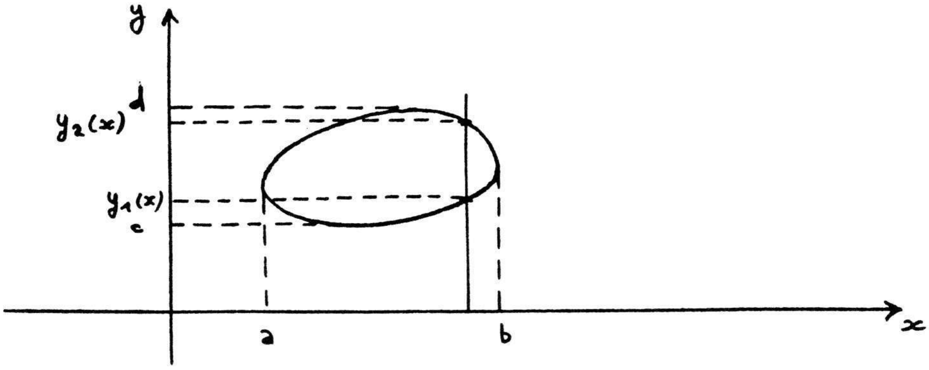
INTEGRALES MULTIPLES

Nota : L'espace $\mathbb{R}^n$ (n = 2 ou 3) sera dans ce chapitre rapporté à un repère cartésien orthonormé fixe. On suppose connu la définition et les propriétés des intégrales multiples.

1) Calcul des intégrales doubles et triples, formule de Fubini.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ intégrable ;



Si $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dxdy$

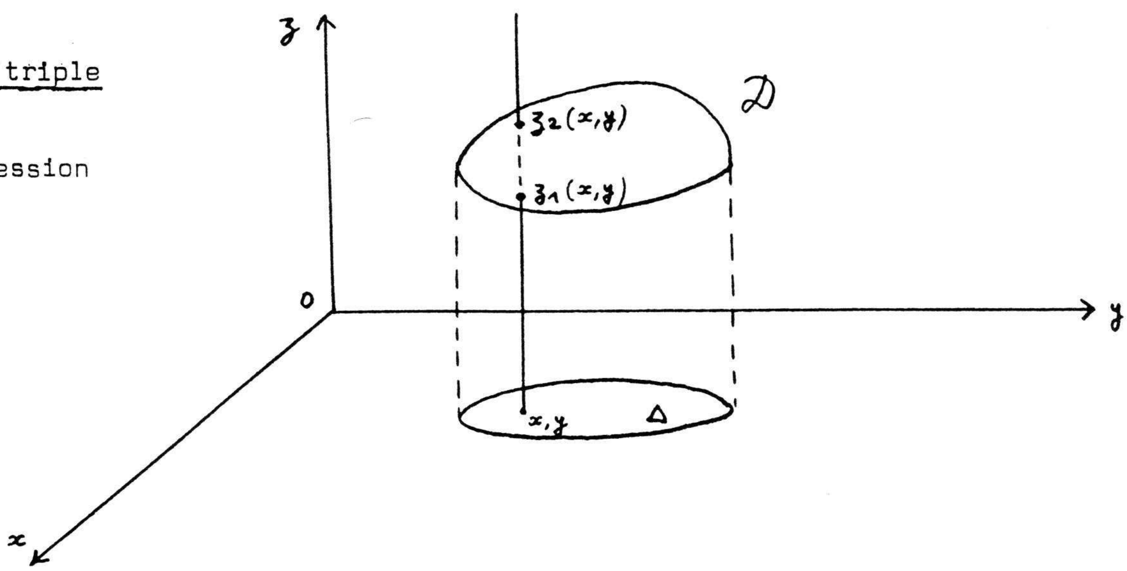
alors on a :

$$I = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy$$

Ce qui exprime la formule de Fubini

Intégrale triple

1ère expression



Soit $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$, f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ intégrable soit Δ la projection de $\mathcal{D}$ sur xoy parallélement à oz

Une parallèle à l'axe oz coupe le plan xoy au point $(x, y, o) \in \Delta$ et coupe le bord de $\mathcal{D}$ en deux points de cotes

$z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$, alors si $I = \iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

on a :

$$I = \iint_{\Delta} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

2ème expression :

Les plans de cote z $(a \leq z \leq b)$ coupent $\mathcal{D}$ suivant des domaines qui se projettent sur le plan xoy en des domaines notés $\Delta(z)$.

