- ENSEM
  2ième Année - Filière Mécanique
- Maîtrise de Mécanique

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

EXERCICES ET PROBLEMES
ENONCÉS

Sommaire

- Chapitre 1

  I. Implosion d'une Bulle.
  II. Décomposition d'Helmdtz.
  III. Tourbillons.
  ①. Le filet tourbillon.
  ②. Le filet tourbillon rectiligne.
  ③. Rotation d'une colonne de fluide.
  ④. Couche de cisaillement.
  ⑤. Jet circulaire.

- Chapitre 2

  I. Transformations conformes
  II. Recherche d'écoulements - Forces

- Chapitre 3

  I. Transformée conforme et ellipse
  II. La Formule de Joukovsky
  III. Efforts sur une plaque plane

- Chapitre 4

  I. Mouvement d'une sphère dans un liquide
  II. Cylindre en rotation dans un écoulement uniforme

- Chapitre 5

  I. Bateau à mat tournant
  II. Vidange d'un récipient

Chapitre 1

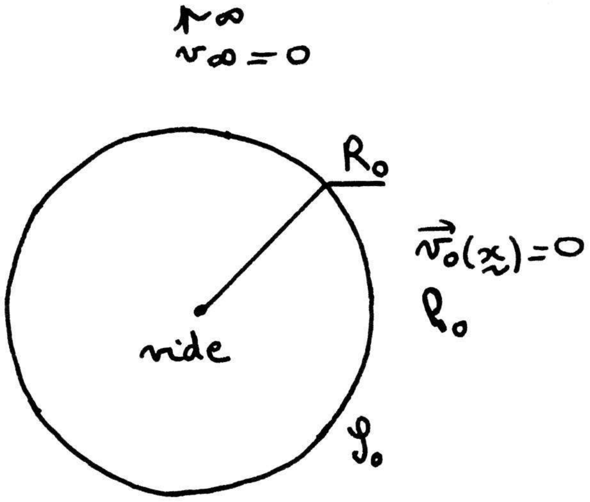
I Implosion d'une Bulle :

On considère, à un instant donné $t=0$, un fluide immobile qui remplit l'espace $\mathbb{R}^3$ privé d'une sphère $\mathcal{S}_0$ de rayon R_0 centrée autour du point O, pris comme origine de l'espace.

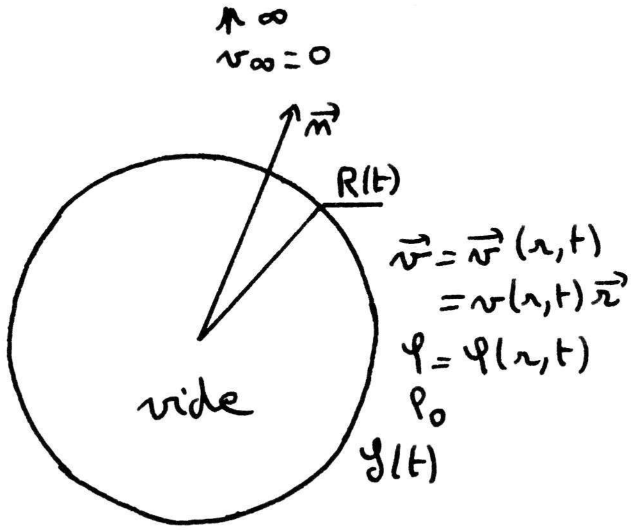
La sphère $\mathcal{S}_0$ est vide de matière ; son interface $\partial\mathcal{S}_0$ est libre et on prendra la tension superficielle nulle. Cette configuration correspond à une bulle (ou une cavité) dans un liquide.

On utilisera le modèle du fluide parfait incompressible, en écoulement irrotationnel, et on négligera les effets de pesanteur. On se propose de déterminer l'évolution de cette configuration initiale afin de trouver le temps τ de remplissage de la cavité.

On prend les conditions aux limites, vitesse nulle et pression constante p_∞ en ∞. Soient (r,θ,φ) les coordonnées sphériques et $(\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi})$ les vecteurs associés. On va chercher une solution du problème à symétrie sphérique : fonctions ne dépendant que de r et du temps t et champ de vitesse uniquement radial.



à $t=0$



à t

① Ecrire le système d'équations correspondant au modèle étudié (fluide parfait incompressible irrotationnel) pour ce problème sans faire l'hypothèse de symétrie sphérique et sans projeter sur (r, θ, φ). On écrira $F(x,t)=0$ l'équation de l'interface et $\vec{v}_i$ sa vitesse.

