ANALYSE TENSORIELLE

Champ de tenseurs du 2ème ordre

Définition :

Soit A l'espace affine associé à R^3, (u^i) un système de coordonnées sur A, (M, e_1, e_2, e_3) le repère local associé à ces coordonnées On appelle champ de tenseurs: une application de A dans l'espace des formes multilinéaires sur l'espace engendré par (e_1, e_2, e_3).

C'est-à-dire qu'un tenseur T s'écrira :

$$\overset{\Rightarrow}{T} = t_{ij}\,(u^1, u^2, u^3)\; e^i \otimes e^j, \text{ ou } \quad \overset{\Rightarrow}{T} = t^i{}_j\,(u_1, u_2, u_3)\; e_i \otimes e^j$$

$$\overset{\Rightarrow}{T} = t^{ij}\,(u^1, u^2, u^3)\; e_i \otimes e_j$$

Les composantes du tenseur ainsi que la base dépendent du système de coordonnées.

- Effets d'un changement de coordonnées -

Examinons l'effet d'un changement de coordonnées, le point M du repère local pour les deux systèmes étant le même. Soient donc : (u^i) et (v^i) les deux systèmes de coordonnées et (M, e_1, e_2, e_3), $(M, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ les repères locaux associés et soit $\overset{\Rightarrow}{T} = t^{ij}\; e_i \otimes e_j$ un tenseur.
Posons $\overset{\Rightarrow}{T} = t'^{ij}\; \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$ et cherchons à exprimer les composantes t'^{ij} par rapport aux t^{ij}

$$e_i = \frac{\partial M}{\partial u^i} = \frac{\partial M}{\partial v^k}\,\frac{\partial v^k}{\partial u^i} = \alpha^k_i\; \varepsilon_k.$$

$$\text{d'où } t^{ij}\; e_i \otimes e_j = t^{ij}\,\alpha^k_i\,\alpha^q_j\; \varepsilon_k \otimes \varepsilon_q = t^{kq}\,\alpha^i_k\,\alpha^j_q\; \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$$

d'où la relation $\boxed{t'^{ij} = t^{kq}\,\alpha^i_k\,\alpha^j_q}$

ici la matrice α^i_k n'est autre que la matrice de changement de base, le changement de coordonnées pour un point M donné se ramène alors à un problème d'algèbre.

- Différentielle d'un tenseur, gradient d'un tenseur

Soit $\overset{\Rightarrow}{T} = t^{ij}\; e_i \otimes e_j$ un tenseur deux fois contravariant, différentions ce tenseur on a :

$$d\overset{\Rightarrow}{T} = dt^{ij}\; e_i \otimes e_j + t^{ij}\,(de_i) \otimes e_j + t^{ij}\; e_i \otimes de_j$$

avec $dt^{ij} = \dfrac{\partial t^{ij}}{\partial u^k} \, du^k = t^{ij}{}_{,k} \, du^k$

or $d\, e_q = \dfrac{\partial e_q}{\partial u^k} \cdot du^k = \Gamma^i_{qk} \cdot e_i \, du^k$

On peut écrire afin de mettre $e_i \otimes e_j$ en facteur

$$t^{ij} \, (de_i) \otimes e_j + t^{ij} \, e_i \otimes d\, e_j = t^{qj} \, (de_q) \otimes e_j + t^{iq} \, e_i \otimes (de_q).$$

ce qui donne :

$$t^{ij} \, (de_i) \otimes e_j + t^{ij} \, e_i \otimes de_j = (\Gamma^i_{qk} \, t^{qj} + \Gamma^i_{qk} \, t^{iq}) \, e_i \otimes e_j \, du^k$$

d'où

$$\boxed{\vec{\vec{dT}} = (t^{ij}{}_{,k} + \Gamma^i_{qk} \, t^{qj} + \Gamma^j_{qk} \, t^{iq}) \, e_i \otimes e_j \, du^k} \quad (1)$$

l'expression de $\vec{\vec{dT}}$ donnée par la relation (1) est la différentielle (absolue) de $\vec{\vec{T}}$

On peut poser alors :

$\vec{\vec{dT}} = \vec{\vec{T}};k \, du^k$ avec

$$\boxed{\vec{\vec{T}};k = (t^{ij}{}_{,k} + \Gamma^i_{qk} \, t^{qj} + \Gamma^j_{qk} \, t^{iq}) \, e_i \otimes e_j} \quad (2)$$

Les $\vec{\vec{T}};k$ données par (2) se nomment les dérivées covariantes de $\vec{\vec{T}}$ (Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que dans un changement de coordonnées leur loi de transformation a un caractère covariant).

