de vecteur $\vec{U}(x)$. Ces neuf fonctions ne peuvent donc être arbitraires et sont pour cela soumises à des conditions d'intégrabilité qui seront données sans forme d'équations dites de compatibilité.

Nous écrirons ces conditions en se posant successivement deux problèmes

3.2. Problème 1 :

Supposons données les 6 composantes ε_{ij} d'un champ de tenseur symétrique; à quelles conditions peuvent-elles être les composantes de la partie paire d'un tenseur $\overrightarrow{\text{grad}\ U}$? Peut-on alors déterminer $\vec{U}$ de façon uniqueà partir de la donnée de ces 6 fonctions ?

On peut encore exprimer le problème comme suit : conditions d'existence et d'unicité de la solution $\vec{U}$ de

$$u_{i,j} + u_{j,i} = 2\,\varepsilon_{ij} \qquad i,j \in 1,2,3$$

les ε_{ij} étant les composantes données d'un champ de tenseur symétrique.

Théorème 5 (de compatibilité cinématique). Une condition nécessaire et suffisante pour que 6 fonctions ε_{ij} soient les composantes de la partie paire d'un tenseur $\overrightarrow{\text{grad}\,U}$ est que

$$\boxed{\varepsilon_{pil}\,\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,lk}=0} \qquad (90)$$

ce qui de façon équivalente s'écrit encore sous forme plus pratique :

$$\boxed{\Delta\varepsilon_{mp} + \mathcal{E}_{,mp} - (\varepsilon_{ml,lp} + \varepsilon_{pl,lm})=0} \qquad (91) \qquad \text{où } \mathcal{E} = \varepsilon_{ii}$$

indice non muet !

Les champs $\vec{U}$ correspondants sont égaux à un champ de moment près.

Démonstration

. La condition (90) est nécessaire.

Soit en effet $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$. D'après (88) et (55),

$$\omega_{m,i}=\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ji,k}\text{ et la condition }\omega_{m,il}=\omega_{m,li}\text{ se traduit par}$$

d'après 55

$$\varepsilon_{pil}\,\omega_{m,il}=0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{pil}\,\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ji,kl}=0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

. La condition (90) est suffisante .

Soit donc $\varepsilon_{pil}\,\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,lk}=0$;

Alors la quantité $\Omega_{mi}=\varepsilon_{mjk}\,\varepsilon_{ij,k}$ est telle que $\varepsilon_{pil}\,\Omega_{mi,l}=0$ ce qui implique $\Omega_{mi,l}=\Omega_{ml,i}$

donc $\Omega_{mi}dx_i$ est une différentielle totale; c'est-à-dire qu'il existe ω_m tels que $d\omega_m=\Omega_{mi}dx_i$ ce qui impose $\omega_{m,i}=\Omega_{mi}=\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ij,k}$.

Posons $U_{ij}=\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{jil}\,\omega_l$

d'où $U_{ij,k}=\varepsilon_{ij,k}+\varepsilon_{jil}\,\omega_{l,k}$ et

$$\varepsilon_{mkj}\,U_{ij,k}=\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ij,k}+\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{jil}\,\omega_{l,k}$$

$$=\omega_{m,i}+(\delta_{mi}\,\delta_{kl}-\delta_{ml}\,\delta_{ki})\,\omega_{l,k}$$

$$=\omega_{m,i}+\delta_{mi}\,\omega_{l,l}-\omega_{m,i}=\delta_{mi}\,\omega_{l,l}=0$$

car $\omega_{l,l}=\varepsilon_{lkj}\,\varepsilon_{jl,k}=0$ d'après (55)

Ainsi, $\varepsilon_{mkj}\,U_{ij,k}=0$ ce qui est équivalent à $U_{ij,k}=U_{ik,j}$ et implique que

$U_{ij}\,dx_j$ est une différentielle totale; donc $\exists u_i$ tels que :

$= \varepsilon_{ij}(u) + \omega_{ij}(u)$ par def

$$U_{ij}\,dx_j=du_i \quad \text{avec} \quad u_{i,j}=\underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\text{pair}}+\underbrace{\varepsilon_{jil}\,\omega_l}_{\text{impair}}.$$

L'unicité de la décomposition canonique (cf proposition 4) montre alors que

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}).$$

. Qu'en est-il de l'unicité de $\vec{U}$?

