ENSEM

2ème Année Filière Mécanique

Maîtrise de Mécanique

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

EXERCICES ET PROBLEMES

SOLUTIONS

Sommaire

Chapitre 1

I Implosion d'une bulle :

① • incompressible $\quad \text{div}\,\vec{v} = 0$

irrotationnel $\quad \text{rot}\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{grad}\,\varphi$

$$\left.\begin{array}{l}\text{div}\,\vec{v}=0\\ \text{rot}\,\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{v}=\text{grad}\,\varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\varphi = 0$$

• Condition initiale :

$$\left.\begin{array}{l} r < R_0 : p = 0 \quad \vec{v} = 0 \\ r > R_0 : \vec{v} = 0 \end{array}\right\} \text{d'où } \varphi = 0$$

• fluide parfait sans pesanteur et irrotationnel :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2}\right)$$

$$= \frac{\partial\, \text{grad}\,\varphi}{\partial t} = \text{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

d'où $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho_0} + \dfrac{v^2}{2} = f(t)$

• Mouvement matériel de l'interface :

$$F(\underline{x}, t) = 0$$

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,F$$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}\,F = \|\overrightarrow{\text{grad}}\,F\|\, \vec{n}$ $\quad$ d'où $\quad \vec{v}_i \cdot \vec{n} = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\,F\|} = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}}$

$$= \overrightarrow{\text{grad}}\,F \cdot \vec{n}\,\vec{n}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \vec{n}}\,\vec{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}_i \cdot \vec{n} = \\ \partial\varphi / \partial \vec{n} = \end{array} \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}}} \quad \text{sur } \mathcal{S} \qquad \vec{v}_i = \text{grad}\,\varphi \text{ sur } \mathcal{S}.$$

• Continuité de pression : $\quad p_0 = 0 = p$ sur $\mathcal{S}$.

• conditions en ∞ : $\quad p = p_\infty$

$$\vec{v} = \text{grad}\,\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

② • $\Delta \varphi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{d\varphi}{dr}\right) = 0$

• <u>Mouvement de l'interface :</u>

$F = r - R(t)$ $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial t} = -\dfrac{dR}{dt}$

$\dfrac{\partial F}{\partial \vec{n}} = \vec{\text{grad}}\, r \cdot \vec{n}$

$= \vec{\text{grad}}\, r \cdot \vec{r} = \dfrac{\partial r}{\partial r} = 1$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = \vec{\text{grad}}\, \varphi \cdot \vec{r} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$

d'où $\boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(R) = \dfrac{dR}{dt}(R)}$

• <u>Conditions initiales :</u>

$v = 0$ d'où $\varphi(t=0) = 0$ $\quad \dfrac{dR}{dt}(t=0) = 0$

$R(t=0) = 0$.

• $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{p}{\rho_0} + \dfrac{v^2}{2} = f(t)$. Bernouilli.

• en ∞ : $p = p_\infty$ $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$

③ $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{d\varphi}{dr}\right) = 0$ d'où $\varphi = -\dfrac{A(t)}{r} + B(t)$

$\Rightarrow 0 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(\infty) = \dfrac{dB}{dt}$ d'où $B = cst = 0$ car φ est défini à une cst près.

$-q = \displaystyle\int_S -\vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = -\int_S \vec{\text{grad}}\, \varphi \cdot \vec{n}\, dS = -\int_S \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} dS$

d'où $q = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(R)\, 4\pi R^2 = -\dfrac{A(t)}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi A(t)$

d'où $\boxed{\varphi = +\dfrac{q(t)}{4\pi r}}$

(4)

Bernoulli en ∞

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\infty) + \frac{p_\infty}{\rho_0} + \frac{1}{2} v^2(\infty) = f(t)$$

d'où $f(t) = \frac{p_\infty}{\rho_0}$.

Bernoulli en R :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(R) + \frac{0}{\rho_0} + \frac{1}{2} v_i^2(R) = f(t) = \frac{p_\infty}{\rho_0}.$$

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi r} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{q(t)}{4\pi R}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2 = \dfrac{p_\infty}{\rho_0}. \\ \dfrac{dR}{dt}(R) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(R) = +\dfrac{q}{4\pi R^2} = v_i \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(R) = \frac{dR}{dt}(R) \Rightarrow$$

d'où $$-\frac{1}{R} \frac{d\left(R^2 \frac{dR}{dt}\right)}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{p_\infty}{\rho_0}.$$

$$\boxed{+R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{p_\infty}{\rho_0}}$$

(5) $L = R_0 \qquad R^* = R/R_0$

$V = \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_0}}$ d'où $T = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_0}}} = R_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{p_\infty}} \qquad t^* = \frac{t}{T}$

$$\boxed{-R^* \frac{d^2R^*}{dt^{*2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{dR^*}{dt^*}\right)^2 = 1} \quad (1)$$

(6)

$\xi = \frac{dR}{dt}$ et $\eta = R(t)$ $\qquad \left|\begin{matrix} t \\ R_0 \end{matrix}\right. \longrightarrow \left|\begin{matrix} \eta \\ \xi \end{matrix}\right.$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\xi}{d\eta} \frac{dR}{dt} = \frac{d\xi}{d\eta} \xi$$

d'où $$-\eta \frac{d\xi}{dt} - \frac{3}{2} \xi^2 = 1$$

$$-\eta \xi \frac{d\xi}{d\eta} - \frac{3}{2} \xi^2 = 1 \qquad \frac{3}{2} \xi^2 + \eta \xi \frac{d\xi}{d\eta} + 1 = 0$$

$$\boxed{3 f + \eta \frac{df}{d\eta} + 2 = 0} \quad (2)$$

solution particulière : $f = -\frac{2}{3}$

solution homogène $\quad 3f + \eta \frac{df}{d\eta} = 0$

$$3\frac{d\eta}{\eta} + \frac{df}{f} = 0 \quad \text{d'où} \quad f = \frac{k}{\eta^3}$$

D'où $f = \frac{k}{\eta^3} - \frac{2}{3} = \left(\frac{dR}{dt}\right)^2$

Et $\quad t=0 \quad \frac{dR}{dt} = 0$ d'où $\frac{k}{1^3} - \frac{2}{3} = 0 \quad k = \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{dR^*}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta^3} - 1\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{dR^*}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{R^{*3}} - 1\right)} \quad (3)$$

$$\frac{dR^*}{dt^*} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{R^{*3}} - 1} \quad \text{car} \quad \frac{dR^*}{dt} < 0$$

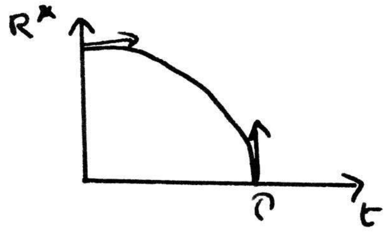
$$dt^* = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{dR^*}{\sqrt{\frac{1}{R^{*3}} - 1}}$$

$$t^* = -\sqrt{\frac{3}{2}}\int_1^{R^*}\frac{d\bar{R}^*}{\sqrt{1/\bar{R}^{*3} - 1}}$$

soit $\bar{R}^* = \bar{\mu}^{1/3}$ $\quad = +\frac{1}{\sqrt{6}}\int_{R^{*3}}^{1} \mu^{-1/6}(1-\mu)^{-1/2}\, d\mu$

$$\boxed{t^* = -\sqrt{\frac{3}{2}}\int_1^{R^*}\frac{d\bar{R}^*}{\sqrt{1/\bar{R}^{*3} - 1}}}$$

$$\boxed{\tau = -\sqrt{\frac{3}{2}}\int_1^{0}\frac{d\bar{R}^*}{\sqrt{1/\bar{R}^{*3} - 1}}} \quad (4)$$



(7)

(8) $\quad \lim_{t \to \infty} \frac{dR}{dt} = \infty \quad$ et $\quad \lim_{t\to\infty} a(t) = 0$.

II <u>Décomposition d'Helmoltz</u> :

$$\forall \varphi' \quad \int_\Omega |\vec{v} - \mathrm{grad}\,\varphi^\alpha|^2 \, d\underset{\sim}{x} \leq \int_\Omega |\vec{v} - \mathrm{grad}\,\varphi'|^2 \, d\underset{\sim}{x}$$

d'après la définition de φ^α

d'où $\displaystyle\int_\Omega |w^\alpha|^2 \, d\underset{\sim}{x} \leq \int_\Omega |w^\alpha + \mathrm{grad}(\varphi^\alpha - \varphi')|^2 \, d\underset{\sim}{x}$

puisque $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\varphi^\alpha + w^\alpha$

d'où $\displaystyle\int_\Omega \{|\mathrm{grad}(\varphi^\alpha - \varphi')|^2 + 2\, w^\alpha \cdot \mathrm{grad}(\varphi^\alpha - \varphi')\} \, d\underset{\sim}{x} \geq 0$

or $\vec{w}^\alpha \cdot \mathrm{grad}(\varphi^\alpha - \varphi') = \mathrm{div}[(\varphi^\alpha - \varphi')\, \vec{w}^\alpha] - (\varphi^\alpha - \varphi')\, \mathrm{div}\,\vec{w}^\alpha$

et $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}(\varphi^\alpha - \varphi')\, \vec{w}^\alpha \, d\underset{\sim}{x} = \int_{\partial\Omega} (\varphi^\alpha - \varphi')\, w^\alpha \cdot \vec{n}$

Il vient alors

$$\forall \varphi' \quad \int_\Omega |\mathrm{grad}(\varphi^\alpha - \varphi')|^2 + 2 \int_{\partial\Omega} (\varphi^\alpha - \varphi')\, w^\alpha \cdot \vec{n} - \int_{\partial\Omega} (\varphi^\alpha - \varphi')\, \mathrm{div}\,\vec{w}^\alpha \geq 0$$

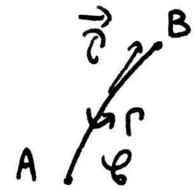
et donc : $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$

$\mathrm{div}\,\vec{w} = 0$ dans Ω

φ^α est donc le potentiel φ de la décomposition d'Helmoltz.

III Tourbillons :

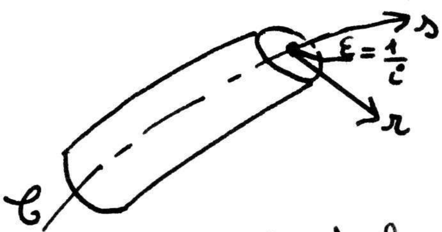
① Le filet tourbillon



$$\vec{\omega} = \Gamma \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$$

a) Soit la suite de champs de vorticité $\vec{\omega_i}$ tels que :

$$\vec{\omega_i} = \frac{\Gamma}{\pi i^2} \vec{\tau} \quad \text{pour } r < \varepsilon = \frac{1}{i} \qquad i \in \mathbb{N}$$
$$= 0 \quad \text{pour } r > \varepsilon = \frac{1}{i}$$



où + $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$
+ r est la distance à $\mathcal{C}$
+ s est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$

C'est donc une suite de tubes de vorticité constante de rayon $\varepsilon = \frac{1}{i}$ et de fibre centrale $\mathcal{C}$.

$$\text{On a } \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega_i}\, dS = \frac{\Gamma}{i^2 \pi} \vec{\tau} \pi i^2 = \Gamma \vec{\tau}$$

Soit $T_{\vec{\omega_i}}$ la distribution cannoniquement associée à $\vec{\omega_i}$. On a par définition :

$$\langle T_{\vec{\omega_i}}, \varphi \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega_i} \varphi\, d\underset{\sim}{x} = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega_i} \varphi\, dS \right\} ds$$

$$\text{D'où : } \lim_{i \to \infty} \langle T_{\vec{\omega_i}}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \varphi(s, r=0) \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega_i}\, dS \right\} ds$$
$$= \int_{\mathcal{C}} \Gamma \vec{\tau} \varphi(s)\, ds$$

$$\text{On a donc } \boxed{\vec{\omega} = \lim_{i \to \infty} T_{\vec{\omega_i}} = \Gamma \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}}$$

car $\langle \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \varphi \vec{\tau}\, ds$ par définition.