Et alors :

$$I = \int_a^b \left(\iint_{\Delta(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz$$

2) <u>Changement de variable dans une intégrale multiple.</u>

- Soit $\mathcal{D}$ un domaine du plan des x, y et f une fonction scalaire définie sur $\mathcal{D}$, on considère un changement de coordonnées (ou changement de variable) défini par :

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

tel que (u, v) décrit Δ, (x, y) décrit $\mathcal{D}$. Alors on a :

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v))\, |J|\, du\, dv.$$

ou $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ jacobien de la transformation.

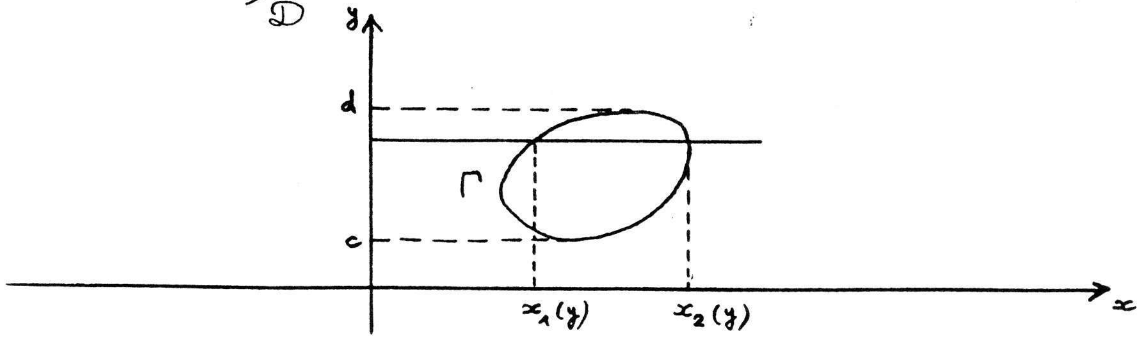
- Dans le cas a trois variables on aurait

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Delta} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |J|\, du\, dv\, dw$$

ou $J = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$

- Démonstration

évaluons $I_1 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy$



Appliquons à I_1 la formule de Fubini

$$I_1 = \int_c^d dy \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \right] = \int_c^d \left[Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y) \right] dy$$

et l'on voit que quand y varie de c à d

$$I_1 = \int_{\Gamma} Q(x,y) \, dy \qquad \text{(où } \Gamma \text{ est orientée dans le sens trigonométrique).}$$

Par un calcul analogue on montre que :

$$I_2 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_{\Gamma} P \, dx$$

d'où

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = I_1 - I_2 = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy$$

Corollaire :

Soit $\omega = \mathbb{U} . dM$ une forme différentielle de classe C^1 définie sur un domaine $\mathcal{D}$. Une condition nécessaire pour que ω soit exacte (ou que le champ de vecteurs $\mathbb{U}$ dérive d'un potentiel) est que :

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy = 0 \quad \text{Pour toute courbe } \Gamma \text{ contenue dans } \mathcal{D}.$$

Contre exemple :

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{définie } (x,y) \neq (o,o)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

Or $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = 2\pi \neq 0$ (si Γ cercle de centre O de rayon 1)

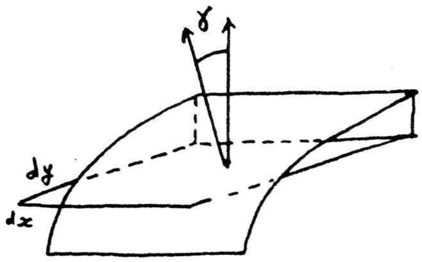
Or P et Q ne sont pas de classe C^1 à l'intérieur de Γ

Intégrale de surface

4.a) Aire d'une portion de surface.

Soit Σ une portion de surface de classe C^1, Σ se projette sur le plan xoy en le domaine Δ. Soit n la normale unitaire à Σ.
Sur Δ considérons un élément d'aire dx dy, il provient de la projection d'un élément d'aire dS de Σ,

Soit γ l'angle (e_z, n) on a :



$$dS \cos\gamma = dx\,dy \qquad \text{d'où } dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

et donc =

$$\boxed{\text{aire de } \Sigma = |\Sigma| = \iint_\Delta \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}}$$

Supposons que M (u,v) soit la représentation paramétrique de Σ.

Soient $e_u = \frac{\partial M}{\partial u}$ et $e_v = \frac{\partial M}{\partial v}$ deux vecteurs tangents à Σ en M.

L'aire du parallélogramme infinitésimal dont les cotés sont $e_u\,du$ et $e_v\,dv$ est donnée par :

$$|e_u\,du \wedge e_v\,dv| = \left|\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right| du\,dv$$

Or $\left| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$

avec $J_1 = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$; $J_2 = \frac{D(x,z)}{D(u,v)}$; $J_3 = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$

et on a :

$$\boxed{|\Sigma| = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv}$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine de paramétrisation en (u, v) de Σ.