Supposons qu'il existe deux champs $\vec{U}^{*}$ et $\vec{U}^{**}$ correspondant aux ε_{ij} donnés, alors

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u^{*}_{i,j}+u^{*}_{j,i})=\frac{1}{2}(u^{**}_{i,j}+u^{**}_{j,i}); \quad \text{posons } U=U^{*}-U^{**}$$

alors $\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ ce qui implique d'après le théorème 3 que $\vec{U}$ est un champ de moment. Le champ $\vec{U}$ solution est donc unique à un champ de moment arbitraire près.

. Equivalence de (90) et (91).

D'après (49), (90) est équivalent à

$$\det\begin{pmatrix}\delta_{pm} & \delta_{pj} & \delta_{pk}\\ \delta_{im} & \delta_{ij} & \delta_{ik}\\ \delta_{lm} & \delta_{lj} & \delta_{lk}\end{pmatrix}\varepsilon_{ij,lk}=0$$

Soit en développant d'après la règle de Sarrus

$$(\delta_{pm}\delta_{ij}\delta_{lk}+\delta_{im}\delta_{lj}\delta_{pk}+\delta_{lm}\delta_{pj}\delta_{ik}-\delta_{pk}\delta_{ij}\delta_{lm}-\delta_{ik}\delta_{lj}\delta_{pm}-\delta_{lk}\delta_{pj}\delta_{im})\varepsilon_{ij,lk}=0$$

c'est-à-dire :

$$\delta_{pm}\,\varepsilon_{ii,ll}+\varepsilon_{mj,jp}+\varepsilon_{ip,mi}-\varepsilon_{ii,mp}-\delta_{pm}\,\varepsilon_{ij,ji}-\varepsilon_{mp,ll}=0$$

or

$$\varepsilon_{mp,ll}=\Delta\varepsilon_{mp}$$

$$\varepsilon_{ii,mp}=\mathcal{E}_{,mp}$$

$$\delta_{pm}\,\varepsilon_{ii,ll}=\delta_{pm}\,\Delta\,\mathcal{E}$$

$$\delta_{pm}\,\varepsilon_{ij,ji}=\delta_{pm}\left(\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2}\right)_{,ji}$$

$$=\frac{\delta_{pm}}{2}(u_{i,ijj}+u_{j,jii})=\delta_{pm}\,\Delta\,\mathcal{E}$$

d'où la relation (91).

Remarques 12.

a) Comment calculer $\vec{U}$ à partir de ε_{ij} ?

Si les 6 ε_{ij} donnés vérifient les conditions de compatibilité (91), alors le calcul du champ $\vec{U}$ correspondant peut s'effectuer par la méthode générale suivante

. Calcul de $\vec{\Omega}$ par intégration de

$\omega_{m,i}=\varepsilon_{mkj}\,\varepsilon_{ij,k}$ ce qui introduit une première constante d'intégration vectorielle soit $\vec{\Omega}_o$.

. Calcul de $\vec{U}$ par intégration de

$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jil}\,\omega_l$ ce qui introduit une deuxième constante d'intégration vectorielle soit U_o.

Dans le résultat, U_o et Ω_o interviennent dans le champ de moment arbitraire mentionné à propos de l'unicité.

En fait, une méthode de calcul de U plus économique pourra être donnée en T.D.

b) Combien y-a-t-il de relations de compatibilités ?

L'équation matricielle (91) étant symétrique en p et m, il y a seulement 6 relations de compatibilité différentes.

3.3. *Problème n°2.*

Supposons données les 3 composantes ω_i d'un champ de vecteur $\vec{\Omega}$, à quelles conditions peuvent-elles être les 1/2 composantes du rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{U}$. Peut-on alors construire $\vec{U}(x)$ unique à partir de $\vec{\Omega}$.