b)

$$\text{flux de } \vec{\omega} = \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega} \cdot \vec{dS} = \lim_{i \to \infty} \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega_i} \cdot \vec{dS}$$

$$= \lim_{i \to \infty} \Big(\iint_{\text{section}} \vec{\omega_i}\, dS \Big) \cdot \vec{\tau} = \Gamma \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \Gamma$$

$$\text{circulation de } \vec{v} = \int_{\mathcal{L}} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \underbrace{\iint_{\text{section}} \vec{\omega} \cdot \vec{dS}}_{= \Gamma} \quad \text{(théo de Stokes)}$$

c) On rappelle que $\operatorname{div} T_{\vec{f}} = T_{\operatorname{div} \vec{f}} + [[\vec{f}]] \cdot \vec{n}\, \delta_S + [[\vec{f}]]\, \delta_{x}$,

d'où :

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = \lim_{i \to \infty} \operatorname{div} T_{\vec{\omega_i}} = \lim_{i \to \infty} \left(T_{\operatorname{div} \vec{\omega_i}} + [[\vec{\omega_i}]] \cdot \vec{n}\, \delta_S \right)$$

Or $\operatorname{div} \vec{\omega_i} = 0$ car $\vec{\omega_i}$ est constante par morceaux et $\vec{\omega_i}$ n'effectue un saut que sur la surface du tube de vorticité. Comme $[[\vec{\omega_i} \cdot \vec{n}]] = 0$ sur le tube, on a donc

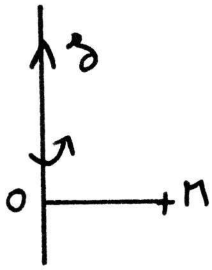
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\omega} = 0} \text{ avec } \vec{\omega} = \Gamma \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$$

d)

$$\vec{v}(x) = \lim_{i \to \infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\omega_i}}{4\pi} \wedge \frac{x - \xi}{|x - \xi|^3}\, d\xi = \frac{1}{4\pi} \lim_{i \to \infty} \int_{\mathcal{C}} \Big\{ \iint_{\substack{\text{section} \perp \\ \text{tube}}} \vec{\omega_i}\, dS \Big\} \wedge \Big\{ \frac{x - \xi}{|x - \xi|^3} \Big\}_{r=0} ds$$

d'où $\boxed{\vec{v}(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \Gamma \vec{\tau} \wedge \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|^3}\, ds}$

② Le filet tourbillon rectiligne :

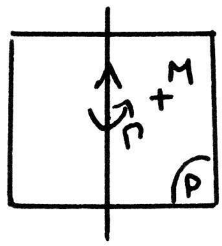


a)

- invariance par translation suivant $\vec{z}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}$ indépendant de z
- invariance par rotation autour de $\vec{z}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}$ indépendant de φ

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ ne dépend que de r

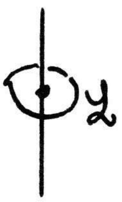
-



$\vec{\omega}$ vecteur axial
$\vec{v}$ vecteur polaire

$\Rightarrow$ P est un plan d'antisymétrie
$\Downarrow$
$\vec{v}$ est orthogonal à P
cad $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{\varphi}$

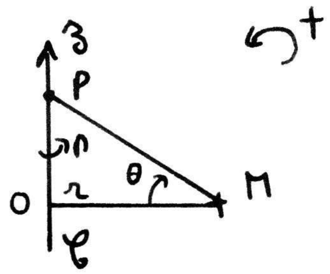
b)



$$\Gamma = \int_{\mathcal{L}} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \int_{\mathcal{L}} v(r)\, dl = 2\pi r\, v(r)$$

d'où $\boxed{\vec{v}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{\varphi}}$

c) Biot et Savart en 3D :



$$\vec{v}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}} \vec{\tau} \wedge \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|^3}\, ds$$

d'où $\vec{v}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\mathcal{C}} \vec{\tau} \wedge \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3}\, ds = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{\vec{MP} \wedge \vec{dl}}{MP^3}$ où $\vec{dl}$ est l'élément différentiel sur $\mathcal{C}$

$\overline{OP} = -r\,\mathrm{tg}\,\theta \qquad \vec{dl} = d\overline{OP}\,\vec{\tau} = \left(-\frac{r}{\cos^2\theta}\right) d\theta\, \vec{\tau}$

$PM = \frac{r}{\cos\theta} \qquad \vec{MP} \wedge \vec{\tau} = \vec{MO} \wedge \vec{\tau} = r\,\vec{\varphi}$

$$\frac{\vec{MP} \wedge \vec{dl}}{|PM|^3} = -\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)^3 \left(\frac{r}{\cos^2\theta}\right) d\theta\ \vec{MP} \wedge \vec{\tau}$$

$$= -\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)^3 \frac{r}{\cos^2\theta}\, r\,\vec{\varphi}\, d\theta = -\frac{\cos\theta}{r}\, d\theta\, \vec{\varphi}$$

D'où $\vec{v}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\vec{\varphi}}{r}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -\cos\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\,\vec{\varphi}}{2\pi r}$

$\boxed{\vec{v}(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{\varphi}}$

Biot et Savart en 2D : $\vec{\omega} = \Gamma \delta_0 \vec{z}$

$$\vec{v}(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \vec{\omega} \wedge \frac{x-\xi}{|x-\xi|^2} \, d\xi$$

$$= \lim_{i \to \infty} \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \vec{\omega_i} \wedge \frac{x-\xi}{|x-\xi|^2} \, d\xi$$

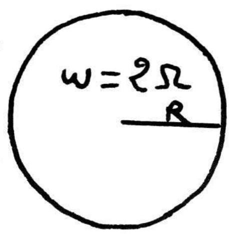
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{i \to \infty} \left\{ \iint_{R^2} \vec{\omega}_i \, d\xi \right\} \wedge \left\{ \frac{x-\xi}{|x-\xi|^2} \right\}_{r=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Gamma \vec{z} \wedge \frac{x}{|x|^2} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\varphi}$$

Donc $\boxed{\vec{v}(M) = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \vec{\varphi}}$

③ Rotation d'une colonne de fluide :

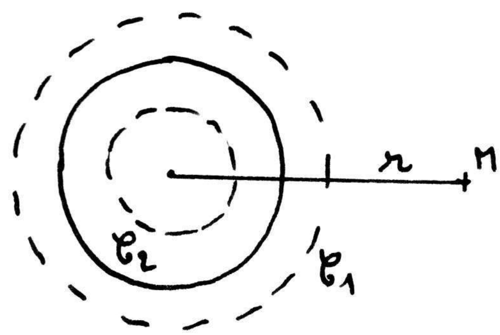
a) disque de vorticité



$\omega = 0$

Coordonnées polaires (r, θ) et vecteurs $(\vec{r}, \vec{\theta})$

+ Circulation et théo de Stokes :



symétries $\Rightarrow \vec{v} = v(r)\vec{\theta}$

si $r > R$: $\Gamma = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint \vec{\omega} \cdot \vec{dS} = (2\Omega)\pi R^2$

$= v \, 2\pi r$ d'où $v = \dfrac{\Omega R^2}{r}$

si $r < R$: $\Gamma = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint \vec{\omega} \cdot \vec{dS} = 2\Omega\pi r^2$

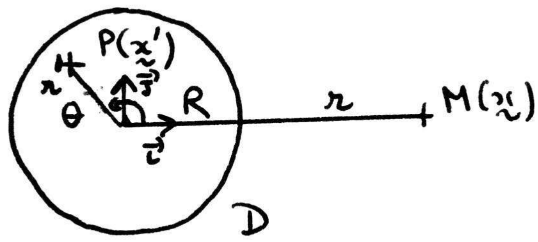
$= v \, 2\pi r$ d'où $v = \Omega r$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{\Omega R^2}{r} \text{ si } r > R \\ &= \Omega r \text{ si } r < R \end{aligned}}$$

$\vec{v} = v(r)\vec{\theta}$

+ <u>Biot et Savart :</u>



$$\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_D \vec{\omega} \wedge \frac{x-x'}{|x-x'|^2}\, dS$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\Omega\, \vec{z} \wedge \int_D \frac{x-x'}{|x-x'|^2}\, dS$$

$$\underset{\sim}{x} = \left|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}} \qquad \underset{\sim}{x}' = \left|\begin{matrix} r'\cos\theta \\ r'\sin\theta \end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}} \qquad x - x' = \left|\begin{matrix} r - r'\cos\theta \\ -r'\sin\theta \end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}}$$

$$|x-x'|^2 = (x-x')\cdot(x-x')$$
$$= (r - r'\cos\theta)^2 + r'\sin\theta$$
$$= r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta = d$$

$$\frac{x-x'}{|x-x'|^2} = \left|\begin{matrix} \frac{r - r'\cos\theta}{d} \\ -\frac{r'\sin\theta}{d} \end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}}$$

Or $\int_D -\frac{r'\sin\theta}{d}\, dS = 0$ car $-\frac{r'\sin\theta}{d}$ est impaire d'où :

$$\vec{z} \wedge \int_D \frac{x-x'}{|x-x'|^2}\, dS = (\vec{z}\wedge\vec{i}) \int_D \frac{r - r'\cos\theta}{d}\, dS$$

D'où $\vec{v}(x) = \vec{\theta}\, \frac{\Omega}{\pi} \int_D \frac{r - r'\cos\theta}{d}\, dS = v\,\vec{\theta}$

$$v = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{r - r'\cos\theta}{d}\, r'dr'd\theta = \frac{\Omega R}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{\tilde{r} - r'\cos\theta}{\tilde{d}}\, r'dr'd\theta$$

où on a posé $\tilde{d} = \tilde{r}^2 + r'^2 - 2\tilde{r}\, r'\cos\theta$

et $\tilde{r} = r/R$

$$v = \frac{\Omega R}{\pi} \int_0^1 dr' \int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}' - \cos\theta}{\bar{r}'^2 + 1 - 2\bar{r}'\cos\theta}\, d\theta \qquad \text{où } \bar{r}' = \tilde{r}/r'$$

Or $\int_0^{2\pi} \frac{\bar{r}' - \cos\theta}{\bar{r}'^2 + 1 - 2\bar{r}'\cos\theta}\, d\theta = 0$ si $\bar{r}' < 1$ cad si $\tilde{r} < r'$

$= +\frac{2\pi}{\bar{r}'}$ si $\bar{r}' > 1$ cad si $\tilde{r} > r'$

Si $r > R$:

on a $\tilde{r} > 1$, donc $\tilde{r} > 1 > r'$ et alors $v = \frac{\Omega R}{\pi} \int_0^1 \frac{2\pi}{\tilde{r}'} dr'$

$$= \frac{\Omega R}{\pi} \int_0^1 \frac{2\pi r'}{\tilde{r}} dr' = \left(\frac{2\pi R}{r}\frac{1}{2}\right) \frac{\Omega R}{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi R}{r}\right) \frac{\Omega R}{\pi} = \frac{\Omega R^2}{r}$$

Si $r < R$:

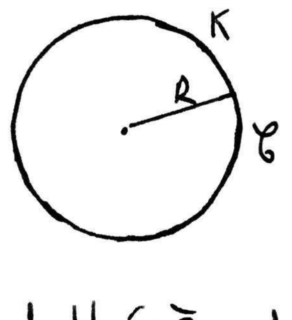
on a $\tilde{r} < 1$, alors

$$v = \frac{\Omega R}{\pi} \left(\int_0^{\tilde{r}} dr' \frac{2\pi}{\tilde{r}'} + \int_{\tilde{r}}^1 dr' \times 0 \right) = \frac{\Omega R}{\pi} \left(\int_0^{\tilde{r}} r' dr' \right) \frac{2\pi}{\tilde{r}}$$

$$= \frac{\Omega R}{\pi} \frac{2\pi}{\tilde{r}} \frac{\tilde{r}^2}{2} = \frac{\Omega R}{\pi} (\pi \tilde{r}) = \Omega r$$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\Omega R^2}{r} \vec{\theta} \text{ si } r > R \\ &= \Omega r \vec{\theta} \text{ si } r < R \end{aligned}}$$

b) nappe circulaire de vorticité :



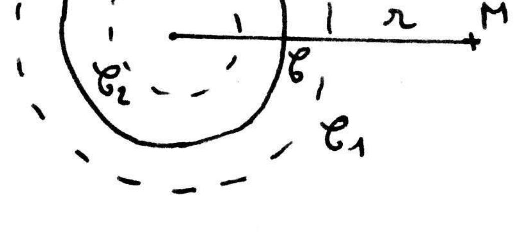
$\vec{\omega} = K \delta_{\mathcal{C}} \vec{z}$

+ Circulation et théorème de Stokes : symétries $\Rightarrow \vec{v} = v(r) \vec{\theta}$

si $r > R$:

