T E N S E U R S

I - Théorie algébrique des tenseurs

- Introduction

Nous avions noté que, pour des systèmes simples, la puissance ou l'énergie apparaissent comme des formes linéaires. Si, maintenant, le modèle du phénomène physique étudié est décrit par q grandeurs vectorielles, dans une approche linéaire, on généralisera le cas à une variable, à l'aide de "fonctionnelles" multiilinéaires.

1) Tenseur sur un espace vectoriel

Notations :

- Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur $\mathbb{R}$, on notera B une forme bilinéaire sur E,F, c'est-à-dire une application qui à $(X,Y) \in E \times F$ asssocie $B(X,Y) \in \mathbb{R}$, linéaire par rapport à X et Y.

- Si E est un espace vectoriel on notera $\mathcal{L}_q(E)$, l'espace des formes q linéaires sur E ;on a alors $E^* = \mathcal{L}_1(E)$; où E^* est le dual de E si $X \in E$ et $\varphi \in \mathcal{L}_1(E)$ on notera $X \longrightarrow \varphi(X)$

- Dans la suite E sera un espace vectoriel réel de dimension n.

1a) Tenseurs d'ordre 2.

Ici E ne sera pas considéré comme euclidien (on n'identifiera pas une forme linéaire à un vecteur).

Définition :

Soient φ et $\psi \in \mathcal{L}_1(E)$ deux formes linéaires : la relation :

(1) $$(\varphi \otimes \psi)(X, Y) = \varphi(X) \cdot \psi(Y) \qquad \text{où } (X, Y) \in E \times E$$

définit $\varphi \otimes \psi$ comme un élément de $\mathcal{L}_2(E)$, c'est-à-dire comme une forme bilinéaire sur E. On l'appelle produit tensoriel de φ par ψ.

Proposition :

Soient (e_i) une base de E, (e^j) la base de E^* duale de la base (e_i) (ie $e^j(e_i) = \delta^j_i$). L'ensemble des produits tensoriels $e^i \otimes e^j$ définis par :

$$(e^i \otimes e^j)(e_k, e_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \text{ ou } m \neq j \quad \text{(ou inclusif)} \\ 1 & \text{si } k = i \text{ et } m = j \end{cases}$$

est une base de $\mathcal{L}_2(E)$

- Si B est un élément de $\mathcal{L}_2(E)$ on note (avec la convention d'Einstein).

$$B = b_{ij} \; e^i \otimes e^j$$

- $\mathcal{L}_2(E)$ est de dimension n^2

Démonstration :

Remarquons que :

$$(e^i \otimes e^j)(e_k, e_m) = e^i(e_k) \, . \, e^j(e_m). \quad \text{d'après la définition.}$$

Soient X, Y 2 éléments de E : $X = x^i e_i$, $Y = y^j e_j$

$B(X, Y) = x^i y^j \; b(e_i, e_j)$

posons $b(e_i, e_j) = b_{ij}$ et remarquons que si on pose

$B = b_{ij} \; e^i \otimes e^j$

alors $B(X,Y) = x^i y^j b_{ij}$ ce qui démontre que les $e^i \otimes e^j$ sont générateurs de $\mathcal{L}_2(E)$.

Il faut montrer qu'ils forment un système indépendant.

Soient n^2 scalaires λ_{ij} tels que

$$\lambda_{ij} \; e^i \otimes e^j = 0 \quad \text{(forme bilinéaire nulle).}$$

alors

$$(\lambda_{ij} \; e^i \otimes e^j)(e_k, e_m) = \lambda_{k\,m} = 0 \quad \forall \, k,m$$

Ce qui montre que le système est libre

Définitions

Soient maintenant $E^* = \mathcal{L}_1(E)$ l'espace dual de E on pose par définition $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}_2(E^*)$. (en général $\mathcal{L}^q(E) = \mathcal{L}_q(E^*)$. Et X, Y deux vecteurs fixes de E ; la relation

$$(X \otimes Y)(\varphi, \psi) = \varphi(X) \, . \, \psi(Y) \quad \forall \, \varphi, \psi \in E^*$$

définit un élément de $\mathcal{L}^2(E)$ (ie $\mathcal{L}_2(E^*)$) qu'on appelle produit tensoriel de X par Y.