Intégrale de surface - flux d'un champ de vecteurs

Définition :

Soient Σ une portion de surface paramétrée en (u, v) sur le domaine $\mathcal{D}$, et f(M) (ou f(x,y,z) une fonction scalaire de trois variables).

i) On appelle intégrale de surface de f sur Σ et on note :

$$I = \iint_{\Sigma} f(M)\, dS = \iint_{\mathcal{D}} f(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv$$

ii) Soient U un champ de vecteurs de composantes (P, Q, R) et n un vecteur normal unitaire à Σ de composantes

$$\left(\frac{J_1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} ,\ \frac{J_2}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} ,\ \frac{J_3}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \right)$$

On appelle flux de U au travers de Σ et on note :

$$\iint_{\Sigma} U \cdot n\, dS = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^3}} (PJ_1 + QJ_2 + RJ_3) \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du dv$$

soit : :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} U \cdot n\, dS = \iint_{\mathcal{D}} (PJ_1 + QJ_2 + RJ_3)\, du dv}$$

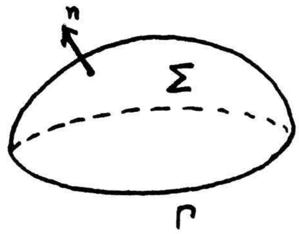
- Formule de Stokes

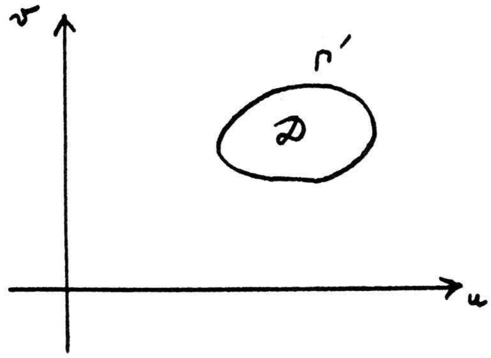
Proposition :

Soit Σ une surface limitée par une courbe fermée Γ (toutes deux de classe C^2) et n un vecteur normal unitaire à Σ. Soit aussi un champ de vecteurs U de classe C^1 alors :

$$\boxed{\int_{\Gamma} U \cdot dM = \iint_{\Sigma} \text{rot}\, U \cdot n\, dS}$$

La circulation de U sur Γ est égale au flux de son rotationnel sur une surface Σ s'appuyant sur Γ.





Soit $\mathcal{D}$ le domaine de paramétrisation de Σ et Γ' la courbe limitant $\mathcal{D}$,

U a comme composantes (X, Y, Z). Evaluons l'intégrale curviligne

$$I = \int_{\Gamma} U \cdot dM = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad (\Gamma \text{ étant orientée})$$

Ecrivons en fonction des (u, v)

$$I \int_{\Gamma'} (X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u})\, du + (X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial y}{\partial v})\, dv$$

On va appliquer à I la formule de Riemann dans le plan des u, v

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial u} (X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u}) \right] du dv$$

Développons la partie sous le signe somme

Termes en X

$$\frac{\partial}{\partial u} (X \frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (X \frac{\partial x}{\partial u}) = \frac{\partial x}{\partial v} \left[\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right] + X \frac{\partial^2 x}{\partial uv}$$

$$- \frac{\partial x}{\partial u} \left[\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right] - X \frac{\partial^2 x}{\partial vu}$$

En utilisant le théorème de Schwarz et en regroupant les termes on a :

$$\frac{\partial}{\partial u} (X \frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (X \frac{\partial x}{\partial u}) = \frac{\partial X}{\partial y} \left[\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right] + \frac{\partial X}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right]$$

et donc on reconnait

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial X}{\partial z} J_2 - \frac{\partial X}{\partial y} J_3$$

- Termes en y ; on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(Y\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(Y\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{\partial Y}{\partial x} J_3 - \frac{\partial Y}{\partial z} J_1$$

- termes en z ;

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(Z\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(Z\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial Z}{\partial y} J_1 - \frac{\partial Z}{\partial x} J_2$$

En sommant et regroupant les termes on a :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \left[J_1 \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + J_2 \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + J_3 \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \right] du\, dv$$

Ce qui n'est autre que :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, U \cdot n\, dS$$