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_{D_1} \vec{\omega} \cdot \vec{ds} = \int_{\mathcal{C}} K \, dl$$
$$= K \, 2\pi R$$
$$= v \, 2\pi r$$

d'où $v = \frac{KR}{r}$



si $r<R$:

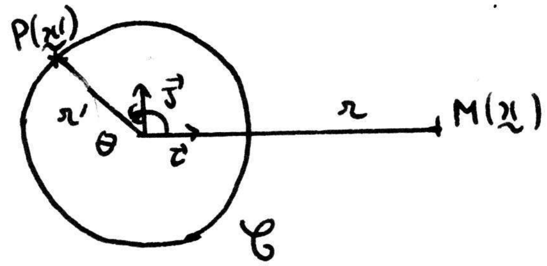
$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{v}\cdot\vec{dl} = \iint_{D_2} \vec{\omega}\cdot dS = 0$$

$= 2\pi r v$

d'où $v = 0$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{KB}{r} \quad \text{si } r>R \\ &= 0 \quad \text{si } r<R \end{aligned}}$$
$\vec{v} = v(r)\,\vec{\theta}$

+ Biot et Savart :



$$\vec{v}(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \vec{\omega}\wedge\frac{x-x'}{|x-x'|^2}\,dS$$

$$= \frac{K}{2\pi}\vec{z}\wedge\int_{\mathcal{C}}\frac{x-x'}{|x-x'|^2}\,ds$$

$$= \frac{K}{2\pi}R\,\vec{z}\wedge\int_0^{2\pi}\frac{x-x'}{|x-x'|^2}\,d\theta \quad \text{car } ds = R\,d\theta$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\frac{r'\sin\theta}{d}\,d\theta = 0$ car $-\dfrac{r'\sin\theta}{d}$ est impaire d'où

$$\vec{z}\wedge\int_0^{2\pi}\frac{x-x'}{|x-x'|^2}\,d\theta = (\vec{z}\wedge\vec{i})\int_0^{2\pi}\frac{r-r'\cos\theta}{d}\,d\theta$$

D'où $\displaystyle\vec{v}(x) = \vec{\theta}\,\frac{KR}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r-r'\cos\theta}{d}\,d\theta = v\,\vec{\theta}$

$$v = \frac{KR}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r-r'\cos\theta}{d}\,d\theta = \left(\frac{KR}{2\pi}\right)\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{r}-r'\cos\theta}{\tilde{d}}\,d\theta \quad \text{en } r'=1$$

où $\tilde{d} = \tilde{r}^2 + r'^2 - 2\tilde{r}r'\cos\theta$

et $\tilde{r} = r/R$

$$= \left(\frac{KR}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{r}-\cos\theta}{\tilde{r}^2+1-2\tilde{r}\cos\theta}\,d\theta$$

D'où :

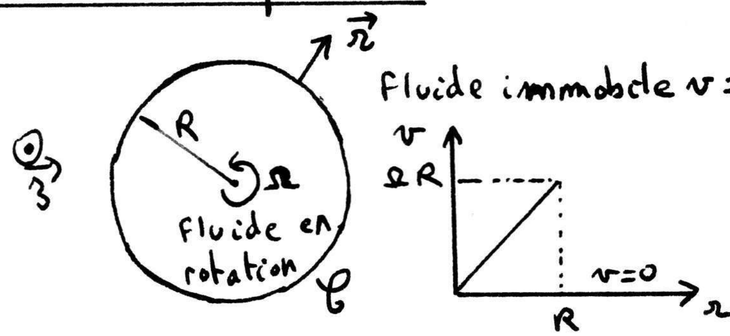
$$v = \left(\frac{KR}{2\pi}\right) 2\left[\tilde{r}\,\frac{\pi}{1-\tilde{r}^2} - \frac{\pi\tilde{r}}{1-\tilde{r}^2}\right] = 0 \text{ si } \tilde{r} < 1$$

$$= \left(\frac{KR}{2\pi}\right) 2\left[\tilde{r}\,\frac{\pi}{(\tilde{r}^2-1)\tilde{r}} - \frac{\pi}{(\tilde{r}^2-1)\tilde{r}}\right] = \left(\frac{KR}{2\pi}\right)\frac{2\pi}{\tilde{r}} \text{ si } \tilde{r} > 1$$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{KR}{r}\vec{\theta} \quad \text{si } r > R \\ &= 0 \quad\quad \text{si } r < R \end{aligned}}$$

c) Rotation d'une colonne de fluide :



- champ de vorticité :

$r<R$: $\vec{\omega} = \text{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\vec{z} = 2\Omega\vec{z}$ $\quad \boxed{\vec{\omega} = 2\Omega\vec{z}}$

$r>R$: $\vec{\omega} = \text{rot}\,\vec{v} = 0$ $\quad \boxed{\vec{\omega} = 0}$

$r=R$: on utilise $\text{rot}\,T_{\vec{v}} = T_{\text{rot}\,\vec{v}} + \vec{r} \wedge [\![\vec{v}]\!]\,\delta_{\mathcal{C}}$

$$[\![\vec{v}]\!] = 0 - \Omega R\vec{\theta}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\omega} = -\Omega R\,\delta_{\mathcal{C}}\,\vec{z}}$$

Sur $\mathcal{C}$ il y a une nappe tourbillon d'intensité $K = -\Omega R$

- Théorème de Stokes : on sommes les résultats de a et b avec $K = -\Omega R$

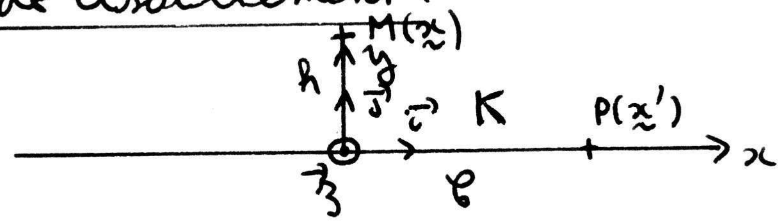
On obtient : $\vec{v} = \frac{\Omega R^2\vec{\theta}}{r} - \frac{\Omega R^2}{r}\vec{\theta} = 0$ si $r>R$

$= \Omega r\vec{\theta} + 0 = \Omega r\vec{\theta}$ si $r<R$

D'où $\quad \boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= 0 \text{ si } r>R \\ &= \Omega r\vec{\theta} \text{ si } r<R \end{aligned}}$

- Biot et Savart : même chose que ci-dessus.

④ Couche de cisaillement :



$$\vec{\omega} = K\,\delta_{\mathcal{C}}\,\vec{z}$$

Remarque : on ne peut plus utiliser le théorème de Stokes

Écrivons Biot et Savart :

$$\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \vec{\omega}\wedge \frac{\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'}{|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'|^2}\,dS$$

$$= \frac{K}{2\pi}\,\vec{z}\wedge\int_{\mathcal{C}} \frac{\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'}{|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'|^2}\,ds$$

$$\underset{\sim}{x} = \left|\begin{matrix}0\\ h\end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}} \qquad \underset{\sim}{x}' = \left|\begin{matrix}x'\\ 0\end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}} \qquad \underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}' = \left|\begin{matrix}-x'\\ h\end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}} \qquad |\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'|^2 = x'^2+h^2$$

$$\frac{\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'}{|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}'|^2} = \left|\begin{matrix}\dfrac{-x'}{x'^2+h^2}\\[2ex] \dfrac{h}{x'^2+h^2}\end{matrix}\right._{\vec{i},\vec{j}}$$

Or $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{-x'}{x'^2+h^2}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x'}{x'^2+h^2}\,dx' = 0$ car $\dfrac{-x'}{x'^2+h^2}$ est impaire.

D'où $\displaystyle \vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \frac{K}{2\pi}\,\vec{z}\wedge\vec{j}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{x'^2+h^2}\,dx' = -\frac{K}{2\pi}\,\vec{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{x'^2+h^2}\,dx'$

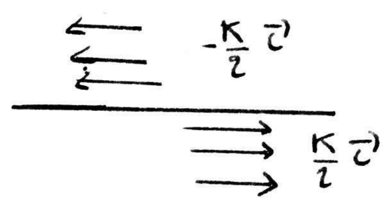
$$\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = v\,\vec{i}$$

$$v = -\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{x'^2+h^2}\,dx' = -\frac{K}{2\pi}\,2h\int_0^{+\infty}\frac{dx'}{x'^2+h^2}$$

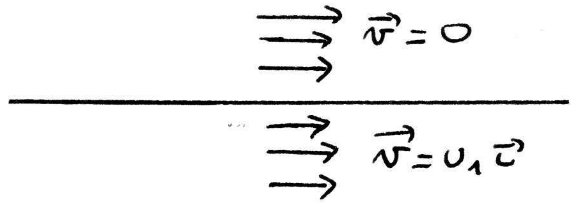
$$= -\frac{K}{\pi}\,\mathrm{sgn}(h)\int_0^{+\infty}\frac{dx'}{x'^2+1} = -\frac{K}{\pi}\,\mathrm{sgn}(h)\left[\mathrm{Arctg}\,x'\right]_0^{\infty} = -\frac{K}{\pi}\,\mathrm{sgn}(h)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{K}{2}\,\mathrm{sgn}(h)$$ où sgn est la fonction signe

D'où
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= -\frac{K}{2}\,\vec{i} \text{ si } h>0\\ &= \frac{K}{2}\,\vec{i} \text{ si } h<0\end{aligned}}$$



Remarque : L'écoulement suivant :

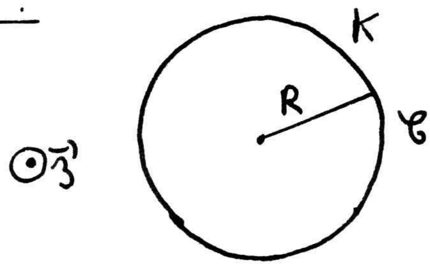


est donc une nappe de vorticité d'intensité $K = U_1$ dans un écoulement de background (potentiel) : $\vec v_b = \frac{U_1}{2}\vec\imath$

$$\vec v = -\frac{U_1}{2}\vec\imath + \frac{U_1}{2}\vec\imath = 0 \text{ si } h>0$$

$$= \frac{U_1}{2}\vec\imath + \frac{U_1}{2}\vec\imath = U_1\vec\imath \text{ si } h<0$$

⑤ Jet circulaire :



coordonnées polaires (r,θ)

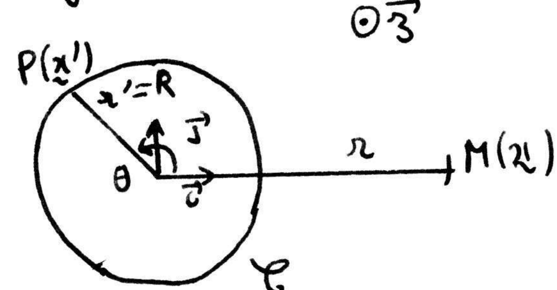
vecteurs associés $(\vec r, \vec\theta)$

$\vec\omega = K\,\delta_{\mathcal C}\,\vec\theta$

symétries $\Rightarrow$ $\vec v$ est suivant $\vec z$; on ne peut plus utiliser le théorème de Stokes.