Définition

Si e^k représente la base duale de la base e_i : on appelle gradient du tenseur $\vec{\vec{T}}$ et on note grad $\vec{\vec{T}}$ le tenseur définit par :

$$\text{grad } \vec{\vec{T}} = \vec{\vec{T}};k \otimes e^k \quad \text{(tenseur d'ordre 3).}$$

$$\boxed{\text{grad } \vec{\vec{T}} = (t^{ij}{}_{,k} + \Gamma^i_{qk} \, t^{qj} + \Gamma^j_{qk} \, t^{iq}) \, e_i \otimes e_j \otimes e^k} \quad (3)$$

.../...

Remarquons que si l'on calcule le produit contracté de $\vec{\vec{\text{grad}}}\ T$ par $\vec{dM}$ (avec $\vec{dM} = e_k\, du^k$) il vient

$$\vec{\vec{\text{grad}}}\ T \cdot \vec{dM} = (\vec{\vec{T}}\,;\,j \otimes e^j)\ \delta_{jk}\, du^k = \vec{\vec{dT}}$$

Remarques, exemples :

On vient de définir le gradient d'un tenseur du deuxième ordre (2 fois contravariant) mais ceci s'applique à un tenseur quelconque, si le tenseur $\vec{T}$ est d'ordre p le tenseur gradient est d'ordre p + 1

Ex :

Soit g une fonction (tenseur d'ordre 0).

alors $\vec{\text{grad}}\ g = g,_k\ e^k$

Vecteur (tenseur d'ordre (1)).

$$V = v^i\ e_i$$

$$V;_k = (v^i,_k + \Gamma^i_{mk}\ v^m)\ e_i$$

et $\vec{\vec{\text{grad}}}\ \vec{V} = (v^i,_k + \Gamma^i_{mk}\ v^m)\ e_i \otimes e^k$ (c'est une matrice)

résultat déjà obtenu au chapitre I

- Cas des coordonnées cartésiennes

$$\vec{\vec{T}} = t^{ij}\ e_i \otimes e_j$$

$\vec{\vec{T}},_k = t^{ij},_k\ e_i \otimes e_j$ (les symboles de christoffel sont nuls).

et on a $\vec{\vec{\text{grad}}}\ T = t^{ij},_k\ e_i \otimes e_j \otimes e^k$

et $\vec{\vec{dT}} = (t^{ij},_k\ e_i \otimes e_j)\ du^k$

- <u>Divergence d'un champ de tenseur</u>

Définition:

On appelle divergence d'un champ de tenseur, la contraction de grad $\vec{\vec{H}}$ suivant deux indices <u>dont l'un porte sur l'opération de dérivation</u>.

(on ne peut prendre la divergence que de tenseurs au moins une fois contravariant).

D'où la divergence d'un tenseur d'ordre 2 est un vecteur, puisque le gradient est un tenseur d'ordre 3 et que la contraction diminue de 2 l'ordre du tenseur.

La divergence donne lieu donc à plusieurs tenseurs, suivant le choix de l'indice de contraction.

Exemples

Si $\overset{\Rightarrow}{T} = t^{ij}\ e_i \otimes e_j$

on a alors

$$\operatorname{grad} \overset{\Rightarrow}{T} = (t^{ij}{}_{,k} + \Gamma^{i}_{qk}\, t^{qj} + \Gamma^{j}_{qk}\, t^{iq})\ e_i \otimes e_j \otimes e^k .$$

On a deux divergences possibles

$$\operatorname{div}_2 \overset{\Rightarrow}{T} = (t^{kj}{}_{,k} + \Gamma^{k}_{qk}\, t^{qj} + \Gamma^{j}_{qk}\, t^{kq})\ e_j$$ (contracté par rapport au $2^{ème}$ indice).

