MARGERIT. D

ECOLE NATIONALE DU GENIE RURAL

DES EAUX ET DES FORETS

Centre de NANCY

FORMATION DES INGENIEURS DES TRAVAUX

Cours de Géométrie Vectorielle et d'Algèbre des Tenseurs

M. SERO-GUILLAUME

SEPTEMBRE 1983

CALCUL DIFFERENTIEL DANS $\mathbb{R}^3$

1) La notion de différentielle

- Introduction

Considérons une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, examinons quelques définitions équivalentes pour la notion de dérivée.

a) Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe, et si on pose :

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ on peut écrire :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{ou bien} \quad \underline{f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,\varepsilon(h)}$$

avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h $\to$ tend vers 0

b) d'où la nouvelle formulation

f est dérivable en x_0 s'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0 tels que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\,\varepsilon(h)$$

En général on pose $a = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0} = f'_x(x_0)$ et a est appellé dérivée de f en x_0

Remarquons que :

Si h varie et x_0 est fixé $y = ah + f(x_0)$ est l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en x_0, on approche donc une fonction par une fonction linéaire, de telle sorte que la différence soit un infiniment petit d'ordre supérieur à h.

D'où en généralisant cette notion on est conduit à :

1.1.) Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (n = 1, 2, 3 et p = 1, 2, 3).
Les bases dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ étant choisies, f est donnée par p fonctions scalaires (i e de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) dépendant de n variables.
Soit :

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \begin{cases} f_1 (x_1, \ldots\ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_p (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \end{cases}$$

$h = (h_1, \ldots\ldots, h_n)$ étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ on notera $|h|$ sa norme.

On dira que f est différentiable en $(x^\circ_1, \ldots\ldots, x^\circ_n)$, si il existe une application linéaire L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, une fonction $\varepsilon(h)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telles que :

$f(x^\circ_1 + h^\circ_1, x^\circ_2 + h_2, \ldots\ldots, x^\circ_n + h_n) = f(x^\circ_1, \ldots\ldots, x^\circ_n) + L(h) + |h|\varepsilon(h)$

avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand $|h| \to 0$

Remarquons que

L dépend de $(x^\circ_1, \ldots\ldots, x^\circ_n)$ et que $h \longrightarrow L(h)$ est linéaire (en h)

ε dépend aussi de $(x^\circ_1, \ldots\ldots, x^\circ_n)$ à priori.

Exemples :

Notons $X = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ et $h\ (h_1, \ldots\ldots, h_n)$.

i) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ constante.

$f(X) = A \qquad A = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$.

$f(X + h) = A$

et $f(X + h) - f(X) = 0$ d'où $L = 0$ (au sens de applications) et $\varepsilon = 0$

La différentielle de f est l'application nulle.

ii) soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ affine :

$f(X) = L(X) + B$ ou B est un vecteur constant et L une application linéaire.

$f(X + h) - f(X) = L(X + h) + B - (L(X) + B) = L(X + h) - L(X) = Lh$

La différentielle de f est alors sa partie linéaire L.

iii) Si on note (A, B) le produit scalaire de deux éléments de $\mathbb{R}^n$ considérons l'application $f(X) = |X|^2 = (X, X)$. de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Calculons sa différentielle.

$f(X + h) = (X + h, X + h) = (X, X) + 2(X, h) + (h, h)$

C'est-à-dire :

$f(X + h) = f(X) + 2(X, h) + |h|^2$

.../...

si X est fixé en $X°$ l'application $h \longmapsto L(X°, h)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Et si on pose $\varepsilon(h) = |h|$ l'application f est différentiable, sa différentielle L en $X°$ est l'application

$$L_{X°}(h) = 2(X°, h)$$

La différentielle d'une application f est notée souvent :

$Df_{X°}$ ou $f'_{X°}$ on écrit alors :

$$f(X° + h) - f(X°) = Df_{X°}(h) + |h|\,\varepsilon(h) = f'_{X°}(h) + |h|\,\varepsilon(h).$$

1.2.) Identification de la différentielle

On va travailler dans $\mathbb{R}^3$

a) Cas d'une fonction scalaire.

Si $f(x, y, z)$ est différentiable de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, Df est alors une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, or l'ensemble des formes linéaires d'un espace vectoriel est le dual de cet espace. Mais si on considère que $\mathbb{R}^3$ est euclidien l'ensemble de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ s'identifie à $\mathbb{R}^3$.

Considérons le cas général

Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, soit e_1, e_2, e_3 une base de $\mathbb{R}^3$ alors

$$h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3$$

$$L(h) = h_1 L(e_1) + h_2 L(e_2) + h_3 L(e_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i h_i$$

avec $a_i = L(e_i)$, ceci est l'expression la plus générale d'une forme linéaire ; déterminons les a_i

On a au point x_0, y_0, z_0

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{3} a_i h_i + |h|\,\varepsilon(h).$$

Cette relation doit être vérifiée pour tout h, choisissons $h = (h_1, 0, 0)$.

$$f(x_0 + h_1, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = a_1 h_1 + |h_1|\,\varepsilon(h_1).$$

soit encore :

$$\frac{f(x_0 + h_1, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h_1} = a_1 + \frac{|h_1|}{h_1}\,\varepsilon(h_1)$$

Or $\frac{|h_1|}{h_1}$ est borné donc $\frac{|h_1|}{h_1}\,\varepsilon(h_1) \longrightarrow 0$ quand $h_1 \longrightarrow 0$

L'expression de droite a une limite qui est a_1, donc l'expression de gauche aussi, qui est la dérivée de l'application partielle à une variable

$$x \longmapsto f(x, y_0, z_0) \qquad \text{en } x = x_0$$

On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad f_{,1}(x_0, y_0, z_0)$$

et on l'appelle dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0, y_0, z_0).

En opérant de même pour les deux autres variables il vient

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, h_3 + |h|\, \mathcal{E}(h).$$

<u>Notations</u> :

i) Si on pose : $h = (dx, dy, dz)$ dx, dy, dz étant des infiniments petits dits du 1er ordre et $f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) - f(x_0, y_0, z_0) = df$.

On note souvent

(1) $$\boxed{Df\,(dx, dy, dz) = df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz}$$

Pour $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$

Et on confond l'application avec le résultat de l'application en appellant df différentielle de f.

Remarquons que le terme $(h)\, \mathcal{E}\, |h|$ contient des infinitésimaux d'ordre supérieur (éventuellement dx^2, $dxdy$, etc.....)

ii) Si f est différentiable sur une partie Ω de $\mathbb{R}^3$ on note alors :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \quad \text{sans préciser le point,}$$

et si on utilise la convention d'Einstein qui consiste à sommer deux indices répétés on note :

$$df = f_{,i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$ (après numérotation convenable des variables).

iii) Si on suppose $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base $(e_i)_{i=1,2,3}$ orthonormée

On a alors si $\overrightarrow{OM} = x_i\, e_i$

$$\overrightarrow{dM} = dx_i\, e_i$$

On note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, e_i$ vecteur gradient de f

et on a

(2) $$\boxed{\begin{array}{l} df = (\overrightarrow{\text{grad}}\, f, \overrightarrow{dM}) \\ \hline df = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{dM} \end{array}}$$ (produit scalaire)

<u>Remarque</u>

La relation (1) est toujours valable, tandis que la relation (2) n'a de sens que si la base est orthonormée.

b) Cas d'une fonction vectorielle - Matrice Jacobienne -

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, représentée dans la base (e_i) par

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} f_i(x, y, z)\, e_i$$

Dans ce cas la différentielle doit être une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui est représentée par une matrice dans la base (e_i), soient (a_{ij}) les coefficients de cette matrice.

Remarquons tout d'abord que :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) = \sum_{i=1}^{3} (f_i(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) -$$

$$f_i(x_0, y_0, z_0))\, e_i$$

Ce qui signifie que

$$df = \sum_{i=1}^{3} df_i\, e_i$$

et donc pour $i = 1, 2, 3$

$$f_i(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) - f_i(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, h_j + |h|\, \varepsilon_i(h)$$

On va procéder comme précédemment, c'est-à-dire en choisissant des h particuliers.