Ecrivons Biot et Savart :

$$v(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \vec\omega \wedge \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}\,dS = \frac{K}{2\pi}\int_{\mathcal C} \frac{\vec\theta\wedge(\underline{x}-\underline{x}')}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}\,ds$$



$$\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} = \left|\begin{array}{l} \frac{r-R\cos\theta}{d} \\ -R\frac{\sin\theta}{d}\end{array}\right._{\vec\imath,\vec\jmath} \qquad \vec\theta = \left|\begin{array}{l} -\sin\theta \\ +\cos\theta\end{array}\right._{\vec\imath,\vec\jmath}$$

où $d = r^2+R^2-2rR\cos\theta$

D'où $$\vec\theta\wedge\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} = -\frac{(r-R\cos\theta)\cos\theta - R\sin^2\theta}{d}\vec z = -\frac{r\cos\theta - R}{d}\vec z$$

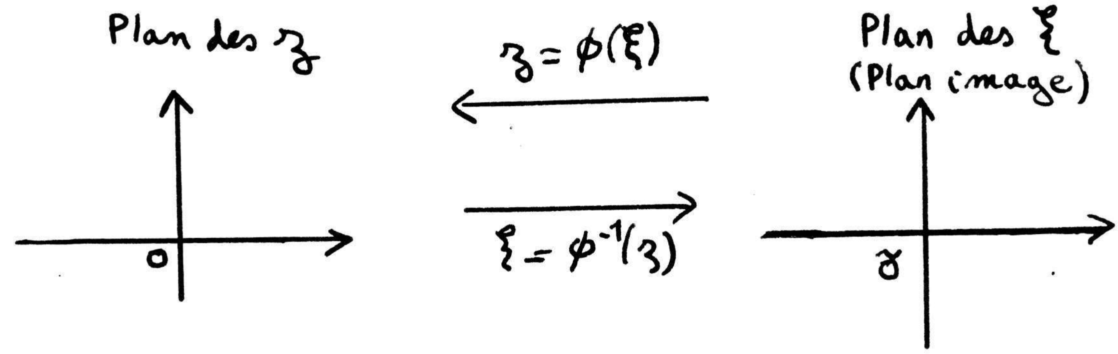
$$v(\underline{x}) = \frac{K}{2\pi}\vec z\int_{\mathcal C} -R\,\frac{(r\cos\theta - R)}{d}\,d\theta = \frac{K}{2\pi}\vec z\int_0^{2\pi} -\frac{\hat r\cos\theta - 1}{\hat r^2+1-2\hat r\cos\theta}\,d\theta \quad \text{où } \hat r = \frac{r}{R}$$

$$= -\vec z\,\frac{K}{2\pi}\,2\left(\frac{\hat r\pi\hat r}{1-\hat r^2} - \frac{\pi}{1-\hat r^2}\right) = -\vec z K(-1) = K\vec z \text{ si } r<R$$

$$= -\vec z\,\frac{K}{2\pi}\,2\left(\hat r\frac{\pi}{(\hat r^2-1)\hat r} - \frac{\pi}{\hat r^2-1}\right) = 0 \text{ si } r>R \text{ D'où } \boxed{\begin{array}{l}\vec v = 0 \text{ si } r>R \\ = K\vec z \text{ si } r<R\end{array}}$$

Chapitre 2

I Transformations Conformes



$f(z)$ = potentiel complexe de l'écoulement

$w = u - iv = f'$ = vitesse complexe

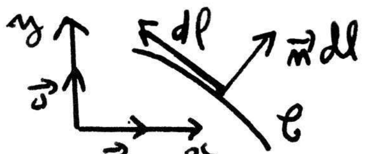
$z = x + iy$

$\tilde{f}(\xi) = f(\phi(\xi))$ = potentiel complexe de l'écoulement image.

$\tilde{w} = \tilde{u} - i\tilde{v} = \tilde{f}'$ = vitesse complexe

1

• Expression de $\Gamma + iQ$ dans P_z :



$$\vec{d\ell} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j}} = dx + i\,dy$$

$$\vec{n}\,d\ell = \vec{d\ell} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} = \begin{vmatrix} dy \\ -dx \\ 0 \end{vmatrix} = -i(dx + i\,dy)$$

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j}} \qquad dz = dx + i\,dy$$

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_{\mathcal{C}} u\,dx + v\,dy$$

$$Q = \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \vec{n}\,d\ell = \int_{\mathcal{C}} u\,dy - v\,dx$$

D'où $$\boxed{\Gamma + iQ = \int_{\mathcal{C}} (u - iv)\,dz = \int_{\mathcal{C}} w(z)\,dz}$$

- Expression de $\Gamma + i Q$ dans P_ξ :

$$\Gamma + iQ = \int_{\mathcal{C}} f' dz = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \tilde{f}' d\xi = \tilde{\Gamma} + i\tilde{Q} \quad \text{car } \frac{df}{dz} = \frac{d\tilde{f}}{d\xi}\frac{d\xi}{dz}$$

$$\boxed{\Gamma + iQ = \tilde{\Gamma} + i\tilde{Q}}$$

② Transformation de la force :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_{\mathcal{C}} [f'(z)]^2 dz$$

$$= \frac{i\rho}{2}\int_{\tilde{\mathcal{C}}} [\tilde{f}'(\xi)]^2 \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 \frac{dz}{d\xi} d\xi$$

$$\boxed{F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_{\tilde{\mathcal{C}}} [\tilde{f}'(\xi)]^2 \frac{d\xi}{\phi'(\xi)}} \neq \tilde{F_x} + i\tilde{F_y}$$

③ Point singulier en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

si z est proche de z_0, on a : $z - z_0 = \phi(\xi) - \phi(\xi_0) = \dfrac{\phi(\xi) - \phi(\xi_0)}{\xi - \xi_0}(\xi - \xi_0)$

$$\simeq \phi'(\xi_0)(\xi - \xi_0) \quad \text{avec } \phi'(\xi_0) \neq 0$$

et donc $\tilde{f}(\xi) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n [\phi'(\xi_0)]^n (\xi - \xi_0)^n$ pour ξ proche de ξ_0

Exemple : Source-tourbillon d'intensité complexe I

$$f(z) = \frac{I}{2\pi}\log(z - z_0)$$

On a $\tilde{f}(\xi) = \dfrac{I}{2\pi}\log(\xi - \xi_0) + \dfrac{I}{2\pi}\log\phi'(\xi_0)$ pour ξ proche de ξ_0

La source tourbillon est transformée en une source tourbillon de même intensité.

④ Densité d'energie:

$$E = \int_\Omega |f'(z)|^2 \, dx\, dy .$$

$$z = x + iy = \phi(\xi) = \phi(\tilde{x} + i\tilde{y})$$
$$= P(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\, Q(\tilde{x}, \tilde{y})$$

$$dx\, dy = J\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}$$

où $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial P}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial Q}{\partial \tilde{y}} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2$ car ϕ est holomorphe

$= |\phi'(\xi)|^2$ car $\phi'(\xi) = \alpha + i\beta$.

On a donc $d\Omega = dx\, dy = |\phi'(\xi)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y} = \left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y}$

D'où $E = \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{f}'(\xi)|^2 \left|\frac{d\xi}{dz}\right|^2 \left|\frac{dz}{d\xi}\right|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y}$

$= \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{f}'(\xi)|^2 d\tilde{x}\, d\tilde{y} = \tilde{E}$

$$\boxed{E = \tilde{E}}$$

II Recherche d'écoulements - Forces:

Soit f_1 un potentiel complexe d'écoulement

① Théorème des images:

Soit $f(z) = f_1(z) + \overline{f_1(\bar{z})}$

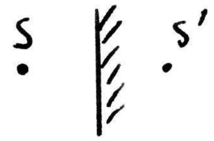
Si $z = x \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = f(x) = f_1(x) + \overline{f_1(x)} \in \mathbb{R}$

, d'où $f(x) = \varphi + i\psi \in \mathbb{R}$ et donc $\psi = 0$

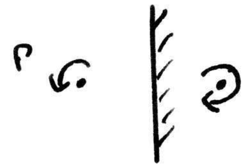
Pour l'écoulement de potentiel complexe $f(z)$, l'axe des réels est une ligne de courant.

Exemples d'application :

- écoulement source plan



- écoulement tourbillon plan



② Théorème du cercle :

Soit $\mathcal{C}(O,a)$ un cercle de rayon a centré en O.

Soit $f(z) = f_1(z) + \overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}$ un potentiel d'écoulement construit à partir de f_1.

Si $z = a e^{i\theta}$, z est sur $\mathcal{C}$ et on a :

$$f(z) = f(ae^{i\theta}) = f_1(ae^{i\theta}) + \overline{f_1\left(\frac{a^2}{a e^{-i\theta}}\right)}$$

$$= f_1(ae^{i\theta}) + \overline{f_1(a e^{i\theta})} \in \mathbb{R}.$$

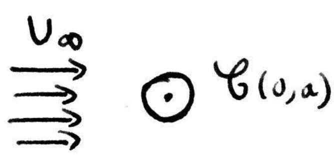
d'où $f(z) = \varphi + i\psi \in \mathbb{R}$ pour $z \in \mathcal{C}$

$\psi = 0$ pour $z \in \mathcal{C}$

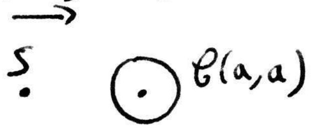
Pour l'écoulement de potentiel complexe $f(z)$, le cercle $\mathcal{C}(0,a)$ est une ligne de courant.

Exemples d'application :

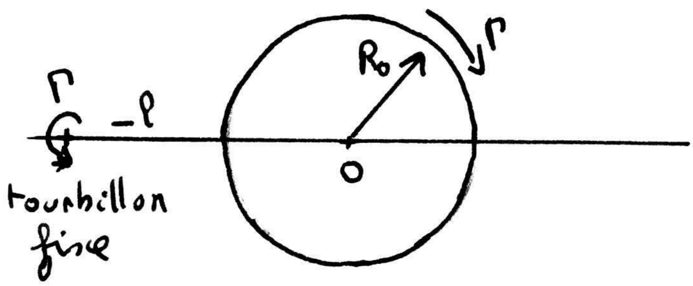
- écoulement uniforme + disque :



- écoulement source - disque



③ Écoulement tourbillon - disque :



On prend $f_1(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi} \log(z-z_0)$ avec $z_0 = -l$

C'est un tourbillon situé en $-l$

$$\overline{f_1\left(\frac{R_0^2}{z}\right)} = \frac{\Gamma i}{2\pi} \overline{\log\left(\frac{R_0^2}{z}+l\right)}$$

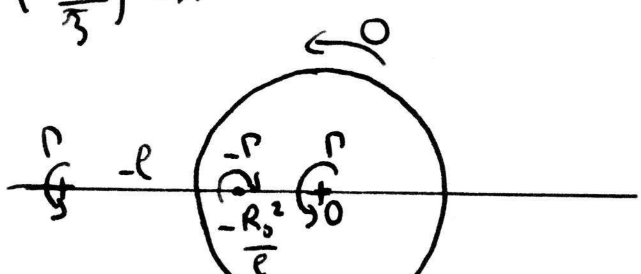
$$= \frac{\Gamma i}{2\pi} \log\left(\frac{R_0^2}{z}+l\right) \quad \text{car } \overline{\log a} = \log \bar{a}$$

$$= \frac{\Gamma i}{2\pi} \log(R_0^2 + lz) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \log z$$

$$= \frac{\Gamma i}{2\pi} \log\left(z + \frac{R_0^2}{l}\right) - \frac{\Gamma i}{2\pi} \log z$$

où on a laissé tomber la constante $\frac{\Gamma i}{2\pi} \log l$ car un potentiel est défini à une constante près.

$\tilde{f} = f_1 + \overline{f_1\left(\frac{R_0^2}{z}\right)}$ et l'écoulement suivant :



Si on rajoute un tourbillon d'intensité quelconque en O, le fait que $\mathcal{C}(O, R_0)$ soit une ligne de courant est conservé. On obtient la circulation désirée autour du disque en rajoutant le tourbillon de potentiel $\frac{\Gamma i}{2\pi} \log z$ à l'écoulement précédent.

L'écoulement recherché a donc pour potentiel :

$$\boxed{f(z) = -\frac{\Gamma i}{2\pi}\log(z+\ell) + \frac{\Gamma i}{2\pi}\log\left(z+\frac{R_0^2}{\ell}\right)}$$

④ Force par Blasius :

Soit $z_0 = -\ell$ et $z_0' = -\frac{R_0^2}{\ell}$ la position des deux tourbillons de l'écoulement précédent

On a $z_0 \overline{z_0'} = R_0^2$.

On utilise la formule de Blasius :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_{\mathcal{C}} [f'(z)]^2 \, dz$$

$$= \left(\frac{i\rho}{2}\right) 2i\pi \text{ Résidu}\left((f')^2, z_0'\right)$$

Or $f'(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_0'}\right)$

$$[f'(z)]^2 = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z-z_0')^2} - \frac{2}{(z-z_0)(z-z_0')}\right]$$

$$\text{Résidu} = \left.\frac{\partial (f')^2 (z-z_0')^2}{\partial z}\right|_{z_0'} = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left[\frac{\partial \frac{[(z-z_0')]^2}{(z-z_0)}}{\partial z} - 2\frac{\partial \frac{(z-z_0')}{z-z_0}}{\partial z}\right] \text{ en } z_0'$$

$$= -2\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{z_0'-z_0}{(z_0'-z_0)^2} = 2\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{z_0'-z_0}$$

D'où $F_x - iF_y = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\frac{1}{z_0'-z_0} = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\frac{\overline{z_0}}{R_0^2-|z_0|^2} = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\frac{\ell}{\ell^2-R_0^2} < 0$

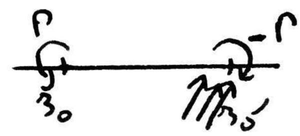
$$\boxed{F_x - iF_y = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\frac{\ell}{\ell^2 - R_0^2}} < 0$$

Le tourbillon exerce donc une force attractive sur le disque.