Ou bien

$$\operatorname{div}_1 \overset{\Rightarrow}{T} = (t^{ik}{}_{,k} + \Gamma^{i}_{qk}\, t^{qk} + \Gamma^{k}_{qk}\, t^{iq})\ e_i$$ (contracté par rapport au 1^{er} indice).

Remarquons :

Si le tenseur $\overset{\Rightarrow}{T}$ est symétrique ($t^{ij} = t^{ji}$) alors ces deux divergences sont égales.

en coordonnées cartésiennes on obtient :

$$\operatorname{div}_1 \overset{\Rightarrow}{T} = (t^{ik}{}_{,k})\ e_i$$

$$\operatorname{div}_2 \overset{\Rightarrow}{T} = (t^{kj}{}_{,k})\ e_j$$

Si le repère est orthonormé on a alors $t^{ij} = t^{i}{}_{j} = t_{ij}$ on peut identifier le tenseur avec une matrice, on remarque alors que :

$\operatorname{div}_1 \overset{\Rightarrow}{T}$ est un vecteur dont les composantes sont les divergences des vecteurs lignes de $\overset{\Rightarrow}{T}$

$\operatorname{div}_2 \overset{\Rightarrow}{T}$ est un vecteur dont les composantes sont les divergences des vecteurs colonnes de $\overset{\Rightarrow}{T}$

<u>Théorème d'Ostrogradsky généralisé</u>

Soit $\overset{\Rightarrow}{T}$ un champ de tenseur et Λ un domaine de l'espace limité par une surface Σ, soit $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire à Σ sortant de Λ. On a :

$$\iiint_{\Lambda} \mathrm{div}_1 \overset{\Rightarrow}{(T)} \, d\tau = \iint_{\Sigma} \overset{\Rightarrow}{T} \cdot \vec{n} \, d\sigma \tag{4}$$

Le produit dans l'intégrale double étant un produit contracté.

- Laplacien d'un champ vectoriel

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteur, on peut calculer son gradient qui est un tenseur du deuxième ordre, et prendre la divergence de ce nouveau tenseur. C'est-à-dire, qu'il faut calculer $\overset{\Rightarrow}{\mathrm{grad}}$ (grad V) et contracter sur les deux indices de dérivation. On pose donc :

$$\Delta \vec{V} = \mathrm{div} \, (\overset{\Rightarrow}{\mathrm{grad}} \, \vec{V})$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées le laplacien d'un champ de vecteur est alors le champ de vecteur dont les composantes sont les laplaciens des composantes de $\vec{V}$.

$$\vec{V} = V^i \; e_i \quad \text{alors} \quad \Delta \vec{V} = \Delta V^i \; e_i$$

COMPLEMENTS D'ANALYSE TENSORIELLE

Nous avons calculé le gradient d'un tenseur deux fois contravariants, pour calçuler le gradient d'un tenseur covariant il nous manque l'expression des $d\,e^i$, aussi allons nous voir quelques propriétés des symboles de christoffel.

Partons de la relation :

$$e^i \cdot e_j = \delta^i_j \quad \text{d'où en différentiant :}$$

$$d\,e^i \cdot e_j + e^i \cdot d\,e_j = 0$$

Or $de_j = \dfrac{\partial e_j}{\partial u^k}\, du^k = (\Gamma^l_{jk}\, e_l)\, du_k$

et $de^i = \dfrac{\partial e^i}{\partial u^k} \cdot du^k$

d'où

$$\frac{\partial e^i}{\partial u^k} \cdot e_j\, du^k = -\, e^i \cdot (\Gamma^l_{jk}\, e_l\, du^k) = -\delta^i_l\, \Gamma^l_{jk}\, du^k = -\Gamma^i_{jk}\, du^k$$

d'où on a :

$$\frac{\partial e^i}{\partial u^k} = -\Gamma^i_{jk}\, e^j$$

On pose $-\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{i}{}_{jk}$

$$\boxed{\frac{\partial e^i}{\partial u^k} = -\Gamma^i_{jk}\, e^j = \Gamma^{i}{}_{jk}\, e^j} \qquad (5)$$