② Simplifier ce système via l'hypothèse de symétrie sphérique et projeter sur les coordonnées.

Remarque : en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, s = [\partial s/\partial r,\ 1/r\ \partial s/\partial \theta,\ (1/r/\sin\theta)\ \partial s/\partial \varphi] \text{ sur } (\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{\varphi})$$

$$\Delta s = (1/r^2)[\partial/\partial r(r^2\, \partial s/\partial r)] + (1/r^2/\sin\theta)[\partial/\partial\theta(\sin\theta(\partial s/\partial\theta))] + (1/r^2/\sin^2\theta)\ \partial^2 s/\partial\varphi^2$$

③ Résoudre l'équation de Laplace pour le potentiel φ, écrite en ②, et faire apparaître le débit $-q(t)$ à t fixé, à travers ∂S dans l'expression de φ. Reconnaître alors l'expression d'un puit instantanné.

$q \geq 0$

④ Former alors une équation pour $R(t)$

⑤ Donner une longueur caractéristique du problème, puis une vitesse caractéristique. En déduire un temps caractéristique et adimensionnaliser l'équation obtenue en ④ (Ecrire $R^*(t^*)$ et t^* le rayon et le temps adimensionnalisés).

solution : $$\boxed{-R^* \frac{d^2R^*}{dt^{*2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{dR^*}{dt^*}\right)^2 = 1} \qquad (1)$$

5) On pose $\xi = \frac{dR^*}{dt^*}$ et $\eta = R^*$. Dans l'équation (1) faire le changement de variable et de fonction :

$$\left| \begin{matrix} t^* \\ R^* \end{matrix} \right. \longrightarrow \left| \begin{matrix} \eta \\ \xi \end{matrix} \right.$$

Solution : $$\boxed{3f + \eta \frac{df}{d\eta} + 2 = 0} \qquad (2)$$

où on a posé $f = \xi^2$

Résoudre (2) et en déduire une nouvelle équation différentielle pour R^*

solution $$\boxed{\left(\frac{dR^*}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{R^{*3}} - 1\right)} \qquad (3)$$

Trouver t^* en fonction de R^* sous la forme d'une intégralle et représenter son graphe numériquement (calculettes, matlab, maple, ...). Trouver alors le temps τ d'implosion.

solution :

$$\tau = -\sqrt{\frac{3}{2}} \int_1^0 \frac{d\bar{R}^*}{\sqrt{1/\bar{R}^{*3} - 1}} \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int u^{-1/6}(1-u)^{-1/2} du$$

⑦ Résoudre (1) numériquement (matlab, maple, ...) et comparer à la résolution précédente.

⑧ Calculer $\lim_{t=+\infty} \frac{dR}{dt}$ et $\lim_{t=+\infty} q(t)$ Commenter.

<u>solution</u> : il y a apparition d'une singularité en temps fini dans notre modèle et on peut rajouter de la compressibilité pour améliorer le modèle.

II <u>Décomposition</u> d'Helmoltz :

Soit $\vec{v}$ un champ de vitesse régulier définie sur le domaine Ω et soit φ^* le potentiel qui minimise $\int_\Omega |\vec{v} - \text{grad}\,\varphi'|^2 dx$. On a donc : $\int_\Omega |\vec{v} - \text{grad}\,\varphi^*|^2 dx = \min_{\varphi'} \int_\Omega |\vec{v} - \text{grad}\,\varphi'|^2 dx$

et on pose $\vec{v} = \vec{\text{grad}}\,\varphi^* + \vec{u}^*$

Montrer que φ^* est le potentiel φ de la décomposition d'Helmotz.

<u>Remarque</u> : $\text{div}(V\vec{a}) = V\,\text{div}\,\vec{a} + (\text{grad}\,\vec{v})\cdot\vec{a}$

III Tourbillons :

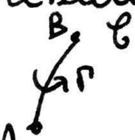
① Le filet tourbillon.

Soit le champ de vorticité $\vec{\omega} = \Gamma \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}$ concentré sur une courbe $\mathcal{C}$ avec $\langle \delta_{\mathcal{C}} \vec{\tau}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \varphi \vec{\tau} \, ds$

où : - s est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$

- $\vec{\tau}$ et le vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$.