Proposition :

Si (e_i) est une base de E, soit (e^j) la base de E^* duale de (e_i) : l'ensemble des éléments $e_i \otimes e_j$ tels que :

$$(e_i \otimes e_j)(e^k, e^m) = e^k(e_i) \cdot e^m(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i,\ m \neq j \\ 1 & \text{si } k = i \text{ et } m = j \end{cases}$$

est une base de $\mathcal{L}^2$ (E)

Si $B \in \mathcal{L}^2$ (E) on note

$$B = b^{ij}\ e_i \otimes e_j$$

et dim $\mathcal{L}^2$ (E) $= n^2$

Définition :

Considérons l'espace des formes bilinéaires sur $E \times E^*$ qu'on note

$\mathcal{L}^1_1$ (E) , $B \in \mathcal{L}^1_1$ (E) si $(X, \varphi) \in E \times E^* \xrightarrow{B} B(X, \varphi) \in \mathbb{R}$

B est linéaire en X et φ.

La relation où $X \in E$ et $\varphi \in E^*$

$(X \otimes \varphi)(\psi, Y) = \psi(X) \cdot \varphi(Y)$ définit un élément de $\mathcal{L}^1_1$ (E).

qu'on appelle produit tensoriel de X par φ.

Proposition :

De la même façon les éléments de la forme : $e_i \otimes e^j$ tels que :

$$(e_i \otimes e^j)(e^k, e_m) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i,\ m \neq j \\ 1 & \text{si } k = i \text{ et } m = j \end{cases}$$

forment une base de $\mathcal{L}^1_1$ (E) et si $B \in \mathcal{L}^1_1$ (E) on note :

$$B = b^i_j\ e_i \otimes e^j$$

D'où

- l'espace $\mathcal{L}_2$ (E) est noté $E^* \otimes E^*$, on l'appelle produit tensoriel de E^* par E^*, ses éléments sont les tenseurs deux fois covariants sur E.

- l'espace $\mathcal{L}^2$ (E) est note $E \otimes E$, on l'appelle produit tensoriel de E par E ses éléments sont les tenseurs deux fois contravariants sur E.

- lespace $\mathcal{L}^1_1$ (E) est noté $E \otimes E^*$, produit tensoriel de E par E^*, ses éléments sont les tenseurs mixtes 1 fois covariants 1 fois contravariants.

Remarquons que :

$E^* \otimes E$ et $E \otimes E^*$ sont isomorphes.

1b) Tenseurs d'ordre quelconque :

Soient (p,q) deux entiers, si $\mathcal{L}_p^q$ (E) est l'ensemble des formes p + q linéaires sur $\underbrace{E \times E \ldots \times E}_{p} \times \underbrace{E^* \times E^* \ldots \times E^*}_{q}$ c'est-à-dire l'ensemble de T tels que :

$$(X_1, \ldots, x_p ; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) \longrightarrow T(X_1, X_2, \ldots, X_p ; \varphi^1, \ldots, \varphi^q) \in \mathbb{R}$$

linéaires par rapport à chaque variable. Un élément de $\mathcal{L}_p^q$ (E) est un tenseur ~~p~~ q fois covariant, ~~q~~ p fois contravariant.