$h = (h_1, 0, 0)$

- $i = 1$

$$f_1(xo + h_1, yo, zo) - f_1(xo, yo, zo) = a_{11} h_1 + |h_1|\, \varepsilon_1(h).$$

d'où $a_{11} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0, z_0)$

- $i = 2$

$$f_2(xo + h_1, yo, zo) - f_2(xo, yo; zo) = a_{21} h_1 + |h_1|\, \varepsilon_2(h).$$

d'où $a_{21} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0, y_0, z_0)$.

- $i = 3$

$$f_3(xo + h_1, yo, zo) - f_3(xo, yo, zo) = a_{31} h_1 + |h_1|\, \varepsilon_3(h).$$

d'où $a_{31} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_0, y_0, z_0)$.

En choisissant $h = (0, h_2, 0)$ on identifierait les élèments de la deuxième colonne, puis ceux de la troisième en prenant $h = (0, 0, h_3)$. On obtient donc :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (x_1 = x,\ x_2 = Y,\ x_3 = z)$$

Proposition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit dans la base (ei)

$$f = \sum_{i=1}^{3} f_i \, e_i = f_i \, e_i$$

Alors si f est différentiable, la différentielle de f est représentée dans la base (ei) par une matrice de coefficients (a_{ij}) (i indice de ligne, j indice de colonne) avec :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = f_{i,j}$$

et on a

(3) $$\boxed{df = df_i \, e_i}$$

La matrice de coefficients (a_{ij}) est appellée matrice gradient de f ou matrice Jacobienne - on note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

et donc

(4) $$\boxed{df = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f \cdot \overrightarrow{dM}}$$

$\overrightarrow{dM}$ est ici le vecteur colonne $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$, le produit étant pris au sens du produit matriciel

On notera aussi :-

(5) $$\boxed{df_i = f_{i,j} \; dx_j}$$

Définition :

Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, sa différentielle est alors une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, qui peut être représentée par une matrice carrée n x n (l'espace de départ et d'arrivée étant rapportés à une même base). Le déterminant de cette différentielle s'appelle le Jacobien de f. On note J_f.

$$J_f = \text{dét} \; (\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f) = \text{dét} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

On note aussi :

$$J_f = \frac{D\,(f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)}{D\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)}$$

Remarques :

i) Si on considère maintenant une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

$$f = \sum_{i=1}^{p} f_i \, (x_1, \ldots\ldots, x_n) \, e_i$$

la différentielle de f est alors représentée dans la base (ei) (On considère alors $\mathbb{R}^{\inf(n,p)}$ comme sous espace de $\mathbb{R}^{\sup(n,p)}$) par une matrice à p lignes et n colonnes de coefficients (a_{ij}) avec :

$1 \leq i \leq p$

$1 \leq j \leq n$ $\qquad a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Les relations (3), (4), (5) subsistent encore.

ii) La relation (3) justifie l'écriture de $\overrightarrow{dM} = dx_i \, e_i$.
En effet si on considère l'application qui à (x_1, x_2, x_3) associe le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x_i e_i$ on a alors :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{dM} = dx_i e_i$$

iii) Dans certains cas pour étudier la différentiabilité d'une fonction on doit revenir à la définition générale car :

- Si une fonction f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ en un point , f n'est pas nécessairement différentiable en ce point.
- Cependant si tous les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent et sont continues en ce point, la fonction f est alors différentiable. (Cette condition est suffisante).

1.3.) "Algèbre" des différentielles

i) Linéarité

Si f et g sont des fonctions différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, λ et μ sont deux scalaires alors

La fonction $h = \lambda f + \mu g$ est différentiable et on a :

$$\begin{cases} dh = \lambda \, df + \mu \, dg \\ \overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, h = \lambda \, \overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, f + \mu \, \overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, g \end{cases}$$

ii) Composition des applications

Soient f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et g de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, deux fonctions différentiables, la fonction composée $h = g \circ f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ est différentiable et on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, h = grad \, (g \circ f) = \overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, g \Big|_f \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{grad}} \, f \Big|_x} \qquad (6)$$

Le produit étant pris au sens du produit de matrices (ou de la composition des applications)

Ceci exprime la relation de dérivation suivante :

$$h_i\,(x_1, \ldots\ldots, x_n) = g_i\,(f_1\,(x_1, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots, f_p\,(x_1, \ldots\ldots, x_n)).$$

$$\boxed{\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \left(= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\,\bigg|_{\,y_k = f_k} \right)} \tag{7}$$

Où on a posé $y_k = f_k\,(x_1, \ldots\ldots, x_n)$.

Corollaire :

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, différentiable et inversible soit f^{-1} son application inverse.

Alors :

$f(x) = x^3$

a) $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f$ est une matrice inversible

si ~~b)~~ f^{-1} est différentiable alors

~~c)~~ et $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f \,.\, \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\,(f^{-1}) = I$ (matrice identité de $\mathbb{R}^n$)

C'est-à-dire que $(\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f)^{-1} = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\,(f^{-1})$

En effet on a :

$f \circ f^{-1} = id$ identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

avec $id\,(x_1, \ldots\ldots, x_n) = x_i e_i$

Or $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, id = I$ (à vérifier)

d'où en différentiant la relation et en tenant compte de (6).

$\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\, f \,.\, \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\,(f^{-1}) = I$ ce qui démontre a), b), c).

Cas particuliers de (6), et exemples.

a) $f\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (par exemple $n = 3$).

$g \circ f\,(x_1, x_2, x_3) = g\,(f\,(x_1, x_2, x_3))$. Posons $y = f(x_1, x_2, x_3)$.

On a alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(g \circ f) = \frac{dg}{dy}\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f\ \bigg|_{\,y=f}$$

Exemple

$g(y) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{y}$ avec $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = f(x_1, x_2, x_3)$.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\, f &= 2x_i\, e_i \\ \frac{dg}{dy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{grad}\,(g \circ f) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\,(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3).$$

ce qu'on peut vérifier directement, en calculant $\dfrac{\partial (g_o f)}{\partial x_i}$

b) $f \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $g \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$h = g \circ f \ \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R} \quad f(t) = x_i(t)\, e_i$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \ g = g(x_1, x_2, x_3)$.

alors $h(t) = g\,(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{grad}}\ g = \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \quad e_i \\ \dfrac{df}{dt} = \dfrac{dx_i}{dt} \quad e_i \end{array} \right.$$

$$\text{et } \frac{dh}{dt} = \frac{df}{dt} \ . \ \overrightarrow{\text{grad}}\ g = \frac{dx_i}{dt} \ \frac{\partial g}{\partial x_i} \Bigg|_{x_i = x_i(t)}$$

c) $f \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$; $h \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Posons $x = f\,(x_1, x_2, x_3)$, $y = g(x_1, x_2, x_3)$ et considérons la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = h\,(x,y) = h\,(f\,(x_1, x_2, x_3), g\,(x_1, x_2, x_3))$$

Alors

$$d\varphi = \frac{\partial h}{\partial x} \ df + \frac{\partial h}{\partial y} \ dg$$

$$d\varphi = \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \ dx_i \right) \Bigg|_{x = f} + \frac{\partial h}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \ dx_j \right) \Bigg|_{x_j = g}$$

d) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
On considère $h = g \circ f$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ composée de f et de g.
Alors le Jacobien de h est le produit des jacobiens de g et f ce qu'on peut noter par :

$$Jh = Jg \ . \ Jf \quad \text{ou bien}$$

$$h\,(x_1, \ldots, x_n) = g\,(f_1\,(x_1, \ldots, x_n), f_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

$$\frac{D\,(h_1, \ldots, h_n)}{D\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D\,(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D\,(f_1, f_2, \ldots, f_n)} \ . \ \frac{D\,(f_1, \ldots\ldots, f_n)}{D\,(x_1, \ldots\ldots, x_n)}$$

Cette relation est obtenue en prenant le déterminant des deux membres de la relation (6).