On peut encore exprimer ce problème comme suit : conditions d'existence et d'unicité de la solution $\vec{U}$ de

si $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{U}$ on a *

si * la partie antisym de $\nabla\vec{U}$ est $\varepsilon_{jil}\,\omega_l$

On a imposé $\vec{\Omega}' = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{U}$ c'est-à-dire ω'_l d'où $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$

c.-à-d. $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{U}$.

$$u_{i,j} - u_{j,i} = 2\,\varepsilon_{jil}\,\omega_l \;*$$

Proposition 6 : Une condition nécessaire et suffisante pour que 3 fonctions scalaires $\omega_i(x)$ soient les 1/2 composantes du rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{U}$ est que :

(92)
$$\boxed{\omega_{i,i} = \mathrm{div}\,\vec{\Omega} = 0}$$

Les champs $\vec{U}$ correspondants sont alors déterminés à un champ de gradient arbitraire près.

Démonstration (cette démonstration, intéressante comme exercice, ne sera pas considérée comme étant du programme car le problème correspondant est un peu académique).

. La condition (92) est nécessaire car

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}\,U} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{div}\,\Omega = \omega_{i,i} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,u_{k,ji} = 0 \qquad \text{(cf. 55)}$$

. La condition (92) est suffisante :

Soit $\vec{\Omega}$ tel que div $\vec{\Omega} = 0$.

Les lignes de champ de $\vec{\Omega}$ sont les intégrales du système

$$\boxed{d\vec{M} \wedge \vec{\Omega} = 0}$$

soit
$$\boxed{\frac{dx_i}{\omega_i(x)} = \frac{dx_j}{\omega_j(x)}} \;;$$

désignons par $\eta(\underline{x})$ =constante et $\chi(x)$=constante deux intégrales premières de ce système, c'est-à-dire une famille de surfaces formées par les lignes de champ de $\vec{\Omega}$.

Nous avons à la fois

$$\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\eta} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\chi} = 0$$

ce qui peut se traduire par la relation unique

$$\vec{\Omega}(x) = \phi(x) \left(\overrightarrow{\text{grad}\eta} \wedge \overrightarrow{\text{grad}\chi}\right)$$

soit
$$\omega_i = \phi\varepsilon_{ijk}\, \eta_{,j}\, \chi_{,k}.$$

La condition $\omega_{i,i} = 0$ se traduit alors par

$$\omega_{i,i} = \varepsilon_{ijk}\, \phi_{,i}\, \eta_{,j}\, \chi_{,k} + \varepsilon_{ijk}\phi . \eta_{,ji}\, \chi_{,k} + \varepsilon_{ijk}\phi\eta_{,j}\chi_{,ki}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \phi_{,i}\, \eta_{,j}\, \chi_{,k} = 0$$

Cette relation indique que le Jacobien de l'application qui à $(x_1,x_2,x_3) \in R^3$ fait correspondre $(\phi,\eta,\chi) \in R^3$ est nul; ceci implique (nous admettrons ce résultat) que les fonctions ϕ, η et χ ne sont pas indépendantes.

Soit donc :

$$\phi = \phi(\eta,\chi),$$

posons alors

Alors

$$\psi = \int_0^\eta \phi(t,\chi)dt \quad \text{~~de telle sorte que~~} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \phi \,;$$

alors
$$\psi_{,j} = \phi\eta_{,j} + \frac{\partial\psi}{\partial\chi}\chi_{,j}$$ car $\psi(\eta(x), \chi(x))$ et déri de f^on compo

d'où
$$\phi\eta_{,j} = \psi_{,j} - \frac{\partial\psi}{\partial\chi}\chi_{,j}$$; soit ~~en~~ remplaçant dans l'expression de ω_i

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk}\left(\psi_{,j} - \frac{\partial\psi}{\partial\chi}\chi_{,j}\right)\chi_{,k} = \varepsilon_{ijk}\, \psi_{,j}\, \chi_{,k}\,.$$

Posons $\vec{U} = 2\psi\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \chi$, $u_k = 2\psi\chi_{,k}$

$$u_{k,j} = 2\, \psi_{,j}\, \chi_{,k} + 2\psi\, \chi_{,kj}$$

alors

$\varepsilon_{ijk}\, u_{k,j} = 2\, \omega_i$ ce qui n'est rien d'autre que

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{ rot } \vec{U}$$ c.q.f.d.

. Résultat concernant l'unicité de $\vec{U}$.