⑤ <u>Force par Kutta-Joukovsky</u> :

c'est l'action du tourbillon en z_0 sur celui en z_0'

$$\vec{F} = F_x + iF_y = -i\rho(-\Gamma)\,\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty} = \rho\Gamma \begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \wedge \vec{V}_\infty$$



$$\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty$$

Fonction de courant Ψ créé par le tourbillon en z_0 :

$$\Psi = \mathrm{Im}\left[-\frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z - z_0)\right] = -\frac{\Gamma}{4\pi}\log|z - z_0|^2$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\log\left((x+\ell)^2 + y^2\right)$$

vitesse en z_0' associée :

$$\overline{\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty} = \vec{V}_\infty = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} \end{vmatrix}_{(\vec{i},\,\vec{j})} \quad \text{en } z_0'$$

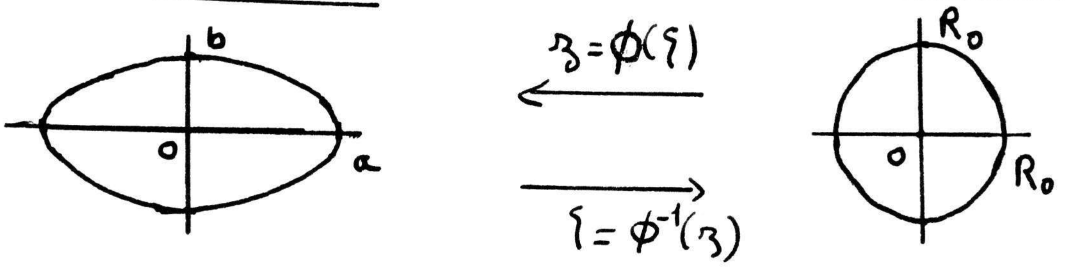
D'où $\vec{F} = \rho\Gamma\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi_{\text{en } z_0'} = -\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi} \begin{vmatrix} \dfrac{2(x+\ell)}{(x+\ell)^2 + y^2} \\ \dfrac{2y}{(x+\ell)^2 + y^2} \end{vmatrix}$ en $x = -\frac{R_0^2}{\ell}$, $y = 0$

D'où $\boxed{\vec{F} = F\vec{i}}$ avec $F = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\left[\frac{-R_0^2/\ell + \ell}{(-R_0^2/\ell + \ell)^2}\right] = -\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\frac{\ell}{\ell^2 - R_0^2} < 0$

Chapitre 3

I. Transformée conforme et ellipse :

Plan des z — Plan des ξ



Soit ξ sur le cercle $\mathcal{C}(O,R_0)$: $\xi = R_0 e^{i\theta}$

On a $z = \phi(\xi) = A\xi + \frac{B}{\xi} = AR_0 e^{i\theta} + \frac{B}{R_0} e^{-i\theta}$

Posons $z = x+iy$; il vient alors :

$$\begin{cases} x = \left(AR_0 + \frac{B}{R_0}\right)\cos\theta \\ y = \left(AR_0 - \frac{B}{R_0}\right)\sin\theta \end{cases}$$

On reconnaît l'équation parametrée d'une ellipse.

D'où $\begin{cases} a = AR_0 + \frac{B}{R_0} \\ \text{et } b = AR_0 - \frac{B}{R_0} \end{cases}$ qui donne $\boxed{\begin{matrix} A = \frac{a+b}{2R_0} \\ B = \frac{a-b}{2} R_0 \end{matrix}}$

Points singuliers :

$$\phi'(\xi) = A - \frac{B}{\xi^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \xi^2 = \frac{B}{A} = \frac{a-b}{a+b} R_0^2$$

Les points singuliers sont donc $\boxed{\xi = \pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\, R_0}$

$z^2 = \left(A\xi + \frac{B}{\xi}\right)^2 = \frac{(A\xi^2+B)^2}{\xi^2} = 4\frac{B^2}{B}A = 4AB = a^2-b^2$ $\boxed{z = \pm\sqrt{a^2-b^2}}$

$b^2 = (1-e^2)a^2 \quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow \quad z = \pm c$. foyer

II La Formule de Joukovsky :

$\frac{df}{dz}$ est développable en série de Laurent en $z=0$ d'où :

$$\boxed{\frac{df}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots}$$

On a $\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{df}{dz}\right) = A_0$ d'où $\boxed{A_0 = \left(\frac{df}{dz}\right)_\infty}$

De plus on sait que $\Gamma = \int_\mathcal{C} \frac{df}{dz} dz$ (si $Q=0$)

Or $\int_\mathcal{C} \frac{dz}{z} = 2i\pi$ et $\int_\mathcal{C} \frac{dz}{z^n} = 0$, d'où $\boxed{A_1 = \frac{\Gamma}{2i\pi}}$

Appliquons la formule de Blasius :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_\mathcal{C}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2}\int_\mathcal{C}\left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots\right)^2 dz$$

$$= \frac{i\rho}{2}(2i\pi)(2A_0A_1) = i\rho A_0 \Gamma$$

D'où $\boxed{F_x - iF_y = i\rho\Gamma\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty = i\rho\Gamma\overline{V_\infty}}$ qui est la formule de Joukovsky.

III Efforts sur une plaque plane :

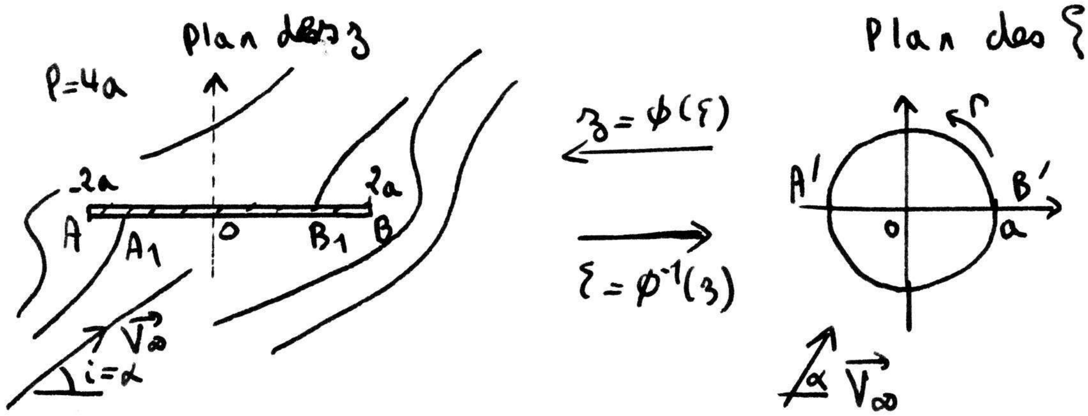
1) $z = \varphi(\xi) = \xi + \frac{a^2}{\xi}$.

On remplace (a, b, R_0) par $(2a, 0, a)$ dans l'exercice de l'ellipse I et on obtient bien $\begin{cases} A = \frac{2a}{2a} = 1 \\ B = \frac{2a}{2}a = a^2 \end{cases}$

La transformée conforme $\phi(\xi) = \xi + \frac{a^2}{\xi}$ transforme donc le cercle de rayon a en une plaque plane de longueur 4a.

Points singuliers : $z = \pm a$ notés A et B

$\xi = \pm a$ notés A' et B'.



Il y a conservation des angles et les lignes de courant sont transformées en lignes de courant sauf aux points singuliers.

2) Potentiel complexe $\tilde{f}(\xi)$ de l'écoulement autour du cercle :

Lorsque l'écoulement arrive horizontalement (plan des ξ') :

$$\tilde{f}(\xi') = V_\infty\left(\xi' + \frac{a^2}{\xi'}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log \xi' \quad \text{(avec le théorème du cercle)}$$

On fait alors une rotation d'angle α : $\xi = \xi' e^{i\alpha}$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{f}(\xi) &= V_\infty\left(\xi e^{-i\alpha} + a^2 \frac{e^{i\alpha}}{\xi}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\xi \\ &= \left(\overline{V_\infty}\,\xi + a^2 \frac{V_\infty}{\xi}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log\xi\end{aligned}}$$

(où $V_\infty = V_\infty e^{i\alpha}$)

Remarque :

Quand $\xi \to \infty$ on a $z = \phi(\xi) \sim \xi$ et donc ϕ se comporte comme l'identité. La vitesse en l'infini $\vec{V_\infty}$ a donc la même inclinaison α dans le plan des ξ et des z.

3) Points d'arrêt :

Ils sont déterminés par $\tilde{f}'(\xi) = 0$

$$f'(\xi) = V_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\xi^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\xi} = 0$$

Comme ξ est sur le cercle, on pose alors $\xi = a e^{i\beta}$

Il vient alors :

$$V_\infty \left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{e^{2i\beta}}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{a e^{i\beta}} = 0$$

$$V_\infty \left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\beta)}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\beta} = 0$$

$$V_\infty \left(1 - e^{i(\alpha-\beta)2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{i(\alpha-\beta)} = 0$$

On annule la partie imaginaire.

$$-V_\infty \sin(2[\alpha-\beta]) - \frac{\Gamma}{2\pi a}\cos(\alpha-\beta) = 0$$

$$-\frac{\Gamma}{2\pi a}\cos(\alpha-\beta) = V_\infty 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Rem : l'annulation de la partie réel donne la m̂ relation

D'où $$\boxed{\sin(\beta-\alpha) = \frac{\Gamma}{4\pi a V_\infty}}$$

Cette relation donne la position des points d'arrêts A_1' et B_1' dans P_ξ et donc celle de A_1 et B_1 dans P_z par application de ϕ.

Condition pour avoir des points d'arrets : $\boxed{\Gamma < 4\pi a V_\infty}$

4) La condition de Joukovsky impose au point B_1 d'être en B et donc au point B_1' d'être en B'.

On a donc $\beta = 0$ ce qui donne $\boxed{\Gamma = -\sin\alpha \, 4\pi a V_\infty}$ à l'aide de la relation précédente.

Cherchons alors la position de A_1 :

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin(0-\alpha) \Rightarrow \beta - \alpha = \pi - (-\alpha) = \pi + \alpha$$
$$\Rightarrow \beta = \pi + 2\alpha$$

$$A_1' = a e^{i(\pi+2\alpha)} = -a e^{2\alpha i}$$

$$\text{D'où } A_1 = -a e^{2\alpha i} - a e^{-2\alpha i} = -a(e^{2\alpha i} + e^{-2\alpha i})$$
$$= -2a\cos 2\alpha \qquad \boxed{A_1 = -2a\cos 2\alpha}$$

5) Vitesse en tout point de l'espace :

$$f' = \frac{\tilde{f}'}{\phi'(\xi)} = \left[V_\infty\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\xi^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\xi}\right]\frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{\xi^2}\right)}$$

Vitesse sur la plaque : On pose alors $\xi = a e^{i\beta}$

$$f' = \frac{V_\infty\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}e^{-i2\beta}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{e^{-i\beta}}{a}}{1 - e^{-2i\beta}} = \frac{V_\infty\left(e^{i(\beta-\alpha)} - e^{-i(\beta-\alpha)}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{a}}{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}$$

$$= V_\infty \frac{2\sin(\beta-\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{a}}{2\sin\beta} = \left(V_\infty 2\sin(\beta-\alpha) + 2\sin\alpha V_\infty\right)\frac{1}{2\sin\beta}$$

$$= \frac{V_\infty}{\sin\beta}\left[\sin(\beta-\alpha) + \sin\alpha\right] = \frac{V_\infty}{\sin\beta}\left[\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\right]$$

$$= V_\infty\left(\cos\alpha + \sin\alpha\,\frac{(1-\cos\beta)}{\sin\beta}\right)$$

Il vient donc $\boxed{f' = V_\infty \left(\cos\alpha + \tan\frac{\beta}{2} \sin\alpha \right)}$

où la plaque est paramétrée par β avec $z = a(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = 2a\cos\beta$

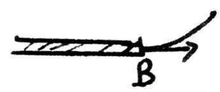
$$\boxed{z = 2a\cos\beta}$$

Remarquons que $\dfrac{\cos(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\cos\frac{\beta}{2}} = \dfrac{\cos\alpha\cos\frac{\beta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

$$= \cos\alpha + \tan\frac{\beta}{2}\sin\alpha$$

d'où $\boxed{f' = V_\infty \dfrac{\cos(\alpha - \frac{\beta}{2})}{\cos\frac{\beta}{2}}}$

