ENSEM

2ième Année - Filière Mécanique

Maîtrise de Mécanique.

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

DIVERS RAPPELS ET COMPLÉMENTS UTILES

Plan

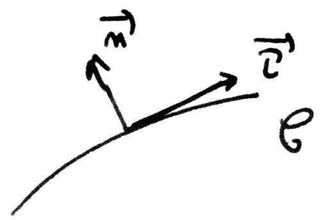
① Dérivée normale - Dérivée tangente et coordonnées :

② Sur l'équation de Cauchy.

③ Connexité et unicité des écoulements de fluide parfait :

① Dérivée normale - Dérivée tangente et coordonnées :

Soit $f(M)$ une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ de repère de frénet $(\vec{\tau}, \vec{n})$:



a) On rappelle d'abord la dérivée de f selon un vecteur $\vec{k}$:

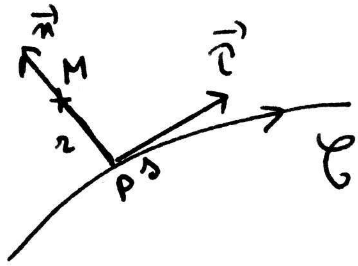
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\underset{\sim}{x} + \varepsilon \vec{k}) - f(\underset{\sim}{x})}{\varepsilon} = \overrightarrow{grad} \cdot \vec{k}}$$

ainsi que la dérivée tangente à $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{\tau}} = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{\tau}}$$ et la dérivée normale à $\mathcal{C}$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{n}}$$

b) Soit M un point du plan et s une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$.



Soit P la projection de M sur $\mathcal{C}$, s l'abscisse qui y correspond sur $\mathcal{C}$ et $r = PM$. Les éléments r, s permettant de repérer tout point M de l'espace proche de $\mathcal{C}$ sont dit <u>coordonnées curvilignes de M</u> et $(\vec{n}, \vec{\tau})$ est dite base de vecteurs associés.

Ce sont des coordonnées du même type que les coordonnées cylindriques : (r, φ, z) avec $(\vec{r}, \vec{\varphi}, \vec{z})$ ou sphériques (r, φ, θ) avec $(\vec{r}, \vec{\varphi}, \vec{\theta})$. En fait, cette façon de repérer des points de l'espace se généralise (Voir cours sur Variétés et Tenseurs non cartésiens).

On a $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial s} \vec{\tau} + \frac{\partial f}{\partial r} \vec{n}$ d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{\tau} = \frac{\partial f}{\partial s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial r}}$$

c) La relation $\frac{\partial f}{\partial \vec{\tau}} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{\tau} = 0$ sur $\mathcal{C}$ s'interprète donc par f constant sur $\mathcal{C}$ et $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{n} \neq 0$ sur $\mathcal{C}$ par le fait que f varie selon $\vec{n}$.

② Sur l'équation de Cauchy :

a) Soit $\vec{\omega}$ le champ de vorticité, $\vec{\omega}(\underset{\sim}{x},t)$ une description Eulerienne de $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}(\underset{\sim}{X},t)$ une description Lagrangienne, tel que l'on a :

$$\boxed{\omega_i(\underset{\sim}{x},t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\,\omega_j(\underset{\sim}{X},t=0)} \quad (1)$$

Alors $\dfrac{d\omega_i}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\,\omega_j(\underset{\sim}{X},t=0)\right)$ à l'aide de (1)

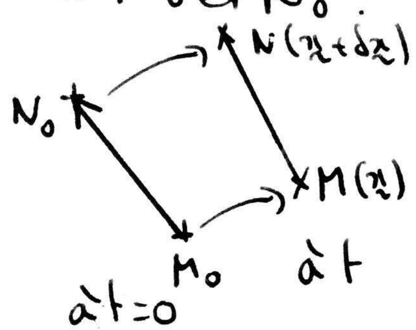
$$= \frac{\partial \frac{dx_i}{dt}}{\partial X_j}\,\omega_j(\underset{\sim}{X},0) = \frac{\partial V_i}{\partial X_j}\,\omega_j(\underset{\sim}{X},0)$$

$$= \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\,\omega_j(X,0) = \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\,\omega_k(\underset{\sim}{x},t) \text{ à l'aide de (1)}$$

$$= v_{i,k}\,\omega_k$$

On a donc vérifié que $\omega_i(x,t) = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}\,\omega_j(X,t=0)$ est solution de $\boxed{\dfrac{d\omega_i}{dt}(x_i,t) = v_{i,j}\,\omega_j(x_j,t)}$ (2) où $\vec{\omega}$ est la vorticité et $\vec{v}$ la vitesse ou de façon équivalente, de $\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = \mathrm{Rot}(\vec{v}\wedge\vec{\omega})$

b) Soient $M(\underset{\sim}{x})$ et $N(\underset{\sim}{x}+\delta\underset{\sim}{x})$ deux particules fluides, initialement en M_0 et N_0 :



où $\delta\underset{\sim}{x}$ est une différentielle de $\underset{\sim}{x}$

Il vient $\dfrac{d\overrightarrow{MN}}{dt} = V_N - V_M = \operatorname{grad}\vec{V} \cdot \overrightarrow{MN}$