1.4.) Dérivées d'ordre supérieur

Considérons une fonction de 3 variables, $f(x_1, x_2, x_3)$; $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est encore une fonction de 3 variables, on peut donc considérer les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ par rapport aux 3 variables x_1, x_2, x_3 qui sont :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) ; \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) ; \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \quad \text{qu'on note :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1}$$

ou bien $f''_{x_1^2}$, $f''_{x_2x_1}$, $f''_{x_3x_1}$

ou bien $f,_{11}$; $f,_{21}$; $f,_{31}$

D'une façon générale, soit une fonction f de n variables $x_1, \ldots\ldots, x_n$ on peut considérer les dérivées partielles k ièmes de f qu'on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i1}\, x_{i2} \ldots x_{in}}$$ où les $x_{i1}, \ldots\ldots, x_{in}$ sont pris parmis les variables $x_1, \ldots\ldots, x_n$.

Définition :

Une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$, si elle admet des dérivées partielles 1^{ere}, $2^{ème}, \ldots\ldots, k^{ième}$ par rapport à toutes les variables, les dérivées $k^{ième}$ étant des fonctions continues par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

Exemple :

Si f est une fonction de 3 variables x_1, x_2, x_3. Il y a 3 dérivées partielles du 1er ordre.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} ; \frac{\partial f}{\partial x_2} ; \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

9 dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3}$$

Il y a 27 dérivées partielles troisième

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} , \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 x_2 x_1} , \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 x_3 x_1} \quad \text{etc.....}$$

Il y a 3^k dérivées partielles $k^{ième}$

En général chaque fonction de n variables à n^k dérivées partielles kième.

Il se pose cependant un problème a-t-on par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 x_1^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 x_2 x_3} \quad ?$$

Théorème de Schwarz

Si une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$, on peut intervertir l'ordre de dérivation jusqu'aux dérivées kième

Plus simplement si une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ les dérivées "croisées" sont égales c'est-à-dire :

$$f_{,ij} = f_{,ji} \qquad \forall_{i,j} \qquad i,j = 1, 2, \ldots, n$$

1.5.) Analyse vectorielle

Dans ce paragraphe on va travailler dans $\mathbb{R}^3$ considéré comme euclidien et donc muni du produit scalaire habituel. En tant qu'espace de départ et d'arrivée pour les fonctions $\mathbb{R}^3$ sera muni d'une base (ei) orthonormée directe fixe si il est considéré comme espace vectoriel ou d'un repère fixe orthonormé direct (O, e_1, e_2, e_3) si il est considéré comme espace affine.

Remarque :

On appelle champ de vecteurs une application d'un espace affine réel A de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel), à un point on fait correspondre un vecteur : champ de vitesse, champ de force, champ magnétique etc...

Le modèle de l'espace physique est un espace affine (et non pas un espace vectoriel) mais pour ne pas alourdir l'exposé nous confondons souvent A et $\mathbb{R}^3$; (comme nous l'avons fait précédemment) ; il faut cependant être prudent, cet abus de langage peut conduire à des erreurs.

L'identification se fait comme suit :

Soit A muni du repère (O, e_1, e_2, e_3) ((e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$)

à un point M de cet espace on associe le vecteur position de M, (vecteur de $\mathbb{R}^3$)

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Cette identification ne se fait que si O est un point fixe.

Définition :

On appelle forme différentielle de degré 1 une forme linéaire en les variables différentielles dx_i (plus exactement une application de A qui à tout point de A fait correspondre une forme linéaire en les variables différentielles dx_i) ; soit w cette forme on a :

$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i$$

Autre notation : Considérons $V(x_1,\ldots\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_1,\ldots\ldots,x_n)\, e_i$

Le champ de vecteur, on peut écrire alors :

$\omega = \mathbf{V} \cdot dM$ produit scalaire

On dit que la forme ω est de classe c^k si le champ de vecteurs V est de classe c^k (chacun des p_i est une fonction de classe c^k).

Problème :

Soit ω une forme différentielle, existe-t-il une fonction scalaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\omega = df$ ou bien $V = \text{grad } f$

Si $\omega = df$ on dit que ω est une forme différentielle exacte ou bien que le champ de vecteur V qui la définit dérive d'un potentiel (scalaire)

Théorème : $(n = 3)$

Pour que la forme différentielle ω de classe $\mathscr{C}^1$ soit exacte (ou que le champ V qui la définit dérive d'un potentiel) il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le potentiel scalaire dont dérive V est alors défini à une constante près.

Démonstration :

On donne la démonstration dans le cas $n = 2$

a) Si ω est exacte alors il existe f tel que $\forall\, dx, dy$ on ait :

$$\omega = P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = df$$

d'où $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ si ω est de classe $\mathscr{C}^1$ f est de classe $\mathscr{C}^2$ d'après le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

La condition est donc nécessaire.

b) <u>Montrons qu'elle est suffisante</u>

Supposons $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et cherchons si il est possible de déterminer f

telle que $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ on doit donc intégrer ce système d'équations aux dérivées partielles. Or on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \Longleftrightarrow f(x, y) = \int_0^x P(t,y)\,dt + \varphi(y)$$

Posons $\int_0^x P(t,y)\,dt = R(x, y)$

Si f existe on a $f(x, y) = R(x, y) + \varphi(y)$ où φ est inconnue et ne <u>doit</u> dépendre que de y.

Mais on doit aussi avoir $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ or $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{d\varphi}{\partial y}$ et donc

$\int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y)dt + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y)$. On obtient l'équation différentielle

en φ $\quad \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y) - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y)\,dt$

$$\text{d'où } \varphi = \int_0^y \left(Q(x, z) - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial z}(t,z)\,dt\right) dz + C$$

où C est une constante

et donc la condition de possibilité est que φ ne dépende que de y.

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y Q(x, z) - \int_0^x \frac{\partial P}{\partial z}(t, z)\,dt\right) dz\Big) = 0$$

Soit encore :

$$\int_0^y \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, z) - \frac{\partial P}{\partial z}(x, z)\right] dz = 0 \qquad \forall Y$$

Comme $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}$ est continue $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, z) = \frac{\partial P}{\partial z}(x,z)$

et donc la condition de possibilité est remplie, φ existe, la condition est suffisante.

<u>Définition</u> :

Soit V un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ défini par ses composantes (P,Q,R) dans une base orthonormée directe (ei), on appelle rotationel de V le champ défini par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ V = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3$$

Ce qu'on peut encore écrire à l'aide du déterminant symbolique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

On a alors le

<u>Théorème</u> :

La C N S pour qu'un champ de vecteur V de classe $\mathcal{C}^1$ dérive d'un potentiel scalaire est que

(8) $$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ V = 0}$$

On dit que V est irrotationnel.

- Divergence d'un champ -

Soit V un champ de vecteur de classe C^1, considérons l'application linéaire L qui est sa différentielle, on peut considérer la trace de cette application linéaire (qui est un invariant de L).
On sait que la trace d'une application linéaire est la somme des élèments diagonaux de la matrice représentant cette application dans une base.
Cette trace est appellée divergence de V, on note :

(9) $$\boxed{\text{div } V = \text{trace } (\overline{\overline{\text{grad}}}\ V)}$$

Ce qui s'écrit encore, si les composantes de V sont (P, Q, R)

$$\text{div } V = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$$

En notation indicielle

$$\text{div } V = V_{i,i} \qquad \text{avec } V_1 = P,\ V_2 = Q,\ V_3 = R$$

Laplacien

a) Laplacien scalaire :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on écrit Δf (ou laplacien de f) l'opérateur défini par :

(10) $$\boxed{\begin{array}{l} \Delta f = \text{div } (\overrightarrow{\text{grad}}\ f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta f = f_{,ii} \end{array}}$$

laplacien vectoriel

Si par contre V est un champ vectoriel de classe $\mathcal{C}^2$ on pose

(11) $\boxed{\Delta V = \Delta P\, e_1 + \Delta Q\, e_2 + \Delta R\, e_3}$

$$\Delta V = V_{i,\,jj}\ e_i$$

Divergence d'un champ de matrice

Soit $A = (a_{ij}(x_1, x_2, x_3))$ une matrice dont les coefficients sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $1 \leq i \leq 3$ $1 \leq j \leq 3$

Supposons que $A = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\ V$

Or on a :

$\Delta V = (V_{i,j})_{,j}$ les composantes de ΔV sont formées en prenant la divergence de chaque vecteur ligne de $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\ V$, on pose alors

$$\Delta V = \text{div}\ (\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\ V) \quad \text{et on définit}$$

div A = vecteur de composantes $(a_{ij})_{,j}$, ce vecteur est obtenu en prenant la divergence des lignes de A.