<u>En B</u> : $\beta = 0$ d'où $f' = V_\infty \cos\alpha \neq 0$



<u>En A</u> : $\beta = \pi$ d'où $f' = +\infty$

6) <u>Force excercée sur la plaque</u> :

On utilise la formule de Joukovsky :

$$F_x - iF_y = i\rho\Gamma\overline{V_\infty} = i\rho\Gamma V_\infty e^{-i\alpha}$$

d'où $F_x + iF_y = -i\rho\Gamma V_\infty e^{i\alpha} = -\rho\Gamma V_\infty e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$

<u>Finalement</u> :

$$\boxed{\vec{F} = \left|\begin{array}{l} 4\pi\rho V_\infty^2 a\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ 4\pi\rho V_\infty^2 a\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{array}\right._{\vec{\imath},\vec{\jmath}}}$$

après avoir remplacé Γ par son expression

ou de façon equivalente

$$\vec{F} = \left|\begin{array}{l} -4\pi\rho V_\infty^2 a\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ 4\pi\rho V_\infty^2 a\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \end{array}\right._{\vec{\imath},\vec{\jmath}}.$$

7) Calcul de la force à l'aide de Blasius :

$$F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_{\mathcal{C}} [\tilde{f}'(\xi)]^2 \frac{d\xi}{\phi'(\xi)} \quad \text{(chapitre 2, I2)}$$

$$\frac{(\tilde{f}')^2}{\phi'(\xi)} = \left[V_\infty\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\xi^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\xi}\right]^2 \frac{\xi^2}{(\xi-a)(\xi+a)}$$

$$(\tilde{f}')^2 = V_\infty^2 e^{-2i\alpha} + V_\infty^2 a^4 \frac{e^{2i\alpha}}{\xi^4} - 2\frac{V_\infty^2 a^2}{\xi^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}\frac{1}{\xi^2} - 2iV_\infty\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\xi^2}\right)\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\xi}$$

$$= V_\infty^2\left(e^{-2i\alpha} + a^4\frac{e^{2i\alpha}}{\xi^4} - \frac{2a^2}{\xi^2}\right) - \frac{\Gamma^2}{4\pi\xi^2} - \frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{\xi}V_\infty e^{-i\alpha} i + i\frac{\Gamma}{\pi}V_\infty a^2\frac{e^{i\alpha}}{\xi^3}$$

Si on voit la plaque comme une ellipse applatie, il y a 3 points singuliers à l'interieur de la plaque où l'on doit calculer des résidus : $\xi = 0$, $\xi = a$ et $\xi = -a$

a) Résidu en $\xi = 0$: c'est la limite : $\lim_{\xi \to 0} \xi \frac{(\tilde{f}')^2}{\phi'(\xi)}$

Il est déterminé par le terme en ξ^{-3}

$$\text{résidu}\left(\frac{\tilde{f}'^2}{\phi'}, 0\right) = \frac{i\Gamma V_\infty}{\pi} a^2 e^{i\alpha} \frac{1}{(0-a)(0+a)} = -i\frac{\Gamma V_\infty e^{i\alpha}}{\pi}$$

La contribution de cette singularité à la force est donc :

$$F_{1x} - iF_{1y} = \frac{\rho i}{2}(2i\pi)\left(-i\frac{V_\infty \Gamma e^{i\alpha}}{\pi}\right) = i\rho\Gamma V_\infty e^{i\alpha}$$

Remarque : si $\alpha \neq 0$ $\vec{F_1}$ est orthogonale à la plaque

$$F_{1x} + iF_{1y} = -i\rho\Gamma V_\infty e^{-i\alpha}$$

$$\boxed{\vec{F_1} = \begin{vmatrix} 4\pi \rho V_\infty^2 a \sin\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \\ 4\pi \rho V_\infty^2 a \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \end{vmatrix}_{\vec{i},\vec{j}}}$$

b) <u>résidu en $\xi = a$:</u>

Comme le point d'arret B_1 est en B, on a $\tilde{f}'(\xi=a)=0$

, c'est à dire que $\tilde{f}'(\xi=a) = (\xi-a)\times g$ avec g régulière en $\xi = a$.

et donc $\dfrac{(\tilde{f}'(\xi))^2}{\phi'}$ a une singularité eliminable en $\xi=0$

$$\text{residu}\left(\frac{\tilde{f}'^2}{\phi'}, a\right) = 0$$

Ce point singulier ne contribue pas à la force.

c) <u>résidu en $\xi = -a$:</u>

$$\tilde{f}'(\xi=-a) = V_\infty\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{a} = i\left(-V_\infty 2\sin\alpha + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{a}\right)$$

$$= i\left(-V_\infty 2\sin\alpha - 2\sin\alpha V_\infty\right) = -i4V_\infty \sin\alpha$$

$$\tilde{f}'^2(\xi=-a) = -16 V_\infty^2 \sin^2\alpha$$

$\xi=-a$ est donc un pôle simple et alors

$$\text{résidu}\left(\frac{(\tilde{f}')^2}{\phi'}, -a\right) = -16V_\infty^2 \sin^2\alpha \left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$= 8V_\infty^2 \sin^2\alpha\, a$$

La contribution de cette singularité à la force

est donc :

$$F_{2x} - iF_{2y} = \frac{\rho i}{2}(2i\pi)\left[8V_\infty^2 \sin^2\alpha\, a\right] = -8\pi V_\infty^2 \sin^2\alpha\, \rho a$$

$$= -8\pi \rho V_\infty^2 a \sin\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

d'où <u>$F_{2x} + iF_{2y} = -8\pi \rho V_\infty^2 a \sin\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$</u>

d) <u>Force sur la plaque</u> : on a $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, ce qui redonne le résultat de 6).

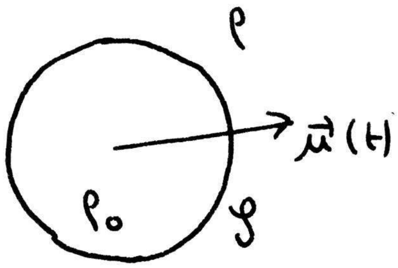
Chapitre 4

I. Mouvement d'une sphère dans un liquide :

① Sphère soumise à un mouvement donné $\vec{V}_\infty(t)$ de fluide à l'infini.

$\vec{V}_\infty(t)$ donné

$g = 0$



a) Afin de pouvoir appliquer la théorie des masses ajoutées, on se place dans le référentiel $\mathcal{R}^r$ qui laisse le fluide immobile en l'∞. On se place donc dans un référentiel qui se déplace à la vitesse $\vec{V}_\infty(t)$ par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}^a$. Soit alors $\tilde{\vec{u}}(t)$ la vitesse de la sphère dans $\mathcal{R}^r$. Il vient $\vec{u} = \tilde{\vec{u}} + \vec{V}_\infty(t)$.

On note $M = \rho_0 \Lambda$ la masse de la sphère

$M_a = \frac{1}{2} \rho \Lambda$ la masse ajoutée

où Λ est le volume de la sphère.

On remarque que dans $\mathcal{R}^r$ existe une force d'inertie volumique, dont le champ (comparable à un champ de gravitation) a pour accélération $-\dot{\vec{V}}_\infty$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\frac{p}{\rho} + \vec{g}$

$\hookrightarrow \frac{d\hat{v}}{dt} = -\text{grad}\frac{p}{\rho} \underbrace{- \dot{\vec{V}_\infty} + \vec{g}}$

Cette force a une action :

- volumique sur la sphère (équivalente à un poids) :

$$M(-\dot{\vec{V}_\infty})$$

- volumique sur le fluide, qui génère un champ de pression responsable d'une force de contact sur la sphère (équivalente à une poussée d'Archimède :

$$-(2M_a)(-\dot{\vec{V}_\infty})$$

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la sphère dans $\mathcal{R}^r$ est donc :

$$\boxed{M\dot{\vec{u}} = \underbrace{-M\dot{\vec{V}_\infty}}_{\text{"poids"}} + \underbrace{2M_a\dot{\vec{V}_\infty}}_{\text{"Poussée d'Archimède"}} - \underbrace{M_a\dot{\vec{u}}}_{\text{masse ajoutée}}}$$

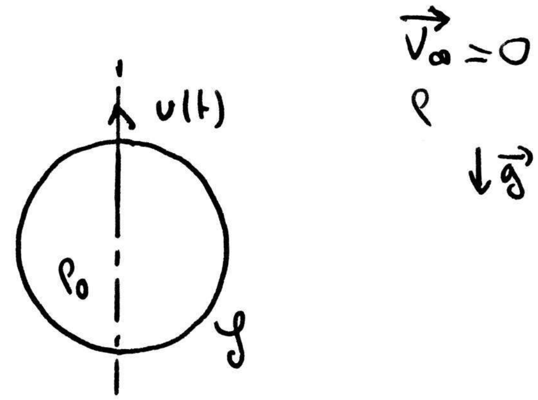
On voit bien la signification de la terminologie "masse ajoutée" puisque cette masse se rajoute à la masse pesante dans l'écriture de la relation fondamentale de la dynamique (au niveau du terme d'accélération)

b) Comme on a $\vec{u} = \tilde{\vec{v}} + \vec{V}_\infty(t)$, il vient

$$(M + M_a)\dot{\vec{u}} = 3M_a\dot{\vec{V}_\infty}$$

D'où $\boxed{\vec{u} = \frac{3\rho}{2\rho_0 + \rho}\vec{V}_\infty(t)}$

② Sphère en mouvement vertical dans un champ de pesanteur :



Comme précédement, on note :

$M = \rho_0 \Lambda$ la masse de la bille.

$M_a = \frac{1}{2} \rho \Lambda$ la masse ajoutée

où Λ est le volume de la sphère.

a) On écrit alors la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la sphère :

$$\boxed{M \dot{\vec{u}} = \underbrace{\underbrace{M\vec{g}}_{\text{poids}}}_{\text{Force à distance}} \underbrace{- \underbrace{2M_a\vec{g}}_{\text{Archimède}} \underbrace{- M_a \dot{\vec{u}}}_{\text{masse ajoutée}}}_{\text{Forces de contact}}}$$

D'où en projetant : $M\dot{u} = -gM - M_a\dot{u} + g\,2M_a$

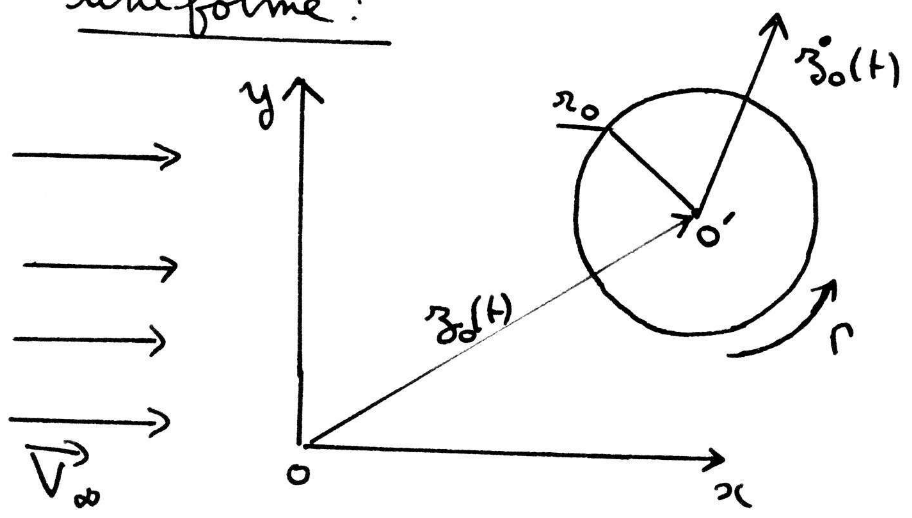
Il vient $\dot{u} = -g \dfrac{M-2M_a}{M+M_a}$, donc $\boxed{u(t) = -g \dfrac{M-2M_a}{M+M_a} t + u(0)}$

b) Hauteur maximale atteinte :

$$u(t_m) = 0 = -g \frac{M-2M_a}{M+M_a} t_m + V_0 \quad \text{d'où} \quad t_m = \frac{M+M_a}{M-2M_a} \frac{V_0}{g}$$

$$h = \frac{1}{2}\left(g \frac{M-2M_a}{M+M_a}\right) t_m^2 = \frac{1}{2} \frac{M+M_a}{M-2M_a} \frac{V_0^2}{g} = \boxed{\frac{1}{4} \frac{2\rho_0+\rho}{\rho_0-\rho} \frac{V_0^2}{g} = h}$$