- <u>Formule d'Ostrogradski</u>

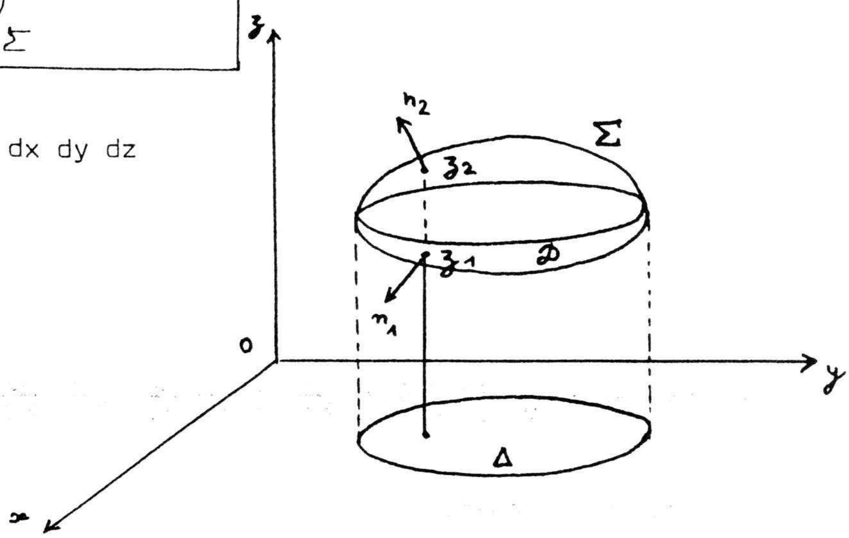
Soient Σ une surface close (orientable) sans point double, U (P,Q,R) un champ de vecteurs, de classe C^1, défini dans $\mathcal{D}$ domaine intérieur à Σ, ainsi que sur Σ, n le vecteur normal unitaire extérieur à $\mathcal{D}$.

Alors en notant dV = dx dy dz l'élément de volume on a :

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\, U\, dV = \iint_{\Sigma} U \cdot n\, dS}$$

Démonstration :

Considérons $I = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$



$\mathcal{D}$ se projette sur xoy en Δ, une parallèle à z coupe Σ en z_1 et z_2

Appliquons la formule de Fubini à I

$$I \iint_{\Delta} dx\, dy \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) = \iint_{\Delta} \left[R\,(x,y,z_2\,(x,y)) - R\,(x,y,z_1(x,y)) \right] dxdy$$

Si les composantes de n sont (a,b,c)

on a alors :

c d S = dx dy sur Σ_2 et c d S = − dx dy sur Σ_1

d'où

$$I = \iint_{\Sigma} R\,(x,\, y,\, z)\;\; c\; d\; S$$

En effectuant un calcul analogue pour :

$$J = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x}\; dx\; dy\; dz \quad \text{et} \quad K = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y}\; dx\; dy\; dz$$

Il vient :

$$I + J + K = \iiint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\; dy\; dz = \iint_{\Sigma} (Pa + Qb + Rc)\;\; dS$$

Cequi démontre la proposition

- Corollaire : Formule de Green

Soient, $\mathcal{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^3$, limité par une surface Σ sans bord, orientable, de classe C^1, n vecteur unitaire normal extérieur à $\mathcal{D}$, et f et g deux fonctions de classe C^2 dans $\mathcal{D}$. On a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i)}\; \iiint_{\mathcal{D}} g\Delta f\;\; dV = -\iiint_{\mathcal{D}} \text{grad } f \,.\, \text{grad } g\; dV + \iint_{\Sigma} g\,\frac{\partial f}{\partial n} \\ \text{ii)}\; \iiint_{\mathcal{D}} (g\Delta f - f\Delta g)\; dV = \iint_{\Sigma} \left(g\,\frac{\partial f}{\partial n} - f\,\frac{\partial g}{\partial n}\right) dS \end{array}}$$

Démonstration :

On a l'identité , si U est un champ de vecteurs :

$$\text{div}\,(g\; U) = \overrightarrow{\text{grad}}\; g \;.\; U + g\; \text{div}\; U$$

En posant $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ il vient :

$$\text{div}\,(g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \overrightarrow{\text{grad}}\, g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f + g\, \Delta f$$

On intègre cette identité sur $\mathcal{D}$:

$$\iiint_{\mathcal{D}} \text{div}\,(g\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f)\, dV = \iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{grad}}\, g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, dV + \iiint_{\mathcal{D}} g\, \Delta f\, dV$$

en appliquant la formule d'Ostrogradski au membre de gauche :

$$\iint_{\Sigma} g\, (\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot n)\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{grad}}\, g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, dV + \iiint_{\mathcal{D}} g\, \Delta f\, dV$$

en remarquant que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot n = \dfrac{\partial f}{\partial n}$ on obtient i)

On applique i) en échangeant le rôle de f et g et on retranche, le terme

$\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\text{grad}}\, g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, f\, dV$ disparait et on obtient ii).