Interprétation du rotationnel d'un champ.

Tout d'abord considérons le lemme suivant :

- A toute matrice antisymétrique w on peut associer un vecteur Ω tel que $\forall$ X vecteur de $\mathbb{R}^3$ on ait :

$$w \cdot X = \Omega \wedge X \quad (w.\ X \text{ produit matriciel}).$$

Démontration

Dire que w est une matrice 3 x 3 antisymétrique c'est dire que ${}^t w = -w$.

Donc la forme la plus générale de w est :

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on considère le vecteur $\Omega = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ on remarque que pour tout

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ on a $w \cdot X = \Omega \wedge X$.

Le vecteur Ω s'appelle le vecteur adjoint de w . On note

$$\Omega = \text{adj}\ (w).$$

Soit maintenant V un champ de vecteurs posons :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V = \mathcal{E} + w$$

où

$$\mathcal{E} = \frac{{}^t\overrightarrow{\overrightarrow{grad}} V + \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V}{2} \qquad \text{partie symétrique de } \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V$$

$$w = \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V - {}^t\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V}{2} \qquad \text{partie antisymétrique de } \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V$$

(${}^t\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V$ est la matrice transposée de la matrice $\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V$)

On remarque alors (en faisant les calculs) que

$$\boxed{\text{rot } V = 2 \text{ adj } (w) = \text{adj } (\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V - {}^t\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V)} \tag{12}$$

Cette relation est alors valable pourvu que $\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, V$ soit exprimé dans une base orthonormée directe.

1.6.) Rappels de géométrie différentielle

- Dérivée suivant une direction ou suivant un champ de vecteur.

Soit une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^p$ (p = 1, 2, 3).

X_o un point de $\mathbb{R}^3$, V un champ de vecteurs défini en X_o.

Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par :

$$t \longmapsto \varphi(t) = f(X_o + t\, V(X_o))$$

On appelle alors dérivée de f en X_o suivant V l'expression

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(X_o + tV(X_o)) - f(X_o)}{t}$$

Ce qu'on note $D_V\, f(X_o)$ ou $\frac{\partial f}{\partial V}(X_o)$

Proposition :

Dans les conditions précédentes on a :

a) $D_V\, f(X_o) = \overrightarrow{grad}\, f \cdot V$ (produit scalaire) si $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

b) $D_V\, f(X_o) = \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\, f \cdot V$ (produit matriciel) si $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Ce résultat est une conséquence directe de la formule de dérivation composée. On remarque que si on choisit $V = e_i$ un vecteur de base on a :

$$\frac{\partial f}{\partial e_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Si le champ de vecteur est défini comme l'ensemble des vecteurs normaux à une surface Σ, on appelle dérivée de f suivant n, dérivée normale de f et on note

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot n$$

Proposition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ (toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$) les deux propositions suivantes sont équivalentes.

i) $f\big|_{\Sigma} = \text{cte}$ (f est constante sur Σ).

ii) $\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot T = 0 & \forall\ T \text{ vecteur tangent à } \Sigma \\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f \text{ est normal à } \Sigma \end{cases}$

Soit Γ paramétrée par $x_i(t)$ une courbe tracée sur Σ.

alors $f\big|_{\Sigma} = \text{cte} \iff \varphi(t) = f(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)) = \text{cte}$

et donc il est équivalent de dire :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \frac{dx_i}{d\,t}\Bigg|_{x_i = x_i(t)}$$

Or le vecteur T de composante $\dfrac{dx_i}{d\,t}$ est tangent à Γ donc à Σ

d'où $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0 \iff \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot T = 0$ comme Γ est quelconque T est quelconque d'où la proposition.

- Représentation des surfaces, vecteur normal -

Il existe deux modes de représentation des surfaces

Par une relation $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ (ou $x_3 = g(x_1,\ x_2)$ par exemple). C'est la représentation cartésienne.

Par un paramètrage à deux variables :

$$M(u_1,\ u_2) = \begin{cases} x_1(u_1,\ u_2) \\ x_2(u_1,\ u_2) \\ x_3(u_1,\ u_2) \end{cases} \quad \text{représentation paramètrique .}$$

$(u_1,\ u_2)$ appartiennent à un domaine Δ de $\mathbb{R}^2$.

- Vecteur normal unitaire

a) en représentation cartésienne

soit Σ une surface d'équation cartésienne $f(x_1, x_2, x_3) = 0$
alors d'après la proposition précédente, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est normal à Σ
et donne :

un vecteur normal unitaire à Σ est :

$$n = n_i\, e_i \quad \text{avec} \quad n_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big/ \left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right|$$

$$\left|\text{grad } f\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2}$$

b) représentation paramétrique

Considérons une surface Σ de représentation paramètrique
$M(u_1, u_2)$.

si u_2 est fixé égal à u_2° le point $M(u_1, u_2^\circ)$ décrit une courbe Γ_1 inscrite sur Σ, de même pour la courbe Γ_2 de paramètrage $M(u_1^\circ, u_2)$

Les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial M}{\partial u_2}$ sont alors tangents à Γ_1 et Γ_2 et donc tangents à Σ; d'où le vecteur $\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}$ est normal à Σ

D'où un vecteur normal unitaire à Σ est donné par :

$$n = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2} \Big/ \left|\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right|$$

or

$$\frac{\partial M}{\partial u_1} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \end{array} \right. \qquad \frac{\partial M}{\partial u_2} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} - \frac{\partial x_3}{\partial u_1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} = J_1 = \frac{D(x_2, x_3)}{D(u_1, u_2)} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} = J_2 = \frac{D(x_1, x_3)}{D(u_1, u_2)} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_2}{\partial u_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = J_3 = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)} \end{array} \right.$$

Avec les notations ci dessus on a :

$$n = \frac{1}{\sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}} \begin{cases} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{cases}$$

On remarque que J_1, J_2, J_3 sont bien les jacobiens des applications partielles.

1.7.) Changement de coordonnées

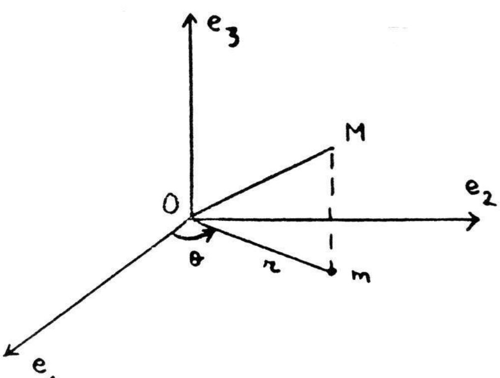
Dans ce qui précède nous avons paramétré l'espace par un mode "cartésien", en associant à chaque point M son vecteur position OM, et une base étant choisie on a : $OM = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ O et les vecteurs e_i sont fixes. On voit, cependant que la position du point M peut être paramétrée par d'autres systèmes de coordonnées (coordonnées cylindriques, sphériques etc...). Les coordonnées cartésiennes x_i sont alors fonctions de paramètres u_1, u_2, u_3. On a réalisé ce qu'on appelle alors un changement de coordonnées, on associera au point M les nouvelles coordonnées u_1, u_2, u_3.