II Cylindre en rotation dans un écoulement uniforme :



Masse linéique du disque : $M = \rho_0 \pi r_0^2$

Masse ajoutée du disque : $M_a = \rho \pi r_0^2$

1) On suppose le disque fixe positionné en O.
Le potentiel complexe de la vitesse de l'écoulement autour du disque est :

$$\boxed{f(z) = V_\infty\left(z + \frac{r_0^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log z.}$$

2) a) Equation d'Euler dans R^ℓ :

relation de changement de référentiel entre R et R^ℓ :

$z = z^\ell + z_0(t)$

composition des vitesses : $v = v^\ell + \dot{z}_0$

composition des accélérations $a = a^\ell + \ddot{z}_0$

Equation d'Euler dans R : (en irrotationnel)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{v^2}{2} = -\operatorname{grad}\frac{p}{\rho} + \vec{0} \quad \text{si } \vec{g} = 0$$

D'où dans $\mathcal{R}^\ell$:

$$a^\ell = \frac{\partial v^\ell}{\partial t} + \text{grad}\,\frac{v^{\ell 2}}{2} = \vec{a} - \ddot{z}_0$$

$$= -\,\text{grad}\,\frac{p}{\rho} - \ddot{z}_0$$

On pose $\vec{g}^* = -\text{grad}\,(\ddot{z}_0 \cdot \vec{OM}) = -\ddot{z}_0$.

$$\boxed{\frac{\partial v^\ell}{\partial t} = -\,\text{grad}\left(\frac{v^{\ell 2}}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + g^*} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{g}^* = -\ddot{z}_0}$$

b) Dans $\mathcal{R}^\ell$, le disque est fixe et voit arriver un écoulement uniforme $V_\infty - \dot{z}_0(t)$ en l'infini. D'où

$$\boxed{f^\ell(z^\ell) = \overline{(V_\infty - \dot{z}_0)}\, z^\ell + \frac{r_0^2}{z^\ell}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log z^\ell}$$

c) Potentiel complexe dans $\mathcal{R}$:

On a
$$z = z^\ell + z_0(t)$$

$$v = \overline{\frac{df}{dz}} = v^\ell + \dot{z}_0 = \overline{\frac{df^\ell}{dz^\ell}} + \dot{z}_0 \quad \text{d'où} \quad \frac{df}{dz} = \frac{df^\ell}{dz^\ell} + \overline{\dot{z}_0}$$

$$\frac{df}{dz} = V_\infty - \overline{\dot{z}_0} + \overline{\dot{z}_0} - \frac{r_0^2}{z^{\ell 2}}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z^\ell}$$

$$= V_\infty - \frac{r_0^2}{(z - z_0)^2}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(z - z_0)}$$

D'où

$$\boxed{f(z) = V_\infty\, z + \frac{r_0^2}{(z - z_0)}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z - z_0)}$$

d) Potentiel complexe dans $\mathcal{R}^m$:

On a $\quad z^m = z - V_\infty t \quad$ et on pose $\boxed{z_0^m = z_0 - V_\infty t}$

On a $\quad v^m = v - V_\infty = \dfrac{df}{dz} - V_\infty$

c'est à dire $\quad \dfrac{df^m}{dz^m} = \dfrac{df}{dz} - V_\infty$

$$= -\frac{r_0^2}{(z-z_0)^2}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z-z_0}$$

$$= -\frac{r_0^2}{(z^m-z_0^m)^2}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z^m-z_0^m}$$

D'où :

$$\boxed{f^m(z) = \frac{r_0^2}{(z^m - z_0^m)}(V_\infty - \dot{z}_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\log(z^m - z_0^m)}$$

e) Force de contact sur le disque dans $\mathcal{R}^\ell$: $\quad f^\ell = \varphi^\ell + i\psi^\ell$

Bernouilli dans $\mathcal{R}^\ell$: $\quad \rho\dfrac{\partial\varphi^\ell}{\partial t} + \rho\dfrac{v^{\ell 2}}{2} - \rho\vec{g}^{\,a}\cdot\vec{OM} + p = \text{constant}$

Soit $\vec{F}$ la force de contact sur le disque dans $\mathcal{R}^\ell$.

On a $\vec{F} = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} p\,\vec{n}\,ds$ où $\vec{n}$ est la normale intérieure au disque

$$\boxed{\vec{F} = -\int_{\mathcal{C}} \rho\frac{\partial\varphi^\ell}{\partial t}\vec{n}\,ds - \int_{\mathcal{C}} \rho\frac{v^{\ell 2}}{2}\vec{n}\,ds + \int_{\mathcal{C}} \rho\,\vec{g}^{\,a}\cdot\vec{OM}\,\vec{n}\,ds}$$

Reste à calculer ces trois termes.

• $\int_{\mathcal{C}} \rho \vec{g}^{*}.\vec{OM}\, \vec{n}' ds$ est la poussée d'Archimède due

à $\vec{g}^{*} = -\ddot{z}_0$ et donc $\boxed{\int_{\mathcal{C}} \rho g^{*}.\vec{OM}\, \vec{n}' ds = \rho\pi\, r_0^2 \ddot{z}_0 = M_a \ddot{z}_0}$

• $-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{v^{\ell 2}}{2} \vec{n}' ds$ est la force exercée par l'écoulement $f^{\ell}(z^{\ell})$

sur le cercle en considérant le disque fixe

On la calcule à l'aide de la formule de Kutta-Joukovsky :

$$\boxed{-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{v^{\ell 2}}{2} \vec{n}' ds = -i\rho\Gamma(V_\infty - \dot{z}_0)}$$

• Reste à calculer $-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^{\ell}}{\partial t} \vec{n}' ds$. Pour cela, comme $f^{\ell} = \varphi^{\ell} + i\psi^{\ell}$,

on a $\dot{f}^{\ell} = \dot{\varphi}^{\ell} + i\dot{\psi}^{\ell}$ et $\underline{\dot{f}^{\ell} = -\ddot{\bar{z}}_0 z^{\ell} + \frac{r_0^2}{z^{\ell}}(-\ddot{z}_0)}$ en se servant

de l'expression de f^{ℓ} trouvée en b)

Or sur le cercle, on a $z^{\ell} = r_0 e^{i\theta}$ d'où :

$$\dot{f}^{\ell} = -\ddot{\bar{z}}_0 r_0 e^{i\theta} - r_0 e^{-i\theta} \ddot{z}_0$$

$$= -r_0 \left[\overline{\ddot{z}_0 e^{-i\theta}} + \ddot{z}_0 e^{-i\theta}\right] \in \mathbb{R}$$

Comme $f^{\ell} = \varphi^{\ell} + i\psi^{\ell} \in \mathbb{R}$ sur $\mathcal{C}$, on a $\underline{\dot{f}^{\ell} = \dot{\varphi}^{\ell} \text{ sur } \mathcal{C}}$.

Il vient alors :

$$-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t} \vec{n}' ds = -\rho i \int_{\mathcal{C}} f^\ell dz \quad \text{car } \vec{n} ds = i dz$$

$$= -\rho i \int_{\mathcal{C}} \left[-\ddot{z}_0 z + \frac{r_0^2}{z} (-\ddot{z}_0) \right] dz$$

$$= -\rho i \, (2 i \pi) \, r_0^2 (-\ddot{z}_0) = -2 (\rho \pi r_0^2) \ddot{z}_0 = -2 M_a \ddot{z}_0$$

On a donc $\boxed{-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t} \vec{n}' ds = -2 M_a \ddot{z}_0}$

On voit qu'alors $\boxed{-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t} \vec{n}' ds + \int_{\mathcal{C}} \rho \vec{g}^* . \vec{OM} \, \vec{n}' ds = -M_a \ddot{z}_0}$

résultat qu'on se propose de déterminer autrement.

On remarque d'abord que $\frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t}$ ne fait pas intervenir le terme dû à la circulation, et donc on se servira de l'expression de φ^ℓ avec $\Gamma = 0$.

On a : $-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^\ell}{\partial t} \vec{n}' ds + \int_{\mathcal{C}} \rho (-\ddot{z}_0) . \vec{OM} \, \vec{n}' ds$

$$= -\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial [\varphi^\ell + \dot{z}_0 . \vec{OM}]}{\partial t} \vec{n}' ds = \boxed{-\int_{\mathcal{C}} \rho \frac{\partial \varphi^m}{\partial t} \vec{n}' ds}$$

Car comme $v^m = v^\ell + \dot{z}_0 - V_\infty$, $\vec{v}^m = \text{grad} \, \varphi^m$ et $v^\ell = \text{grad} \, \varphi^\ell$, on a $\varphi^m = \varphi^\ell - V_\infty x + \dot{z}_0 . \vec{OM}$

On reconnait alors la force due à la masse ajoutée de l'écoulement sans circulation dans le référentiel R^m, c'est à dire $\underline{-M_a \ddot{z}_0}$

On retrouve donc le résultat que l'on avait obtenu précédemment, en utilisant ici la théorie des masses ajoutées.

On rappelle que :

$M_a = \rho \int_{r=r_0} \varphi^m \frac{\partial \varphi^m}{\partial n} r d\theta$. On peut donc vérifier que

$M_a = \pi r_0^2 \rho$, en remplaçant l'expression de φ^m (à $\Gamma = 0$) obtenue à l'aide à l'aide de f^m (question d), dans cette définition de M_a.

<u>Remarque</u> : on a $\varphi^m = -r_0^2 \left[\dot{x}_0 \left(\frac{x^m - x_0^m}{(x^m - x_0^m)^2 + (y^m - y_0^m)^2} \right) + \dot{y}_0 \left(\frac{y^m - y_0^m}{(x^m - x_0^m)^2 + (y^m - y_0^m)^2} \right) \right]$

expression sur laquelle on retrouve le découplage linéaire entre vitesse du solide et potentiel d'écoulement du fluide.

f) On applique la relation fondamentale de la dynamique au disque dans R^ℓ. Le disque est en équilibre dans ce référentiel et donc :

$$\boxed{0 = \underbrace{-M\ddot{z}_0}_{\text{force d'inertie à distance}} + \underbrace{\vec{F}}_{\text{forces de contact}}}$$

Avec e) on a donc $0 = -M\ddot{z}_0 - i\rho\Gamma(V_\infty - \dot{z}_0) - M_a \ddot{z}_0$

$$\boxed{(M + M_a)\ddot{z}_0 = -i\rho\Gamma(V_\infty - \dot{z}_0)}$$

Expression sur laquelle on voit bien la signification de la dénomination "masse ajoutée"

g) Obtention de la trajectoire :

On pose $\mathcal{M} = M + M_a$

On a $\mathcal{M}\ddot{z}_0 = -i\rho\Gamma(V_\infty - \dot{z}_0)$

$\mathcal{M}\ddot{z}_0 - i\rho\Gamma\dot{z}_0 = -i\rho\Gamma V_\infty$

$\mathcal{M}\dot{Z} - i\rho\Gamma Z = -i\rho\Gamma V_\infty$ en posant $Z = \dot{z}_0$

d'où $Z = V_\infty + (\vec{V_0} - V_\infty)\, e^{\frac{i\rho\Gamma}{\mathcal{M}}t}$ où $\vec{V_0}$ est la vitesse initiale

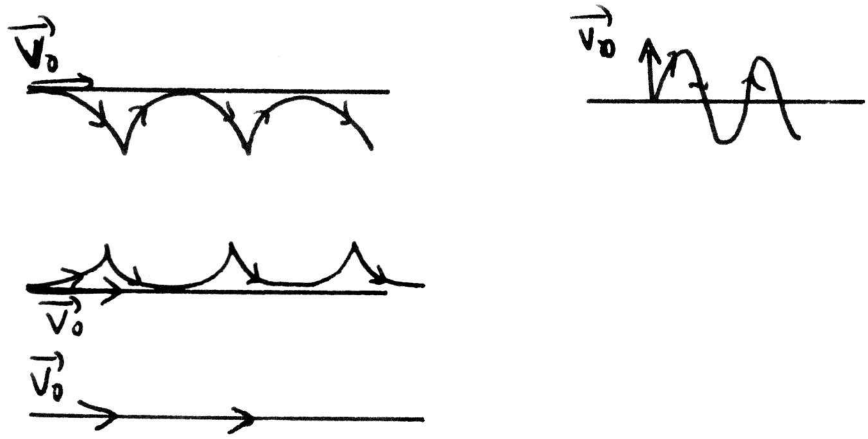
et $$\boxed{z_0 = V_\infty t + (\vec{V_0} - V_\infty)\left(1 - e^{-\frac{i\rho\Gamma}{\mathcal{M}}t}\right)\frac{\mathcal{M}}{i\rho\Gamma}} \quad (1)$$

Soit les différents cas de figures :

$V_0 - V_\infty > 0$
$\Gamma > 0$

$V_0 - V_\infty < 0$
$\Gamma > 0$

$V_0 = V_\infty$



On a des arches de cycloïde.

h) La limite $\rho_0 \to 0$: Alors $\mathcal{M} \to 0$. On a :

$$\boxed{\begin{aligned} z_0 &= V_\infty t + (V_0 - V_\infty)\left(1 - e^{-i\rho\Gamma t^*}\right)\frac{\mathcal{M}}{i\rho\Gamma} \\ \text{et } \dot{z}_0 &= V_\infty - (V_0 - V_\infty)\, e^{i\rho\Gamma t^*} \end{aligned}}$$

où $\boxed{t^* = t/\mathcal{M}}$

Il y a deux temps caractéristiques : t et t^*.