Soit $\vec{V}$ un autre champ tel que $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}$ rot $\vec{V}$; alors si $\vec{W} = \vec{U} - \vec{V}$

$$\overrightarrow{\text{rot}\, W} = 0;$$

nous savons d' après le théorème 4 que cette relation implique l'existence d'une fonction ϕ tel que $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}\, \phi}$.

Il n'y a donc unicité qu'à un champ de gradient près.

VII - FONCTION DE TENSEURS.

1. Définitions et exemples.

Nous ne considèrerons dans ce chapitre que des tenseurs d'ordre 2.

. Fonctions scalaires

Soient T et T' les matrices images du tenseurs $\overline{\overline{T}}$ respectivement dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Si nous voulons définir une fonction à valeur scalaire du tenseur $\overline{\overline{T}}$, nous devons poser

$$y = \mathcal{F}(\overline{\overline{T}}) = f(T) \text{ dans } \mathcal{R}$$
$$= f'(T') \text{ dans } \mathcal{R}'$$

f(T) et f'(T') étant des fonctions scalaires équivalentes dans le passage $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ défini p ar la matrice Q; donc

$$\boxed{f(T) = f'(Q^t T Q)}$$

La fonction scalaire du tenseur $\overline{\overline{T}}$, $y = \mathcal{F}(\overline{\overline{T}})$ est donc en général défini par un ensemble de fonctions équivalentes de toutes les matrices semblables associées à $\overline{\overline{T}}$.

pour

• Fonctions à valeurs tensorielles.

$\mathbb{Y} = \mathcal{F}(\bar{\bar{\mathbb{T}}})$ sera fonction tensorielle de $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ si $\mathcal{F}(\bar{\bar{\mathbb{T}}})$ est représenté

dans $\mathcal{R}$ par la matrice F(T)

dans $\mathcal{R}'$ par la matrice F'(T'),

telles que $\boxed{F'(Q^tTQ) = Q^tF(T)Q}$

Il n'y a aucune difficulté à étendre ces définitions au cas de plusieurs variables tensorielles.

• Exemples

a) $y = \mathcal{F}(\bar{\bar{\mathbb{T}}}) = t_{11}$ dans $\mathcal{R}$

$= q_{1\alpha}\, q_{1\beta}\, t'_{\alpha\beta}$ dans $\mathcal{R}'$

b) $y = \text{trace}\,\bar{\bar{\mathbb{T}}}$; $y = \det \bar{\bar{\mathbb{T}}}$; on a bien trace T = trace T' et detT = det T'

c) $\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\bar{\bar{\mathbb{T}}})$ défini par $y_{ij} = t_{i1}\, t_{2j}$ dans $\mathcal{R}$

et $y'_{ij} = q_{1l} q_{2m}\, t'_{il}\, t'_{mj}$ dans $\mathcal{R}'$

Montrons en effet que :

$Y' = Q^t\, Y\, Q$ c'est-à-dire que $y'_{pr} = q_{ip}\, q_{jr}\, y_{ij}$

$$q_{ip}\, q_{jr}\, y_{ij} = q_{ip}\, q_{jr}\, t_{i1}\, t_{2j} = q_{ip}\, q_{jr}\, q_{il}\, q_{1m}\, q_{2n}\, q_{jk}\, t'_{lm}\, t'_{nk}$$

$$= \delta_{pl}\, \delta_{rk}\, q_{1m}\, q_{2n}\, t'_{lm}\, t'_{nk} = q_{1m}\, q_{2n}\, t'_{pm}\, t'_{nr} = y'_{pr}$$

c.q.f.d.

d) $\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\bar{\mathbb{T}}}^2$ est bien une fonction tensorielle car

$$T'^2 = Q^tTQQ^tTQ = Q^tT^2Q = (T^2)'$$

On définit de même une fonction polynôme à valeurs tensorielles

$$\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = c_o\, \bar{\bar{\mathbb{1}}} + c_1\, \bar{\bar{\mathbb{T}}} + \dots + c_p\, \bar{\bar{\mathbb{T}}}^p$$

e) $\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\bar{\mathbb{T}}}^t$ est encore une fonction tensorielle car