EX Dire que le point M admet comme coordonnées polaires (r, θ, z) c'est dire que $OM = r\cos\theta\, e_1 + r\sin\theta\, e_2 + z\, e_3$

donc que

$$x_1(r, \theta, z) = r\cos\theta, \quad x_2(r, \theta, z) = r\sin\theta, \quad x_3(r, \theta, z) = z$$

Avec la représentation



$(e_1, om) = \theta$

$Om = r$

avec :

$\theta \in [0, 2\pi[$, $\quad r \in]0, +\infty[$, $\quad z \in]0, +\infty[$

Dans cet exemple (et en général) le triplet (r, θ, z) ne varie pas dans $\mathbb{R}^3$ tout entier, et l'on ne paramètre pas $\mathbb{R}^3$ tout entier.
On distinguera l'espace des paramètres en notant $(u_1, u_2, u_3) \in \underline{\mathbb{R}}^3$

Définition :

Soit φ une fonction de M partie de $\underline{\mathbb{R}}^3$ dans Ω partie de $\mathbb{R}^3$

$$(u_1, u_2, u_3) \xrightarrow{\varphi} (x_1(u_1, u_2, u_3), x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3))$$

telle que :

φ est bijective de M sur Ω, de classe C^1

.../...

φ^{-1} est aussi de classe C^1 (on aura donc Dét $(\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi) \neq 0$).

On dit que φ est un difféomorphisme, on dit aussi que φ est une changement de coordonnées.

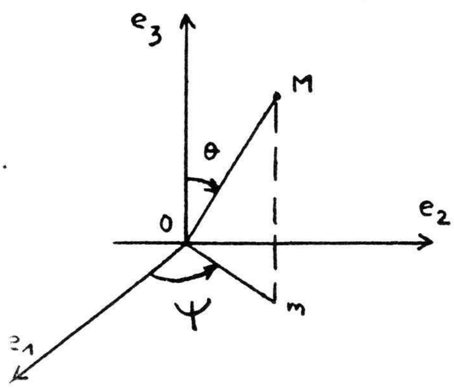
On notera $M(u_1, u_2, u_3)$, les u_i étant les nouvelles coordonnées du point M.

Remarquons que $\mathbb{R}^3$ n'a pas en général une structure d'espace vectoriel.

Exemples :

Coordonnées cylindriques : $\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_4}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{vmatrix} = r$

Coordonnées sphériques :



$|OM| = \rho$

$(e_3, OM) = \theta$

$(e_1, om) = \Psi$

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin\theta \cos\Psi \\ x_2 = \rho \sin\theta \sin\Psi \\ x_3 = \rho \cos\theta \end{cases}$$

$\rho \in \,]0, +\infty[\,, \quad \theta \in \,]0, \pi[\,, \quad \Psi \in [0, 2\pi[$

$$J_\varphi = \rho^2 \sin\theta$$

- Différentielle, repère local -

Considérons un système de coordonnées (u_i), cherchons à évaluer l'élèment différentiel dM.

a) Première méthode

La position du point M ne dépend que des (u_i) on peut donc écrire

$$dM = \frac{\partial M}{\partial u_i} d_{u_i}$$

Retrouvons cette expression

.../...

b) Deuxième méthode

On a $OM = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ dans un repère fixe (O, e_1, e_2, e_3) où les x_i sont fonctions des u_1, u_2, u_3.

On a donc $dM = dx_i e_i$

avec

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j$$

d'où on a :

$$dM = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j e_i$$ en ordonnant cette double somme suivant les du_j il vient :

$$dM = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_1} e_3\right) du_1 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_2} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_2} e_3\right) du_2$$

$$+ \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_3} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_3} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_3} e_3\right) du_3$$

et on reconnait les identités :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_1} e_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_2} e_3 = \frac{\partial M}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_3} e_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_3} e_2 + \frac{\partial x_3}{\partial u_3} e_3 = \frac{\partial M}{\partial u_3}$$

d'où $dM = \dfrac{\partial M}{\partial u_i} du_i$

<u>Lemme</u> :

Les vecteurs $\varepsilon_i = \dfrac{\partial M}{\partial u_i}$ forment une base.

En effet, il suffit de montrer que les ε_i sont indépendants or le déterminant des trois vecteurs ε_1, ε_2, ε_3 est donné par :

$$\text{dét}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$ (dans la base (e_1, e_2, e_3))

Ce qui n'est autre que le jacobien du changement de coordonnées, et d'après la définition il est non nul.

Définition :

Le repère $(M, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ avec $\mathcal{E}_i = \dfrac{\partial M}{\partial u_i}$ est le repère local associé aux coordonnées (u_i). Dans ce repère on a :

(13) $$\boxed{d M == du_i \ \mathcal{E}_i}$$

- Différentielle d'une fonction scalaire :

Soient $f(x_1, x_2, x_3)$ une fonction de trois variables et φ un changement de coordonnées, considérons la fonction composée :

$$g(u_1, u_2, u_3) = f(x_1(u_1, u_2, u_3); x_2(u_1, u_2, u_3), x_3(u_1, u_2, u_3)).$$

Remarquons que :

i) Si on s'intéresse à la fonction g la différentielle de g est une forme linéaire en (du_1, du_2, du_3) c'est-à-dire qu'on a :

$$g(u_1+du_1, u_2+du_2, u_3+du_3) - g(u_1, u_2, u_3) = a_i du_i + |h| \mathcal{E}(h).$$

(on pose ici $h = dM$).

Par un calcul analogue à celui du paragraphe 1.2.) on aurait

(14) $$\boxed{dg = \frac{\partial g}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial g}{\partial u_3} du_3}$$

ii) Mais on ne peut poser $\overrightarrow{\text{grad}}\, g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g}{\partial u_3} \end{pmatrix}$

et écrire $dg = \overrightarrow{\text{grad}}\, g \cdot dM$ (produit scalaire).

ni dans la base e_i, ni dans la base $\mathcal{E}_i$.

peu clair

Cependant on peut toujours écrire :

(15) $$\boxed{dg = V \cdot dM}$$

puis que la différentielle est une forme linéaire, et que à toute forme linéaire φ (sur un espace de dimension finie) on peut associer un vecteur φ^* tel que :

$$\varphi(X) = \varphi^* \cdot X \qquad (X \in \mathbb{R}^n, \text{ produit scalaire de } \varphi^* \text{ et } X).$$

Définition :

Le vecteur V tel que (15) soit vérifié s'appelle vecteur gradient de g.

Insistons sur le fait que le vecteur V n'a pas comme composantes (ni sur $\mathcal{E}_i$, ni sur e_i) $\dfrac{\partial g}{\partial u_i}$

Comme dM est connu (et a une expression simple) dans la base $\mathcal{E}_i$, déterminons les composantes du gradient de g dans le repère local.

On pose $V = a_i \mathcal{E}_i$

et ondoit avoir :

$V \cdot dM = \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i$ cette égalité étant vérifiée pour tout du_i (égalité entre forme linéaire).

Il vient :

$$(a_1 \mathcal{E}_1 + a_2 \mathcal{E}_2 + a_3 \mathcal{E}_3) \cdot (du_1 \mathcal{E}_1 + du_2 \mathcal{E}_2 + du_3 \mathcal{E}_3) = \frac{\partial g}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial g}{\partial u_3} du_3$$

en effectuant le produit scalaire et en identifiant en du_i on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_1)\, a_1 + (\mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_1)\, a_2 + (\mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_1)\, a_3 = \dfrac{\partial g}{\partial u_1} \\ (\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2)\, a_1 + (\mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_2)\, a_2 + (\mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_2)\, a_3 = \dfrac{\partial g}{\partial u_2} \\ (\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_3)\, a_1 + (\mathcal{E}_2 \cdot \mathcal{E}_3)\, a_2 + (\mathcal{E}_3 \cdot \mathcal{E}_3)\, a_3 = \dfrac{\partial g}{\partial u_3} \end{array} \right.$$

Ceci est un système d'équations linéaires à trois inconnues (a_1, a_2, a_3) dont les coefficients sont :

(16) $\boxed{g_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j}$ (produit scalaire)

- Définition

La matrice G d'élèments g_{ij} définis par (16) s'appelle "tenseur métrique" dans la base $(\mathcal{E}_i)$.