On a utilisé des développements par rapport au petit paramètre $\mathcal{M}$, à deux échelles de temps (Méthode d'échelles Multiples) de la forme $f(t, \mathcal{M}) = f^0(t, t^*) + \mathcal{M} f^{(1)}(t, t^*) + \dots$

Sur (1) lorsqu'on fait lim t fixé, on a une perturbation singulière qui a

Chapitre 5

I. Bateau à mat tournant

a) Calcul de la circulation :

Par définition de la circulation :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{dl} \quad \text{avec} \quad \vec{v} \text{ : vitesse du fluide}$$

$\mathcal{C}$: cercle de rayon r_0 de centre O

$$= \int_{\mathcal{C}} v_\theta(r)\, r\, d\theta = \int_{\mathcal{C}} (\omega_0 r)\, r\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\omega_0 r_0)\, r_0\, d\theta = 2\pi r_0^2 \omega_0$$

où l'on a pris l'écoulement en bloc de fluide à la vitesse ω_0 :

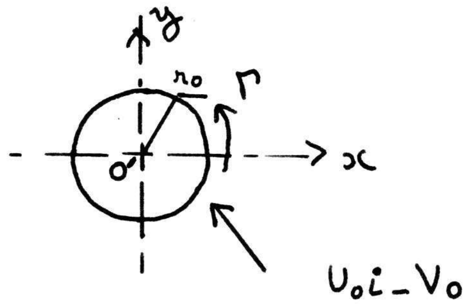
$$\vec{v} = (v_r, v_\theta) \text{ sur le repère polaire } (\vec{r}, \vec{\theta})$$

$$= (0, v_\theta(r)) = (0, \omega_0 r)$$

On a donc le résultat cherché :

$$\boxed{\Gamma = 2\pi r_0^2 \omega_0}$$

b) Potentiel complexe f de l'écoulement dans un repère lié au bateau :



Dans ce référentiel, le cylindre tourne à la vitesse angulaire ω_0 autour d'un point fixe O' et voit un écoulement uniforme $U_0 i - V_0$ à l'infini.

En appliquant le théorème du cercle sur un écoulement uniforme, puis en faisant la rotation adéquate, et enfin en plaçant un point tourbillon d'intensité Γ en O' afin d'avoir la bonne circulation tout en préservant le fait que $\mathcal{C}$ soit une ligne de courant on obtient :

$$f(z) = \overline{V_\infty}\, z + \frac{r_0^2}{z} V_\infty - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z) \text{ avec ici } V_\infty = U_0 i - V_0$$

On a donc

$$\boxed{f(z) = -(V_0 + i\, U_0) z + \frac{r_0^2}{z}(-V_0 + i\, U_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z)}$$

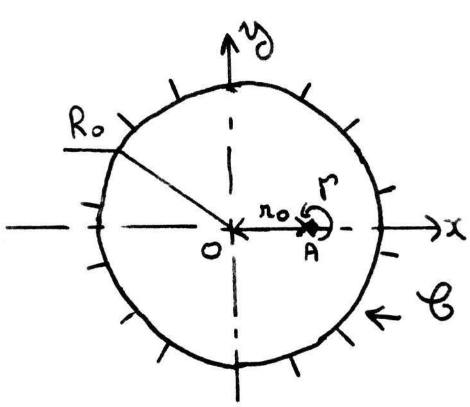
c) La force $\vec{F} = (F_x, F_y)$ exercée par le vent sur le mat est donnée par la formule de <u>Joukovsky</u>:

$$F_x - iF_y = i\rho\Gamma\overline{V_\infty}$$
$$= i\rho\Gamma(-V_0 - iU_0) = \rho\Gamma(U_0 - iV_0)$$

On a donc $\boxed{F_x = \rho\Gamma U_0}$ $\boxed{F_y = \rho\Gamma V_0}$

La <u>force de propulsion</u> est $F_x = \rho\Gamma U_0$. Elle est fonction de la vitesse du vent qui est <u>la cause</u> du mouvement. Diverses réactions compensent la force F_y et s'opposent à F_x afin d'assurer une vitesse constante V_0 du bateau dans notre modelisation simplifiée.

II. <u>Vidange d'un récipient</u>



a) On doit trouver l'écoulement de fluide parfait tel que l'on ait un seul tourbillon fixe Γ en A à l'interieur de $\mathcal{C}$ et tel que le cercle $\mathcal{C}$ soit une ligne de courant. Cet écoulement est bien unique car le domaine interieur à $\mathcal{C}$ est simplement connexe.

Soit $f_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - r_0)$ le potentiel complexe d'un tourbillon placé en A. On sait d'après le théorème du cercle (vu en TD) que $f_2(z) = f_1(z) + \overline{f_1\left(\frac{R_0^2}{\bar{z}}\right)}$ est alors le potentiel d'un écoulement pour lequel $\mathcal{C}$ est une ligne de courant et tel que l'on ait un tourbillon en A d'intensité Γ.

$$f_2(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log(z - r_0) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \overline{\log\left(\frac{R_0^2}{\bar{z}} - r_0\right)}$$

$$= \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[-\log(z - r_0) + \log\left(\overline{\frac{R_0^2}{\bar{z}} - r_0}\right)\right] \text{ car } \log \bar{z} = \overline{\log z}$$

$$= -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left[+\log(z - r_0) + \log z - \log\left(z - \frac{R_0^2}{r_0}\right)\right] \text{ car } f_2 \text{ est}$$

défini à une constante près.

Cet écoulement possède un tourbillon en O. On trouve donc l'écoulement cherché (un seul tourbillon à l'intérieur de $\mathcal{C}$ en A) en supprimant ce tourbillon, cette opération <u>conservant</u> la ligne de courant $\mathcal{C}$.

D'où $$\boxed{f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{z - r_0}{z - \frac{R_0^2}{r_0}}}$$

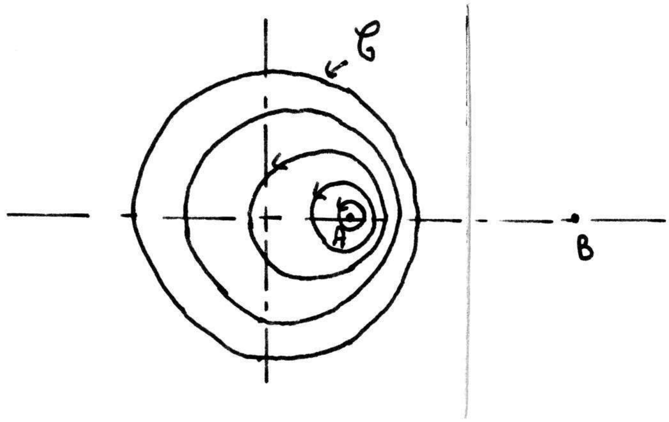
Soit B le point (extérieur à $\mathcal{C}$) d'abscisse $\frac{R_0^2}{r_0}$.

<u>Remarque</u> : D'après le cours p.22 on a directement :

$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{z - z_0}{z - z_0'}\right)$$ avec ici $z_0 = r_0$ et $z_0 z_0' = R_0^2$

d'où $z_0' = \frac{R_0^2}{r_0}$ ce qui redonne le résultat précédent.

b) <u>Allure de l'écoulement</u> :



Fonction de courant :

$f = \phi + i\psi$ d'où $\boxed{\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log \left| \frac{z - z_0}{z - z_0'} \right|}$ $z_0 = r_0$ et $z_0' = \frac{R_0^2}{r_0}$

$\psi = \psi_0$ donne $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k = e^{-\psi_0 \frac{2\pi}{\Gamma}}$ où M est

le point d'affixe z : $M(z)$ et $B(z_0')$

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \quad MA^2 = k^2 MB^2$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA} = k^2 \vec{MB} \cdot \vec{MB}$$

$$(\vec{MG} + \vec{GA})^2 = k^2 (\vec{MG} + \vec{GB})^2$$

$$MG^2 + GA^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA} = k^2 (MG^2 + GB^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GB})$$

On choisit G tel que $\vec{GA} - k^2 \vec{GB} = 0$

Il vient $MG^2 = \frac{k^2 GB^2 - GA^2}{1 - k^2}$

La ligne de courant $\psi = \psi_0$ est donc un cercle de centre G tel que $\vec{GA} - k^2 \vec{GB} = 0$ et de rayon $\frac{1}{k}$ GA où $k = e^{-\psi_0 \frac{2\pi}{\Gamma}}$

c) Soit $\vec{F}$ la force exercée par l'écoulement sur le récipient : $\vec{F} = (F_x, F_y)$.

D'après Blasius : $F_x - iF_y = -\frac{\rho i}{2} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$. (on a mis un signe moins dans cette expression car l'écoulement est ici à l'intérieur de $\mathcal{C}$.)

$$f' = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_0'}\right)$$

$$[f']^2 = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z-z_0')^2} - \frac{2}{(z-z_0)(z-z_0')}\right]$$

$$F_x - iF_y = -\frac{\rho i}{2}\, 2i\pi \text{ Résidu}(f'^2, A)$$
$$= \rho\pi \text{ Résidu}(f'^2, A)$$

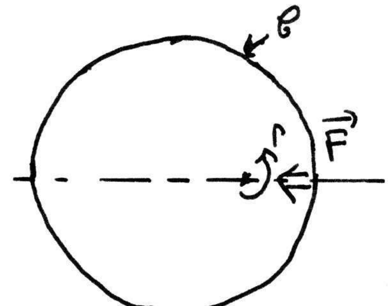
Or $\text{Résidu}(f'^2, A) = \dfrac{\partial f'^2 (z-z_0)^2}{\partial z}$ en z_0

$$= -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2\left[\frac{\partial \frac{(z-z_0)^2}{(z-z_0')^2}}{\partial z} - 2\,\frac{\partial\left(\frac{z-z_0}{z-z_0'}\right)}{\partial z}\right]$$

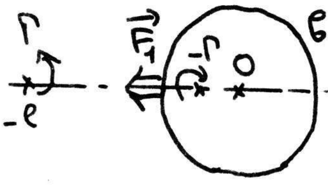
$$= 2\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{z-z_0'}{(z-z_0')^2} = 2\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(z_0-z_0')}$$

$$F_x - iF_y = \rho\,\frac{\Gamma^2}{2\pi}\,\frac{1}{z_0-z_0'} = \frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\frac{1}{r_0 - \frac{R_0^2}{r_0}} < 0$$

D'où : $\underline{F_y = 0}$ et $\boxed{F_x = -\dfrac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\dfrac{1}{\frac{R_0^2}{r_0} - r_0}} < 0$



Remarque 1 : Dans le TD n°2 on avait la situation suivante :



avec une force $F_1 = -\dfrac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\dfrac{1}{\ell - \frac{R_0^2}{\ell}}$

Dans notre cas (intérieur de $\mathcal{C}$) la force cherchée correspond à la réaction de $\vec{F_1}$ et donc $F_x < 0$ et $|F_x| = \dfrac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\dfrac{1}{\ell - \frac{R_0^2}{\ell}} = \dfrac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\,\dfrac{1}{\frac{R_0^2}{r_0} - r_0}$ car $\ell = \dfrac{R_0^2}{r_0}$

et donc $F_x = -\rho\,\dfrac{\Gamma^2}{2\pi}\,\dfrac{1}{\frac{R_0^2}{r_0} - r_0}$ comme précédemment.

Remarque 2 : On aurait pu aussi utiliser l'action d'un tourbillon sur un autre.