Proposition

i) l'ensemble des éléments de la forme :

$e^{i1} \otimes \ldots \otimes e^{ip} \otimes e_{j1} \ldots \otimes e_{jq}$ tels que :

$$(e^{i1} \otimes \ldots \otimes e^{ip} \otimes e_{j1} \ldots \otimes e_{jq})(e_{k1}, \ldots, e_{kp}, e^{m1}, \ldots, e^{mq})$$

$= 0$ si $k_1 \neq i_1$ ou ……………… $j_q \neq m_q$

1 si $k_1 = i_1$ et ……………… $j_q = m_q$

forment une base de $\mathcal{L}_p^q$ (E).

ii) Si $T \in \mathcal{L}_p^q$ (E) on a :

$$T = T_{i1 \ldots ip}^{j1 \ldots jq} \, e^{i1} \otimes \ldots \otimes e^{ip} \otimes e_{j1} \otimes \ldots \otimes e_{jq}$$

avec $T_{i1 \ldots ip}^{j1 \ldots jq} = T(e_{j1}, \ldots, e_{jq}, e^{i1}, \ldots, e^{ip})$ qu'on appelle composantes de T dans la base définie en i)

iii) $\mathcal{L}_p^q$ (E) est de dimension n^{p+q}

- Somme de deux tenseurs

Si $S \in \mathcal{L}_p^q$(E) et $T \in \mathcal{L}_p^q$ (E) on appelle S + T somme de S et T le tenseur tel que :

$$(S + T)(X_1, \ldots, X_p, \varphi^1 \ldots \varphi^q) = S(X_1, \ldots, X_p, \varphi^1, \ldots, \varphi^q) + T(X_1, \ldots, X_p, \varphi^1, \ldots, \varphi^q)$$

et

$$(S + T)_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = S_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} + T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$$

- Produit tensoriel de deux tenseurs

Soient $T \in \mathcal{L}_p^q(E)$ et $S \in \mathcal{L}_r^s(E)$ la relation

$$(T \otimes S)(X_1, \dots, x_{p+r}, \varphi^1, \dots, \varphi^{q+s}) = T(X_1, \dots, x_p, \varphi^1 \dots \varphi^q)\, S(X_{p+1}, \dots, X_{p+r}, \varphi^{q+1}, \dots, \varphi^{q+s})$$

définit un élément de $\mathcal{L}_{p+r}^{q+s}(E)$ qu'on appelle produit tensoriel de T et de S.

On a alors :

$$(T \otimes S)^{j_1 \dots j_{q+s}}_{i_1 \dots i_{p+r}} = T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \cdot S^{j_{q+1} \dots j_{q+s}}_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}$$

Chaque composante de T est multipliée par chaque composante de S.

On a donc

- $\mathcal{L}_p^q(E) \otimes \mathcal{L}_r^s(E) = \mathcal{L}_{p+r}^{q+s}(E)$

- la multiplication est distributive par rapport à l'addition

$$(T + S) \otimes R = T \otimes R + S \otimes R$$

$$R \otimes (T + S) = R \otimes T + R \otimes S$$

- La multiplication est associative

$$(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$$

Cependant le produit tensoriel n'est en général pas commutatif

$$T \otimes S \neq S \otimes T$$

- Exemple dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} X = x^1 e_1 + x^2 e_2 \\ Y = y^1 e_1 + y^2 e_2 \end{cases} \qquad X \otimes Y = x^1 y^1\, e_1 \otimes e_1 + x^1 y^2\, e_1 \otimes e_2 + x^2 y^1\, e_2 \otimes e_1 + x^2 y^2\, e_2 \otimes e_2$$

ET

$$Y \otimes X = x^1 y^1\, e_1 \otimes e_1 + x^2 y^1\, e_1 \otimes e_2 + x^1 y^2\, e_2 \otimes e_1 + x^2 y^2\, e_2 \otimes e_2$$

et en général $x^2 y^1 \neq x^1 y^2$

Notation :

On convient d'identifier l'ensemble des tenseurs de type (0,0) avec les scalaires