En effet soient $X = x_i \mathcal{E}_i$, $Y = y_i \mathcal{E}_j$; le produit scalaire de X par Y est donné par :

$$X \cdot Y = x_i\, y_j\, g_{ij}$$

et le carré de la norme de X par :

$$X \cdot X = |X|^2 = x_i\, x_j\, g_{ij}$$

Remarquons que si la base $\mathcal{E}_i$ est orthonormée alors la matrice G est la matrice identité.

Le système linéaire s'écrit sous forme matricielle

$$G \cdot V = A \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

.../...

Ce système admet une solution unique si la matrice G est inversible.

On utilise le lemme :

Lemme :

Le déterminant de la matrice d'élèments $g_{ij} = \mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j$ est différent de zéro si et seulement si les vecteurs $\mathcal{E}_i$ sont indépendants.
(Ce déterminant s'appelle le déterminant de Gramm des vecteurs $\mathcal{E}_i$).

et donc on a :

$$\text{grad } g = V = G^{-1} A.$$

- Cas particuliers :

i) Si le repère est orthonormé alors : $G = I = G^{-1}$, et comme on l'a vu précedemment :

$$\text{grad } g = A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_3} \end{pmatrix}$$

ii) Le repère $(M, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ est rarement orthonormé mais il peut être orthogonal, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_i \cdot \mathcal{E}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

la matrice G est alors diagonale, le système devient :

$$\left.\begin{aligned} g_{11}\, a_1 &= \frac{\partial g}{\partial u_1} \\ g_{22}\, a_2 &= \frac{\partial g}{\partial u_2} \\ g_{33}\, a_3 &= \frac{\partial g}{\partial u_3} \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g}{\partial u_1} \\ a_2 &= \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g}{\partial u_2} \\ a_3 &= \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial g}{\partial u_3} \end{aligned} \qquad \text{avec } g_{ii} = |\mathcal{E}_i|^2$$

On dit alors que les coordonnées u_i sont orthogonales.

Ex : Coordonnées cylindriques :

on a $\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $\quad \mathcal{E}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E}_\theta = r\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{E}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ soit $g\ (r, \theta, z)$ une fonction donnée en coordonnées

cylindriques on a alors ce qui précède.

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial r} \mathcal{E}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} \mathcal{E}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} \mathcal{E}_z$$

Cependant au repère local $(\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_\theta, \mathcal{E}_z)$ on a l'habitude d'associer un repère ortho-normé définit par :

$$e_r = \mathcal{E}_r \quad , e_\theta = \frac{1}{|\mathcal{E}_\theta|} \mathcal{E}_\theta = \frac{1}{r} \mathcal{E}_\theta \quad , \quad e_z = \mathcal{E}_z$$

et dans ce nouveau repère on a :

(17) $$\boxed{\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} e_z}$$

Avant de pousser plus loin notre étude, étudions le cas d'une fonction vectoriel-le.

Soit $V\ (u_1, u_2, u_3) = V_i\ (u_1, u_2, u_3)\ \mathcal{E}_i$

et soit $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\ V = (a_{ij})$ la matrice de la différentielle dans la base (u_1, u_2, u_3), qui est définie par :

$$dV = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}} V . dM.$$

Mais on peut écrire aussi :

$$dV = dV_i\ \mathcal{E}_i + V_i\ d\,\mathcal{E}_i$$

(n'oublions pas que les $\mathcal{E}_i$ dépendent de u_1, u_2, u_3).

On a donc :

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial u_j} du_j$$

$$d\,\mathcal{E}_i = \frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial u_k} du_k$$

Il faut donc déterminer $\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial u_k}$, ce qu'on fera par un calcul direct, mais on pose :

(18) $$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial u_k} = \Gamma_i{}^j{}_k . \mathcal{E}_j = \Big(\boxed{\sum_{j=i}^{3}} \Gamma_i{}^j{}_k\ \mathcal{E}_j \Big).}$$

(la position haute de l'indice j sera justifiée à partir du paragraphe suivant).

$$\text{d'où } dV = \left(\frac{\partial V_i}{\partial u_k} du_k \right) \mathcal{E}_i + V_i\ (\Gamma_i{}^j{}_k\ \mathcal{E}_j)\ du_k$$

les indices sommés sont muets, on peut donc changer leurs noms

d'où il vient :

$$dV = \frac{\partial V_i}{\partial u_k} du_k \, \mathcal{E}_i + V_p \Gamma_p{}^i{}_k \, \mathcal{E}_i \, du_k$$

$$dV = \left(\frac{\partial V_i}{\partial u_k} du_k + V_p \Gamma_p{}^i{}_k du_k\right) \mathcal{E}_i .$$

d'autre part :

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot dM = a_{ik} \, du_k \, \mathcal{E}_i$$

d'où on déduit que :

$$a_{ik} \, du_k = \frac{\partial V_i}{\partial u_k} du_k + V_p \Gamma_p{}^i{}_k \, du_k$$

si i est fixé ceci doit être une identité en du_k, ce qui fournit la solution du système :

$$(19) \qquad \boxed{a_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial u_k} + V_p \Gamma_p{}^i{}_k}$$

Définition :

Les $\Gamma_i{}^j{}_k$ définis par (18) sont les symboles de Christoffel de 2ème espèce.

Exemple :

Pour simplifier nous allons développer les calculs dans le cas de deux variables, soient u_1, u_2 de nouvelles coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.

On définit :

$$M(u_1, u_2) = x_i(u_1, u_2)\, e_i \qquad (i = 1, 2).$$

et $\mathcal{E}_1 = \dfrac{\partial M}{\partial u_1} \qquad \mathcal{E}_2 = \dfrac{\partial M}{\partial u_2}$

Soit V un champ de vecteurs

$$V = V_1(u_1, u_2)\, \mathcal{E}_1 + V_2(u_1, u_2)\, \mathcal{E}_2$$

ou $\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

et de plus :

$$dV = \left(\frac{\partial V_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_1}{\partial u_2} du_2\right) \mathcal{E}_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_2}{\partial u_2} du_2\right) \mathcal{E}_2$$

$$+ V_1 \left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u_2} du_2\right) + V_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial u_2} du_2\right)$$

Et on a :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u_1} = \Gamma_{11}^{1}\,\mathcal{E}_1 + \Gamma_{11}^{2}\,\mathcal{E}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u_2} = \Gamma_{12}^{1}\,\mathcal{E}_1 + \Gamma_{12}^{2}\,\mathcal{E}_2 \; ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial u_1} = \Gamma_{21}^{1}\,\mathcal{E}_1 + \Gamma_{21}^{2}\,\mathcal{E}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial u_2} = \Gamma_{22}^{1}\,\mathcal{E}_1 + \Gamma_{22}^{2}\,\mathcal{E}_2 \; .$$

(Les Γ_{ik}^{j} sont à calculer !)

En remplaçant dans dV on a :

$$dV = \left[\frac{\partial V_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_1}{\partial u_2} du_2 + V_1(\Gamma_{11}^{1} du_1 + \Gamma_{12}^{1} du_2) + V_2(\Gamma_{21}^{1} du_1 + \Gamma_{22}^{1} du_2)\right]\mathcal{E}_1$$

$$+ \mathcal{E}_2\left[\frac{\partial V_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_2}{\partial u_2} du_2 + V_1(\Gamma_{11}^{2} du_1 + \Gamma_{12}^{2} du_2) + V_2(\Gamma_{21}^{2} du_1 + \Gamma_{22}^{2} du_2)\right]$$

De plus :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot dM = (a_{11} du_1 + a_{12} du_2)\,\mathcal{E}_1 + (a_{21} du_1 + a_{22} du_2)\,\mathcal{E}_2$$

d'où : on a alors en égalant les coordonnées :

$$a_{11} du_1 + a_{12} du_2 = \frac{\partial V_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_1}{\partial u_2} du_2 + V_1(\Gamma_{11}^{1} du_1 + \Gamma_{12}^{1} du_2)$$

$$+ V_2(\Gamma_{21}^{1} du_1 + \Gamma_{22}^{1} du_2).$$

$$a_{21} du_1 + a_{21} du_2 = \frac{\partial V_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V_2}{\partial u_2} du_2 + V_1(\Gamma_{11}^{2} du_1 + \Gamma_{12}^{2} du_2)$$

$$+ V_2(\Gamma_{21}^{2} du_1 + \Gamma_{22}^{2} du_2).$$

en identifiant en du_1, du_2 on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11} = \dfrac{\partial V_1}{\partial u_1} + V_1\Gamma_{11}^{1} + V_2\Gamma_{21}^{1} & a_{12} = \dfrac{\partial V_1}{\partial u_2} + V_1\Gamma_{12}^{1} + V_2\Gamma_{22}^{1} \\[2ex] a_{21} = \dfrac{\partial V_2}{\partial u_1} + V_1\Gamma_{11}^{2} + V_2\Gamma_{21}^{2} & a_{22} = \dfrac{\partial V_2}{\partial u_2} + V_1\Gamma_{12}^{2} + V_2\Gamma_{22}^{2} \end{array}\right.$$

On a bien la relation (19)

Exemple :

En procédant comme on vient de le faire, mais dans le repère orthonormé local e_r, e_θ, e_z.