$$T'^t = (Q^tTQ)^t = Q^tTQ = (T^t)'$$

f) $y = \mathcal{F}(\bar{\bar{\mathbb{T}}}, \bar{\bar{\mathbb{R}}}) = t_{12} r_{21}$ dans le repère $\mathcal{R}$

$$q_{1\alpha}\, q_{2\beta}\, q_{2\gamma}\, q_{1\delta}\, t'_{\alpha\beta}\, r'_{\gamma\delta} \quad \text{dans } \mathcal{R}'$$

g) enfin $\bar{\bar{\mathbb{Y}}} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}(\bar{\bar{\mathbb{T}}}, \bar{\bar{\mathbb{R}}}) = \bar{\bar{\mathbb{T}}}^2 . \bar{\bar{\mathbb{R}}}$ est bien une fonction tensorielle.

2. Fonctions isotropes.

2.1. Remarque et définition.

Les exemples donnés précédemment de fonctions de tenseur nous montrent qu'il y en a deux catégories

. Celles qui s'expriment différemment dans chaque repère (exemples : a, c, f)

. Celles qui ont une expression intrinsèque, indépendante du repère (exemples b, d, e,g.

Ceci nous conduit à définir les fonctions isotropes.

Définition 10 : Une fonction tensorielle, à valeurs tensorielles du second ordre $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ $(\bar{\bar{\mathbb{T}}}\ \bar{\bar{\mathbb{R}}}\ \bar{\bar{\mathbb{S}}})$ est dite isotrope si F(T,R,S) étant son image dans un repère $\mathcal{R}$ quelconque alors :

$$Q^t F(T,R,S) Q = F\,(Q^t TQ,\ Q^t RQ,\ Q^t SQ) \tag{93}$$

quelle que soit la matrice orthogonale Q.

2.2. Invariants d'un tenseur.

Dans le cas d'une fonction scalaire de tenseur la définition précédente devient :

$$f(T,R,S)\ \cancel{f(T)} = f(Q^t TQ,\ Q^t RQ,\ Q^t SQ) \qquad \forall \text{ soit la matrice orthogonale } Q;$$

Soit pour une fonction d'un seul tenseur

$$f(T) = f(Q^t TQ)$$

Dans ce dernier cas on dit que f(T) est un invariant de $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$.

Les invariants élémentaires d'un tenseur $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$ définis au chapitre IV, sont bien en ce sens des invariants de $\bar{\bar{\mathbb{T}}}$.

Théorème 6 (fondamental des invariants). Tout invariant $f\ (T)$ d'un tenseur symétrique $\bar{\bar{T}}$ ne dépend que des invariants élémentaires de $\bar{\bar{T}}$.

Démonstration : Il suffit de montrer que si $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{R}}$ ont mêmes invariants élémentaires alors $f\ (T) = f\ (R)$.

Soient donc $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{R}}$ deux tenseurs symétriques ayant mêmes invariants élémentaires. Ils ont même polynôme caractéristique et donc mêmes valeurs propres

$$\lambda_k\ ;\ k = 1,2,\ldots n.$$

Soient $\vec{t}_k$ et $\vec{r}_k$ les vecteurs propres unitaires correspondant λ_k respectivement pour $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{R}}$.

Soient T l'image de $\bar{\bar{T}}$ dans le repère orthonormé $\vec{t}_1,\ldots\vec{t}_n$, et R l'image de $\bar{\bar{R}}$ dans le même repère.

Soient K la matrice orthogonale faisant passer du repère principal $(\vec{t}_k)$ de $\bar{\bar{T}}$ au repère principal $(\vec{r}_k)$ de $\bar{\bar{R}}$. Alors

$$K\ \vec{r}_k = \vec{t}_k$$

$$TK\ \vec{r}_k = \lambda_k \vec{t}_k$$

$$KR\ \vec{r}_k = K\ \lambda_k \vec{r}_k = \lambda_k \vec{t}_k$$

ainsi $TK = KR$ et donc $R = K^t\ TK$ (en effet $(\vec{R}_k)$ engendre R^n)

$f\ (T)$ étant un invariant de $\bar{\bar{T}}$, $f\ (T) = f\ (\Omega^t T \Omega)\ \forall\ \Omega$ matrice orthogonale et en particulier $f\ (T) = f\ (K^t TK) = f\ (R)$ c.q.f.d.