- Formules de changement de base

Soient $T \in \mathcal{L}^q_p(E)$, (e_i) une base de E, (e^j) base duale de (e_i) dans E^*, soit (E_I) une nouvelle base E, (E^J) la base duale de (E_I) on peut écrire

$$(1) \quad \begin{cases} E_I = \alpha^i_{\dot{I}}\, e_i \quad \text{ou} \quad e_i = \beta^{\dot{I}}_i\, E_I \\ E^J = \beta^J_j\, e^j \quad \text{ou} \quad e^j = \alpha^j_J\, E^J \end{cases}$$

les matrices α et β sont inverses l'une de l'autre

écrivons T dans les bases (e_i) et $(E^{\dot{I}})$

$$T = T^{j1.....jq}_{i1.....ip}\, e_{j1} \otimes \ldots\ldots \otimes e_{jq} \otimes e^{i1} \otimes \ldots\ldots \otimes e^{ip}$$

$$T = T'^{J1.....Jq}_{\dot{I}1.....\dot{I}p}\, E_{JI} \otimes E_{J2} \ldots\ldots \otimes E_{Jq} \otimes E^{\dot{I}1} \otimes \ldots\ldots \otimes E^{\dot{I}p}$$

Il vient

$$T = T^{j1.....jq}_{i1.....ip}\, \alpha^{i_1}_{I1} \ldots\ldots \alpha^{ip}_{Ip}\, \beta^{J_1}_{j1} \ldots\ldots \beta^{Jq}_{jq}\, E_{J1} \otimes \ldots \otimes E_{Jq} \otimes E^{\dot{I}1} \ldots \otimes E^{\dot{I}p}$$

d'où

$$(2) \quad \boxed{T'^{J_1.....Jq}_{I1.....Ip} = T^{j1.....jq}_{i1.....ip}\, \alpha^{i1}_{I1} \ldots\ldots \alpha^{ip}_{Ip}\, \beta^{I1}_{j1} \ldots\ldots \beta^{Jq}_{jq}}$$

<u>Proposition</u>

Si on se donne un changement de base dans E par les formules (1) alors les composantes du tenseur se transforment par les formules (2). (composantes du tenseurs dans la nouvelle base en fonction des composantes dans l'ancienne).

Réciproquement

Si on se donne n^{p+q} scalaires qui se transforment par un changement de base par les formules (2), il leur est associé une forme p+q linéaire de $\mathcal{L}^q_p(E)$ c'est-à-dire un tenseur.

(La formule (2) porte aussi le nom de "critère de tensorialité").

- Contraction - produit contracté

Soit $T \in \mathcal{L}^q_p(E)$ en tant que forme p+q linéaire on écrit :

$T(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_p\ ;\ \varphi^1, \ldots\ldots, \varphi^q)$.

Considérons la Kième variable X_k dans le p-uple $(X_1, \ldots\ldots, X_p)$

et la ℓ ième variable φ^ℓ dans le q-uple $(\varphi^1, \ldots\ldots, \varphi^q)$

(on suppose $k \leqslant p$ et $\ell \leqslant q$).

L'expression suivante définit un élément S de $\mathcal{L}^{q-1}_{p-1}(E)$

(3) $S(X_1, \ldots\ldots, X_{p-1}\ ;\ \varphi^1, \ldots\ldots, \varphi^{q-1}) = T(X_1, \ldots\ldots, X_{k-1}, e_i, X_{k+1}, \ldots, X_p\ ;\ \varphi^1, \ldots\ldots, \varphi^{\ell-1}, e^i, \varphi^{\ell+1}, \ldots\ldots, \varphi^q)$

Les composantes de S dans une base (e_i) sont alors

(4) $$S^{j1\ldots jq-1}_{i1\ldots ip-1} = T^{j1\ldots j_{\ell-1}\ i\ j_{\ell+1}\ldots jq}_{i1\ldots i_{k-1}\ i\ i_{k+1}\ldots ip}$$

c'est-à-dire sous forme développée

$$S^{j1\ldots jq-1}_{i1\ldots ip-1} = \sum_{i=1}^{n} T^{j1,\ldots\ldots,\ j\ell-1,i,\ j\ell+1\ldots\ldots jq}_{i1,\ldots\ldots,\ ik-1,i,\ ik+1,\ldots\ldots i_p}$$

Ce nouveau tenseur S est dit être obtenu par contraction du $\ell^{\text{ième}}$ indice supérieur et du kième indice inférieur.