On a :

$$dM = dr\, e_r + r\, e_\theta\, d\theta + dz\, e_z$$

$$V = V_1(r,\theta,z)\, e_1 + V_2(r,\theta,z)\, e_2 + V_3(r,\theta,z)\, e_3$$

On remarque que :

$$de_r = e_\theta\, d\theta \ , \ de_\theta = - e_r\, d\theta \ , \ d_{ez} = 0$$

$$dV = \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2\right) d\theta + \frac{\partial V_1}{\partial z} dz\right) e_r + \left(\frac{\partial V_2}{\partial r} dr + \left(\frac{\partial V_2}{\partial \theta} + V_1\right) d\theta + \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) e_\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial V_3}{\partial r} dr + \frac{\partial V_3}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V_3}{\partial z} dz\right) e_z$$

$$dV = (a_{11}\, dr + a_{12}\, r d\theta + a_{13}\, dz)\, e_r + (a_{21}\, dr + a_{22}\, r d\theta + a_{23} dz)\, e_\theta$$

$$+ (a_{31}\, dr + a_{32}\, r d\theta + a_{33}\, dz)\, e_z$$

d'où en égalant et identifiant il vient :

$$\Rightarrow \quad \text{grad } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2\right) & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \theta} + V_1\right) & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial V_3}{\partial \theta} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

<u>Conséquence</u> :

a) $\text{div } V = \text{trace } (\overset{\Rightarrow}{\text{grad}}\ \vec{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \theta} + V_1\right) + \frac{\partial V_3}{\partial z}$

b) $\Delta g = \text{div } (\text{grad } g)$ avec $\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} e_z$

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

c) Puisque le repère e_r, e_θ, ez est orthonormé on peut alors calculer le rotationel de V par la relation (12).

$$\overset{\Rightarrow}{\text{grad}}\ V - {}^t\overset{\Rightarrow}{\text{grad}}\ V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2\right) - \frac{\partial V_2}{\partial r} & \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial r} \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2\right) & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_3}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_3}{\partial r} - \frac{\partial V_1}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_2}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{\text{rot}}\, V = \left(\frac{1}{r} \quad \frac{\partial V_3}{\partial \theta} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) e_r + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial r}\right) e_\theta + \left(\frac{\partial V_2}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \; \frac{\partial V_1}{\partial \theta} - V_2\right)\right) e_z$$

- Base duale

Rappels d'algèbre linéaire :

Considérons un espace vectoriel E (de dimension finie) on appelle espace dual de E, l'ensemble E^* des formes linéaires sur E, rappelons que E^* est un espace vectoriel tel que dim E^* = dim E

Si (e_i) est une base de E,

l'ensemble des φ_j de E^* telles que

$$\varphi_j\,(e_i) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\varphi_j\,(e_i) = 1 \quad \text{si} \quad i = j$$

est une base de E^* qui est la base duale de la base (e_i).

De plus si E est euclidien, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire alors si $\varphi \in E^*$ il existe un vecteur Y et un seul tel que

$$\varphi\,(X) = Y \,.\, X \qquad \forall\, X \in E.$$

L'application qui à φ associe Y est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Construisons cet isomorphisme

Soit $X = x_i e_i$ et $Y = y_j e_j$

$$\begin{cases} \varphi(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; \varphi(e_i) \\ Y \cdot X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_j \, x_i \; e_i \cdot e_j \end{cases}$$

d'où en identifiant il vient :

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \;(e_i \cdot e_j)$$

Les $\varphi(e_i)$ et les $e_i \cdot e_j$ sont connus, donc ceci est un système linéaire le déterminant des $e_i . e_j$ étant non nul ce système a une solution unique. On sait donc construire Y connaissant φ.

Plus simplement on peut choisir (e_i) base orthonormée et (φ_j) base duale de (e_i) et il vient :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \varphi_j$$

$$\begin{cases} \varphi(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j \; \varphi_j \; (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\ Y \cdot X = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \end{cases}$$

d'où après identification

$$y_j = \varphi_j$$

Or on a considéré $\mathbb{R}^n$ comme euclidien, donc on peut poser $\mathbb{R}^{n*}$ ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ identique à $\mathbb{R}^n$. Le gradient d'une fonction scalaire est alors le vecteur de $\mathbb{R}^n$ associé à la forme linéaire différentielle. Si (e_i) est une base de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des vecteurs $(e^j)_{j=1,n}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $e^j \cdot e_i = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker) sera la base duale de e_i

Soit M (u_1, u_2, u_3) un système de coordonnées (ε_i) la base locale et g (u_1,u_2,u_3) une fonction de trois variables on a vu que :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial g}{\partial u_3} du_3$$

<u>Interprétons cette expression</u> :

Soit ε^j la base duale de la base (ε_i)

On a $dM = \mathcal{E}_i \, du_i$

Posons $\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial u_j} \, \mathcal{E}^j$

et on a :

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial u_j} \, \mathcal{E}^j\right) \cdot \left(\mathcal{E}_i \, du_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial u_i} \, du_i$$

d'où

<u>Proposition</u> :

Les $\frac{\partial g}{\partial u_j}$ sont les composantes du vecteur gradient dans la base duale de la base locale.

Il est clair que si la base $\mathcal{E}_i$ est orthonormée alors :

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{E}_i$$

<u>Définition</u> :

Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$, (e_i) une base de $\mathbb{R}^n$, (e^j) la base duale. X peut alors se décomposer de la façon suivante

$$\begin{cases} X = x^i \, e_i \\ X = x_j \, e^j \end{cases}$$

- les composantes de X, considéré comme vecteur, sur la base (e_i) seront notées x^i (indice en haut) et appelées contravariantes

- les composantes de X, considéré comme forme linéaire, sur la base (e^j) seront notées x_j (indice en bas).

<u>Par convention</u> les vecteurs de base de $\mathbb{R}^n$ considérés comme vecteurs auront l'indice en bas, alors que ceux de la base de $\mathbb{R}^n$ considérés comme forme linéaire auront l'indice en haut.

- Relation avec les changements de bases.

Considérons (e_i) une base de vecteurs de $\mathbb{R}^n$; et (E_I) une autre base. Il existe alors une matrice de changement de base et on peut écrire :

$$\begin{cases} e_i = \beta^I{}_i \, E_I & (20 . a) \\ E_I = \alpha^i{}_I \, e_i & (20 . b) \end{cases}$$

Les $\beta^I{}_i$ représentent les colonnes de la matrice de changement de base, ce sont les composantes des e_i dans la nouvelle base ; les matrices $\alpha_I{}^i$ et $\beta_i{}^I$ sont inverses l'une de l' autre.