2. 3. Fonctions isotropes opérant sur l'ensemble des tenseurs symétriques du second ordre.

Théorème 7 (Des fonctions isotropes) : une fonction $\bar{\bar{Y}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{T}})$ où $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{Y}}$ sont des tenseurs symétriques du second ordre est une fonction isotrope si et seulement si elle admet une représentation de la forme;

(94) $$\bar{\bar{Y}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{T}}) = \phi_o\ \bar{\bar{1}} + \phi_1 \bar{\bar{T}} + \ldots\ \phi_{n-1}\ \bar{\bar{T}}^{n-1}$$ (Ceci dans R^n

où les ϕ_k sont des invariants de $\bar{\bar{T}}$.

Démonstrastion :

a) la condition (94) est suffisante car alors

dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$: $\Omega^t\ Y\Omega = \phi_o 1 + \phi_1 T + \ldots \phi_{n-1}\ T^{n-1}$

dans un autre repère orthogonal $\mathcal{R}$:

$$\Omega^t\ Y\Omega = \phi^1 + \phi_1\ \Omega^t\ T\ \Omega + \phi_2\ \Omega^t\ T^2\ \Omega^t + \ldots \phi_{n-1}\ \Omega^t\ T^{n-1}\Omega.$$

$$= \phi_o\ 1 + \phi_1\ T' + \phi_2\ T'^2\ t\ldots\ \phi_{n-1} = F\ (T')$$

ainsi

$$Q^t Y Q = F(Q^T T Q) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

b) la condition (94) est nécessaire. Soit $\mathcal{F}$ une fonction isotrope et $\overline{\overline{Y}}$ et $\overline{\overline{\Pi}}$ deux tenseurs symétriques du second ordre tels que

$$\overline{\overline{Y}} = \mathcal{F}(\overline{\overline{\Pi}})$$

Lemme 7.1. = <u>si $\vec{t}$ est vecteur propre de $\overline{\overline{\Pi}}$, $\vec{t}$ est également vecteur propre de $\overline{\overline{Y}}$</u> en effet, soit Q la matrice orthogonale faisant correspondre à $\vec{t}$ le vecteur $-\vec{t}$ et laissant invariant tout vecteur orthogonal à $\vec{t}$.

Soit τ la valeur propre de $\overline{\overline{\Pi}}$ correspondant à $\vec{t}$.

Soit $\vec{U}$ un vecteur quelconque de R^n, il peut s'écrire

$$\vec{u} = \lambda\vec{t} + \vec{f} \qquad \text{avec } \vec{t}.\vec{f} = 0 \text{ alors}$$

$$T\vec{u} = \lambda\tau\vec{t} + \vec{g} \qquad \text{avec } \vec{t}.\vec{g} = 0, \text{ en effet ; } T\vec{u}.\vec{t} = \vec{u}.T\vec{t} = \tau\vec{u}.\vec{t} = \lambda\tau|\vec{t}|^2$$

puisque Π est symétrique.

Par ailleurs : $T\vec{u}.\vec{t} = \lambda\tau|\vec{t}|^2 + \vec{g}.\vec{t}$; les deux dernières relations entraînant bien $\vec{g}.\vec{t} = 0$.

$$QT\vec{u} = Q(\lambda\tau\vec{t} + \vec{g}) = -\lambda\tau\vec{t} + \vec{g}$$

$$TQ\vec{u} = T(-\lambda\vec{t} + \vec{f}) = -\lambda\tau\vec{t} + \vec{g}$$

ainsi $(QT-TQ)\vec{u} = 0 \;\forall\, u \in R^n$ donc $T = Q^t TQ \;\forall\, T$ matrice image de $\overline{\overline{\Pi}}$.

Par ailleurs, $\mathcal{F}$ est isotrope donc en particulier : puisque Q est orthogonale

$$Q^t Y Q = F(Q^t T Q) = F(T) = Y \text{ ce qui entraîne } QY = YQ$$

Posons alors

$$Y\vec{t} = \eta\vec{t} + \beta\vec{f}$$

$$QY\vec{t} = -\eta\vec{t} + \beta\vec{f} = YQ\vec{t} = Y(-\vec{t}) = -Y\vec{t};$$

Ceci montre que $\beta = 0$ et donc que $\vec{t}$ est vecteur propre de $\overline{\overline{Y}}$; c.q.f.d.