Produit contracté de deux tenseurs

Soit S et T deux tenseurs $S \in \mathcal{L}^s_r(E)$ $T \in \mathcal{L}^q_p(E)$

Soit R le tenseur de $\mathcal{L}^{q+s}_{p+r}(E)$ produit tensoriel de T et S

$$R = T \otimes S$$

On choisit un indice supérieur (resp inférieur) de rang ℓ dans T, un indice inférieur (resp supérieur) de rang k dans S et on peut contracter par rapport à ces deux indices le tenseur R, on obtient un nouveau tenseur

$U \in \mathcal{L}^{q+s-1}_{p+r-1}(E)$

U est appelé produit contracté de T par S pour le kième indice supérieur (resp inférieur) de T et le ℓième indice inférieur (resp supérieur de S)

On note parfois :

$$U = T \overset{k}{\underset{\ell}{\dot{\otimes}}} S$$

2) Tenseurs en espace Euclidien

On prend dans ce paragraphe $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel, on identifie E^* avec $\mathbb{R}^n$, la base (e^j) duale de la base (e_i) étant définie (comme précédemment) par :

$$e^j(e_i) = e^j \cdot e_i = \delta^j_i$$

De plus on s'intéresse tout spécialement dans ce paragraphe aux tenseurs d'ordre 2.

Passage des composantes covariantes aux composantes contravariantes (et inverse).

On a vu que si on posait $g^{ij} = e^i \cdot e^j$ et $g_{ij} = e_i \cdot e_j$

$$\left\{\begin{array}{l} e_i = g_{ij}\, e^j \\ e^j = g^{ij}\, e_i \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g_{ij}\, g^{jk} = \delta^k_i$$

Considérons un tenseur T deux fois contravariant

$$T = t^{k\ell}\, e_k \otimes e_\ell$$

passons à la base duale

$$e_k = g_{kj}\, e^j, \quad e_\ell = g_{\ell i}\, e^i$$

Il vient :

$$t^{k\ell}\, e_k \otimes e_\ell = t^{k\ell}\, g_{kj}\, g_{\ell i}\, e^i \otimes e^j = t_{ij}\, e^i \otimes e^j$$

On peut donc écrire T sous la forme d'un tenseur 2 fois covariant

(5) $$\boxed{t_{ij} = t^{k\ell}\, g_{ki}\, g_{\ell j}}$$

Remarquons que :

Si la base (e_i) est orthonormée alors $e_i = e^i$ et l'on ne peut plus faire de différence entre les composantes covariantes et contravariantes.

On a :

(6) $$\boxed{t_{ij} = t^{ij} = t^i_j}$$

Contraction :

Sauf en repère orthonormé on ne peut contracter qu'un tenseur mixte du deuxième ordre.

Soit $T = t^i_j\, e_i \otimes e^j$

On ne peut contracter que sur les indices i et j, on obtient alors un scalaire qu'on appelle trace de T.

$$\text{Trace }(T) = t^i_{\ i}$$

Cependant à un tenseur deux fois contravariant on peut associer ces composantes mixtes et prendre sa trace :

$$T = t_{k\ell} \; e^k \otimes e^\ell \qquad \text{or} \quad e^k = g^{ki} \; e_i$$

$$T = t'^{\,i}_{\ \ell} \; e_i \otimes e^\ell = t_{k\ell} \, g^{ki} \; e_i \otimes e^\ell$$

d'où

$$\text{trace }(T) = t_{ki} \; g^{ki}$$