Or $\overrightarrow{MN} = (\underset{\sim}{x} + \delta\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{x} = \delta\underset{\sim}{x}$ d'où : $\dfrac{d\delta x}{dt} = \operatorname{grad}\vec{V} \cdot \delta\underset{\sim}{x}$

D'où en coordonnées $\boxed{\dfrac{d\,\delta x_i}{dt} = V_{i,j}\,\delta x_j}$

donc $\vec{\omega}$ suit la même équation d'évolution que les éléments matériels $\delta\underset{\sim}{x}$ c'est à dire que $\vec{\omega}$ est gelé dans le fluide.

③ <u>Connexité et unicité des écoulements de fluide parfait</u> :

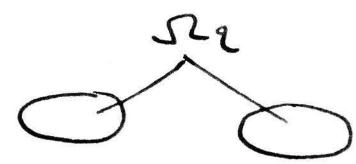
Après avoir présenté quelques rappels simplifiés sur la connexité, cette notion de géométrie est utilisée pour savoir si un problème de fluide parfait irrotationnel a une solution unique

a) <u>Connexité</u> :

Une région Ω est dite <u>connexe</u> si on peut toujours trouver une courbe (ou <u>chemin</u>) dans Ω qui relie deux points quelconques de Ω.

<u>Exemples</u> :

ensemble connexe



ensemble non connexe mais dont le complémentaire est connexe.

b) <u>multiple connexité</u> :

Une courbe fermée de Ω (ou <u>circuit</u> de Ω) est dite <u>réductible</u> si on peut la déformer continument en un point sans sortir de Ω.

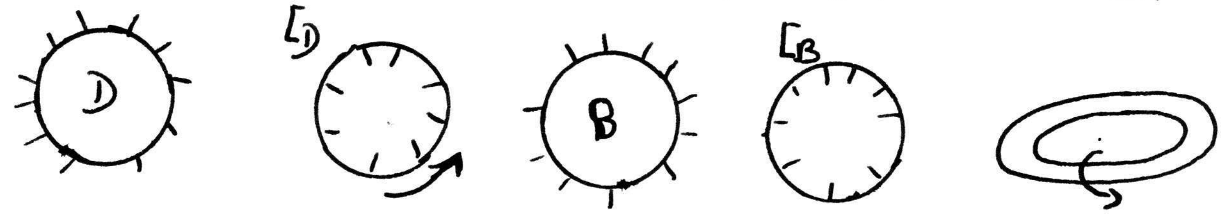
Une région Ω de l'espace est dite <u>simplement connexe</u> si deux points quelconques de Ω peuvent être joints par des chemins dans Ω et que la réunion de n'importe quels de ces 2 chemins forment un circuit réductible.

Une région Ω est dite <u>multiplement connexe</u> si il est possible de joindre 2 points quelconques de Ω par des chemins entièrements dans Ω, mais que la réunion de certains de ces chemins ne forme pas des courbes irréductibles.

Deux circuits d'une région Ω sont dits <u>réconciliables</u> si on peut les faire coïncider par une déformation continue sans passer en dehors de la région Ω (Lors de cette déformation, un circuit peut en devenir plusieurs et les points du circuits peuvent se dédoubler).

On dit qu'une région Ω ~~est~~ de <u>degré de connexité n</u> si on peut trouver au plus n circuits irréconciliables dans Ω.

Exemples : Soit D un disque de $\mathbb{R}^2$. Alors D est simplement connexe et son complémentaire est doublement connexe.
Soit B une boule de $\mathbb{R}^3$. Alors B est simplement connexe ainsi que son complémentaire.
L'extérieur d'un tore de $\mathbb{R}^3$ est doublement connexe.



c) Double connexité et unicité d'un écoulement irrotationnel :

Dans une région doublement connexe, on a deux courbes irréconciliables ; une qui est réductible et une qui ne l'est pas et qui peut être ramenée à une boucle.
La circulation ~~de~~ la vitesse sur cette boucle est appelée constante cyclique.

On a la propriété suivante :

Un écoulement irrotationnel à divergence nulle, dans une région doublement connexe est déterminé de façon unique quand on impose les conditions aux limites nécessaires à l'unicité d'un écoulement dans une région simplement connexe et que la constante cyclique est spécifiée.

Tout ceci se généralise pour une région multiplement connexe.

Bibliographie : Batchelor Chapitre 2.