Par conséquent, tout repère principal de $\overline{\overline{\Pi}}$ est aussi repère principal pour $\overline{\overline{Y}}$.

Soient donc $(\vec{t}_k)$ un repère principal pour τ_k et η_k les valeurs propres correspondantes respectives de Π et Y.

Lemme 7.2 : Si deux valeurs propres de $\bar{\bar{\Pi}}$ sont égales, par exemple $\tau_1 = \tau_m = \tau$ alors les aleurs propres correspondantes η_1 et η_m de $\bar{\bar{\Psi}}$ sont égales.

En effet, soit Q la matrice orthogonale telle que

$$Q\vec{t}_1 = \vec{t}_m$$

$$Q\vec{t}_m = \vec{t}_1$$

$$Q\vec{t}_i = \vec{t}_i \qquad \forall\ i \neq 1 \text{ et } \neq m;$$

soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de R^n :

$$\vec{u} = \lambda\vec{t}_1 + \mu\vec{t}_m + \sum_{\substack{i=1\\ \neq 1\\ \neq m}}^{n} \nu_i\ \vec{t}_i$$

$$QT\vec{u} = Q(\lambda\tau\vec{t}_1 + \mu\ \tau t_m + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1\\ i\neq m}}^{n} \nu_i\ \tau_i\vec{t}_i) = \lambda\tau\vec{t}_m + \mu\tau\vec{t}_1 + \sum_{\substack{i\neq 1\\ \neq m}} \nu_i\ \tau_i\vec{t}_i$$

$$TQ\vec{u} = T(\lambda\vec{t}_m + \mu\vec{t}_1 + \sum_{\substack{i\neq 1\\ \neq m}} \nu_i\ \tau_i) = \lambda\tau\vec{t}_m + \mu\tau\vec{t}_1 + \sum_{\substack{i\neq 1\\ \neq m}} \nu_i\ \tau_i\ \vec{t}_i$$

ainsi $TQ\vec{u} = QT\vec{u}\ \forall\ \vec{u}$ de R^n donc $T = Q^tTQ\ \forall T$ matrice image de $\bar{\bar{\Pi}}$.

Mais $\mathcal{F}$ étant isotrope on en déduit comme au lemme précédent QY=YQ donc :

$$QY\ \vec{t}_1 = Q\eta_1\vec{t}_1 = \eta_1\vec{t}_m \quad \text{et}$$

$$YQ\ \vec{t}_1 = Y\ \vec{t}_m = \eta_m\ \vec{t}_m\ ,$$

impliquent $\eta_1 = \eta_m$ c.q.f.d.

. Revenons à la démonstration du théorème :

Soit m le nombre des valeurs propres distinctes de $\bar{\bar{\Pi}}$: $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_m$.

Soient $\eta_1, \eta_2, \ldots\ _m$ les valeurs propres correspondantes de $\bar{\bar{\Psi}}$.

Considérons alors le système des m équations linéaires

$$\eta_k = \phi_o + \phi_1\ \tau_k + \ldots\ \phi_{m-1},\ \tau_k^{m-1}\ , \qquad k = 1,2,\ \ldots\ m$$

où les ϕ_i sont les m inconnues; c'est un système de Cramer car le déterminant correspondant est un déterminant de Vandermonde (cf cours 1er cycle)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \cdots\cdots & \tau_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_k & \tau_k^2 & \cdots\cdots & \tau_k^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \tau_m & \tau_m^2 & & \tau_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<k}(\tau_i - \tau_k); \text{or } \tau_i \neq \tau_k \text{ par hypothèse donc } D \neq 0$$

Ce système admet donc une solution unique $\phi_o, \ldots \phi_m$. Cette solution dépend des coefficients τ_k^p donc de T et des seconds membres η_k donc de Y mais comme $\bar{\bar{Y}} = \mathcal{F}(\bar{\bar{T}})$, cela revient à dire que les ϕ_i ne dépendent que de T. T et R étant ici les images respectives de $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{R}}$ dans le même repère principal.

Considérons le tenseur $\phi_k \bar{\bar{T}}^k$, avec sommation en k de 0 à m-1.