Si on calcule la différentielle du tenseur mixte $\overrightarrow{T} = t^i_j\, e_i \otimes e^j$ il vient en tenant compte des formules (1) et (5)

$$\boxed{\overrightarrow{dT} = (t^i_{j,k} + \Gamma^i_{qk}\, t^q_j - \Gamma^q_{jk}\, t^i_q)\, e_i \otimes e^j\, du^k} \qquad (6)$$

On définit alors le gradient de T par :

$$\boxed{\vec{\operatorname{grad}}\, T = (t^i_{j},_k + \Gamma^i_{qk}\, t^q_j - \Gamma^q_{jk}\, t^i_q)\; e_i \otimes e^j \otimes e^k} \qquad (7)$$

On définirait alors de même la divergence de $\vec{T}$ en contractant ici obligatoirement sur les indices i et k

Propositions :

1°) Les symboles Γ^j_{ik} sont symétriques en i et k. C'est-à-dire

$$\Gamma^j_{ik} = \Gamma^j_{ki}$$

en effet

$$e_i = \frac{\partial M}{\partial u^i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial e_i}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^k\, u^i} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial e_k}{\partial u^i}$$

2°) Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs (ils ne définissent pas un champ de formes trilinéaires).

Considérons un changement de coordonnées

$$E_I = \frac{\partial M}{\partial v^I} \qquad \text{et} \quad e_j = \frac{\partial M}{\partial u^j}$$

avec $E_I = \alpha^i_I\, e_i$ ou $\alpha^i_I = \dfrac{\partial u^i}{\partial v^I}$

On notera β^j_J la matrice inverse de la matrice d'éléments α^i_I

On a :

$$dE_I = \Gamma^J_{IK}\, dv^k\, E_J = d\,(\alpha^i_I\, e_i)$$

Or

$$d\,(\alpha^i_I\, e_i) = \alpha^i_{I,K}\, dv^K e_i + \alpha^i_I\, de_i = \alpha^i_{I,K}\, e_i\, dv^K e_i + \alpha^i_I\, \Gamma^j_{ik}\, du^k e_j$$

$$= (\alpha^i_{I,K}\, \beta^J_i + \alpha^i_I\, \beta^J_j\, \alpha^k_K\, \Gamma^j_{ik})\; dv^K\, E_J$$

.../...

d'où la formule

$$\boxed{\Gamma^{J}_{I\,K} = \alpha^{i}_{I}\,\beta^{J}_{j}\,\alpha^{k}_{K}\,\Gamma^{j}_{i\,k} + \alpha^{i}_{I,\,K}\,\beta^{J}_{i}} \qquad (8)$$

Dans la relation (8) le premier terme correspond au mode de transformation d'un tenseur, mais il s'ajoute le terme $\alpha^{i}_{I,K}\,\beta^{J}_{i}$ qui n'est nul que si

$\alpha^{i}_{I,\,K} = 0$ c'est-à-dire si le changement de coordonnées est linéaire à coefficients constants.

Calcul des coefficients de Christoffel

Nous allons voir qu'on peut calculer les $\Gamma^{k}_{i\,j}$ à partir du tenseur métrique et de ses dérivées.

Posons :

$$\boxed{\frac{\partial e_i}{\partial u^k} = \Gamma_{ijk}\, e^j} \qquad (9)$$

Les Γ_{ijk} sont les symboles de Christoffel de 1er espèce

$\Gamma^{j}_{i\,k}$ sont les symboles de Christoffel de 2eme espèce

Or on a :

$$\frac{\partial e_i}{\partial u^k} = \Gamma^{j}_{i\,k}\, e_j = \Gamma_{ijk}\, e^j$$

avec $e^j = g^{jm}\, e_m$

d'où $\partial_{u^k}\ \Gamma^{j}_{i\,k}\, e_j = \Gamma_{ijk}\, g^{jm}\, e_m$

d'où $$\boxed{\Gamma^{j}_{i\,k} = g^{jm}\,\Gamma_{i\,m\,k}} \qquad (10)$$

Or $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ dérivons cette relation par rapport à k

$$g_{ij,k} = (e_i \cdot e_j),\,k = e_{i,k} \cdot e_j + e_i \cdot e_{j,k} = \Gamma_{ilk}\, e^l \cdot e_j + \Gamma_{jlk}\, e_i \cdot e^l$$

.../...