C'est-à-dire :

$$\alpha^i_I \quad \beta^I_j = \delta^i_j$$

Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$ on peut écrire

$X = x^i e_i = x'^I E_I$ il vient donc :

$x^i \, (\beta^I_i \, E_I) = x'^I E_I$ soit

$$\boxed{(21 . a) \qquad x'^I = \beta^I_i \, x^i}$$

ou bien

$x^i e_i = x'^I \, (\alpha^i_I \, e_i)$

d'où

$$\boxed{(21 . b) \qquad x^i = \alpha^i_I \, x'^I}$$

D'où en comparant (20.a) avec (21.b) et (20.b) avec (21.a) on voit que les composantes se transforment à l'aide de la matrice inverse de la matrice qui sert à transformer les vecteurs d'où leurs noms de contravariantes.

Changement dans la base duale.

Le changement de base donné par les formules (20) introduit un changement de base duale.

Posons $e^j = \mu^j_J \quad E^J$

où (e^j) est la base duale de (e_i)

(E^J) est la base duale de (E_I)

Déterminons la matrice μ^j_J

Par définition on a :

$$e^j . e_i = \delta^j_i \qquad \text{et} \qquad E^J . E_I = \delta^J_I$$

remplaçons maintenant

$$e^j \, (\beta^I_i \; E_I) = \delta^j_i = \mu^j_J \quad E^J \, (\beta^I_i \; E_I) = \delta^j_i$$

Soit encore :

$$\mu^j_J \, \beta^I_i \qquad E^J . E_I = \delta^j_i$$

or $E^J . E_I = \delta^J_I$ et $\mu^j_J \; \beta^I_i \, \delta^J_I = \mu^j_J \, \beta^J_i$

et donc on a :

$$\mu^{j}_{J}\ \beta^{J}_{i} = \delta_{i}^{j} \qquad \text{et donc} \quad \mu^{j}_{J} = \alpha^{j}_{J}$$ (car la matrice μ est inverse de la matrice β).

d'où les relations :

$$\begin{cases} e^{j} = \alpha^{j}_{i} \quad e^{i} & (22\ .\ a) \\ E^{J} = \beta^{J}_{I} \quad E^{I} & (22\ .\ b) \end{cases}$$

Si on pose

$$X = x_i e_i = X'_I \ E^I$$

par un raisonnement analogue au précédent on montrerait que :

$$(23\ .\ a) \qquad x_i = \beta^{I}_{i} \quad x'_I$$

$$(23\ .\ b) \qquad x'_I = \alpha^{i}_{I} \quad x_i$$

En comparant (20.a) à (23.a) et (20.b) à (23.b) on voit que les composantes de X dans la base duale se transforment comme les vecteurs de bases d'où leurs noms de composantes <u>covariantes</u>.

<u>Remarques</u> :

a) Les notations adoptées depuis le début de ce chapitre ne sont maintenant plus cohérentes. On doit distinguer dans $\mathbb{R}^n$ les éléments qui sont vecteurs et ceux qui sont formes linéaires. Si X est considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on note par rapport à une base fixe :

$$X = x^i \ e_i$$

Les x^i représentent un système de coordonnées cartésiennes ; par analogie si on considère un nouveau système de coordonnées on notera

$M\ (u^1,\ u^2,\ u^3)$ de façon à écrire le repère local sous la forme :

$$\varepsilon_i = \frac{\partial M}{\partial u^i},$$

et l'élément différentiel

$$dM = du^i \ \varepsilon_i,$$

(la notation devient cohérente).

(On peut introduire de même un système de coordonnées covariantes u_j et écrire : $dM = \varepsilon^j \ du_j$).

Rappelons que la distinction entre composantes covariantes et contravariantes n'existe plus si le repère local ϵ_i (ou global e_i) est orthonormé.

Il est clair aussi que la simplicité gagnée en confondant l'espace des formes linéaires avec l'espace vectoriel de départ, est compensée par une difficulté d'écriture.

b) La distinction qu'on doit faire, pour un élément de $\mathbb{R}^n$, suivant qu'il est considéré comme forme linéaire ou comme vecteur est tout à fait fondamentale en physique. Une des notions centrales en physique est l'énergie, ou la puissance (Mécanique, thermodynamique, electrostatique, etc...).

Considérons une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace avec la vitesse $\vec{V}$, la puissance mise en jeu par ce déplacement est :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad \text{(ici W est le travail fourni)}$$

($\mathcal{P} = - p \cdot \frac{dV}{dt}$ où V est le volume et p la pression pour un gaz parfait

$\mathcal{P} = U \cdot \frac{dI}{dt}$ en électrocinétique

$\mathcal{P} = Q \frac{dV}{dt}$ en électrostatique etc.....)

L'application qui à $\vec{V}$ champ de vitesse associe $\mathcal{P}$ la puissance est alors une <u>forme linéaire</u>. Si $\mathcal{V}$ est l'espace vectoriel des champs de vitesse à la force $\vec{F}$ est associé un élément de $\mathcal{V}^*$; le vecteur $\vec{F}$ bien qu'appartenant à $\mathbb{R}^3$ n'a pas le sens (ni la dimension) d'une grandeur géométrique. En mécanique des milieux continus où on associe à la matière des repères dits concomittants (ce sont des repères locaux) non nécessairement orthonormés " $\vec{F}$ " doit être exprimée dans la base duale.

- Passage de la base à la base duale

Construisons dans $\mathbb{R}^3$ la base duale d'une base (e_i)

Par définition on doit avoir

$$e^j \, (e_i) = \delta^j_i$$

donc e^1 est orthogonal à e_2 et e_3

d'où $e^1 = \lambda(e_2 \wedge e_3)$ (produit vectoriel)

de plus

$$e^1 \cdot e_1 = 1 \quad \text{donc}$$

$\lambda (e_2 \wedge e_3) \cdot e_1 = 1$ mais $e_1 \cdot (e_2 \wedge e_3) = \text{dét} \; (e_1, e_2, e_3)$

d'où $e^1 = \dfrac{1}{\text{dét} \; (e_1, e_2, e_3)} \; e_2 \wedge e_3$

on raisonne de façon analogue sur e_2 et e_3 en utilisant les propriétés du produit mixte :

Proposition :

Soit e_1, e_2, e_3 une base de $\mathbb{R}^3$ on pose $|g| = \text{dét}(e_1, e_2, e_3)$ alors la base duale est donnée par :

$$e^1 = \frac{1}{|g|}(e_2 \wedge e_3) \qquad e^2 = \frac{1}{|g|}(e_1 \wedge e_3) \qquad e^3 = \frac{1}{|g|}(e_1 \wedge e_2)$$

Proposition :

Soient X un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et (e_i) une base et (e^j) la base duale tel que :

$X = x^i e_i = x_j e^j$

On introduit les matrices $G = (g_{ij})$ avec $g_{ij} = e_i \cdot e_j$

$$\tilde{G} = (g^{ij}) \quad \text{avec } g^{ij} = e^i \cdot e^j$$

alors

i) $\tilde{G}$ est inverse de G - c'est-à-dire :

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

ii) On a :

$$x^j = g^{ij} x_i$$

$$x_i = g_{ij} x^j$$

iii) et on a :

$$e^i = g^{ij} e_j$$

$$e_i = g_{ij} e^j$$

On a :

$$X = x^j e_j = x_i e^i$$

d'où $X \cdot e_i = (x^j e_j) \cdot e_i = x^j g_{ji}$

$X \cdot e_i = (x_k e^k) \cdot e_i = x_k \delta^k_i = x_i$

d'où $x^j g_{ij} = x_i$ mais $g_{ji} = g_{ij}$

donc $x_i = g_{ij} x^j$

de plus

$X \cdot e^i = (x^j e_j) \cdot e^i = x^j e_j \cdot e^i = x^j \delta^i_j = x^i$

$X \cdot e^i = (x_k e^k) \cdot e^i = x_k g^{ki}$

d'où $x^i = g^{ki} x_k = g^{ik} x_k$ ce qui démontre i) et ii)

Posons $e^{i} = \alpha^{ij} e_j$

$$e^{i} \cdot e_k = \alpha^{ij} e_j \cdot e_k = \alpha^{ij} g_{jk} = \delta^{i}_{k}$$

Ceci démontre que la matrice (α^{ij}) est inverse de la matrice (g_{jk}) d'où

$\alpha^{ij} = g^{ij}$ ce que démontre iii)