$\phi_k \bar{\bar{T}}^k \vec{t}_i = (\phi_k \tau_{\underline{i}}^k)\vec{t}_{\underline{i}} = \eta_{\underline{i}} \vec{t}_i$, en effet, $(\phi_o, \ldots \phi_{m-1})$ est solution du système de Cramer précédemment étudié.

Ceci montre que les tenseurs $\phi_k \bar{\bar{T}}^k$ et $\bar{\bar{Y}}$ ont mêmes directions principales et mêmes valeurs propres, ils sont donc égaux et

$$(95) \qquad \bar{\bar{Y}} = \phi_o(T)\,\bar{\bar{1}} + \phi_1(T)\,\bar{\bar{T}} + \ldots + \phi_{m-1}(T)\,\bar{\bar{T}}^{m-1}$$

avec $\phi_i = \phi_i(T)$; $\quad i=0,\ldots m-1$.

Reste à montrer que les ϕ_i sont effectivement des invariants de $\bar{\bar{T}}$ c'est-à-dire que

$$\phi_i = \phi_i(T) = \phi_i(Q^tTQ) = \phi_i(T') \ \forall \ Q \text{ matrice orthogonale et } i=0,\ldots,m-1.$$

$\mathcal{F}$ étant une fonction isotrope, nous savons que $F(Q^tTQ) = Q^tYQ = Y'$. Or d'après (95)

$$F(T) = \phi_o(T)1 + \phi_1(T)T + \ldots \phi_{m-1}(T)T^{m-1}$$

et donc $Y' = F(T') = \phi_o(T')1 + \phi_1(T')T' + \ldots \phi_{m-1}(T')\,T'^{m-1}$

Mais on a encore :

$$Y' = Q^tYQ = \phi_o(T)1 + \phi_1(T)T' + \ldots \phi_{m-1}(T)T'^{m-1} \qquad \text{d'où}$$

$$(\phi_o(T) - \phi_o(T'))I + \ldots \left[\phi_{m-1}(T) - \phi_{m-1}(T')\right]T'^{m-1} = 0$$

d'où $\phi_i(T) = \phi_i(T')$ car $I, T', \dots T'^{m-1}$ sont des matrices linéairement indépendantes; en effet

Exercice 6 : montrer que si une matrice A possède m valeurs propres distinctes, alors $I, A, \dots A^{m-1}$ sont linéairement indépendantes.

Remarque 13 : Le théorème 1 de Hamilton Cayley énoncé dans le cas R^3 est valable pour R^n mais alors toute puissance positive de $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ s'exprime comme polynôme de degré n-1 en $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ et les coefficients sont fonctions alors des n invariants élémentaires de $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$.

On s'aperçoit alors que ce théorème de Hamilton Cayley n'est qu'un cas particulier du théorème 7 des fonctions isotropes. En effet :

- $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ est supposé symétrique dans le théorème 1
- $\Psi = \overline{\overline{\mathbb{T}}}^p$ est symétrique
- $\mathcal{F}(\overline{\overline{\mathbb{T}}}) = \overline{\overline{\mathbb{T}}}^p$ est bien isotrope.
- Enfin, si l'on tient compte du théorème 6, il est clair que les coefficients ϕ_i dans (94) ne dépendent que des n invariants élémentaires de $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$.

Le résultat (64) est donc bien une conséquence de (94).

CONCLUSION - REFERENCES.

Ce cours n'a jamais eu la prétention d'être exhaustif sur les tenseurs; rappelons en particulier que nous nous sommes limités aux cas des bases orthogonales; il est donc nécessaire de signaler quelques références simples pour ceux qui aimeraient, ou auraient besoin par la suite, d'avoir quelques connaissances sur le cas général, c'est ce que nous faisons à la fin de cette conclusion.

Le contenu des chapitres précédents a été choisi en vue d'une initiation à certaines méthodes de calcul et des applications qui seront rencontrées dans le cours de la maîtrise en Physique et en Mécanique.

J. BASS : cours de mathématiques, tome 1, Masson et Cie, Paris 1964.

A. LICHNEROWICZ : Eléments de calcul tensoriel (collection Armand Colin, Paris 1950.