$\vec{\omega}$ est donc une distribution de Dirac concentrée sur une courbe.



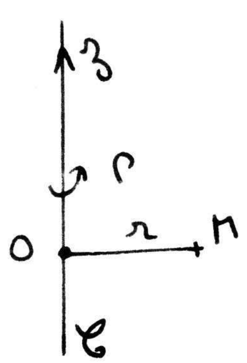
a) Interpréter $\vec{\omega}$ comme la limite d'une suite de distribution $(T_{\vec{\omega}_k})$ associée à une suite de champs de vorticité $\vec{\omega}_i$

b) Calculer le flux de $\vec{\omega}$ à travers une surface orthogonale à $\mathcal{C}$

c) Vérifier que $\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$ si A et B sont à l'infini.

d) Donner l'expression de Biot et Savart pour ce champ concentré.

② Le filet tourbillon rectiligne :



coordonnées cylindriques (r, φ, z) et vecteurs associés $(\vec{r}, \vec{\varphi}, \vec{z})$

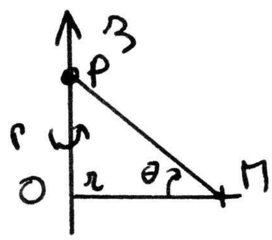
La distribution : $\vec{\omega} = \Gamma \, \delta_{r=0}$ définit le tourbillon rectiligne

Soit $\vec{v}$ le champ de vitesse associé à cette vorticité.

a) Par des principes de symétrie, montrer que $\vec{v}$ ne dépend que de r et est dirigé suivant $\vec{\varphi}$

b) Se servir de la définition de la circulation et du théorème de Stokes pour trouver l'expression de la vitesse.

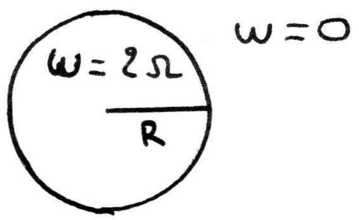
c) Réobtenir cette expression à l'aide de la formule de Biot et Savart en 3D puis Biot et Savart en 2D



z abscisse curviligne

③ Rotation d'une colonne de fluide :

a) Soit un disque de vorticité uniforme 2Ω dans le plan.



Trouver le champ de vitesse v associé :

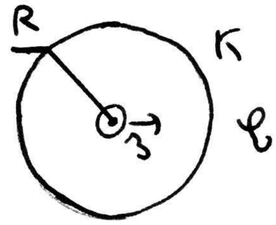
- par l'expression de la circulation et le théorème de Stokes
- par Biot et Savart

Remarque :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nx \, dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad \text{si } a^2 < 1$$

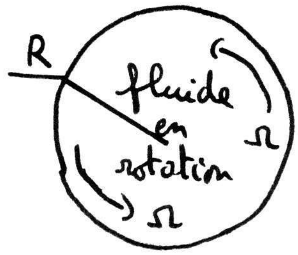
$$= \frac{\pi}{(a^2-1)a^n} \quad \text{si } a^2 > 1$$

b) Soit $\vec{\omega} = K\, \delta_{\mathcal{C}}\, \vec{z}$, la nappe de vorticité en 2D d'intensité K et de forme circulaire $\mathcal{C}$.



Même question et remarque qu'au a)

c) On considère un disque de fluide qui tourne à la vitesse Ω dans un fluide immobile.



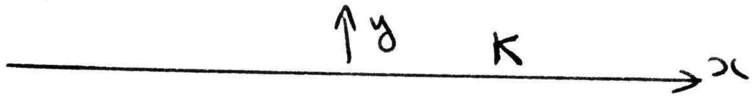
fluide immobile

Determiner :

- le champ de vorticité de l'écoulement
- le champ de vitesse associé à cette vorticité par Biot et Savart (se servir de a et b) et avec le théo. de Stokes.

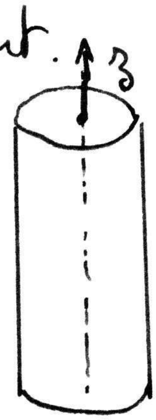
④ <u>Couche de cisaillement</u> :

Soit ~~la~~ nappe de vorticité en 2D d'intensité K : $\omega = K\, \delta_{y=0}$



Trouver le champ de vitesse associé par Biot et Savart.

⑤ <u>Jet circulaire</u> :



soit un cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $\vec{z}$, les coordonnées cylindriques (r, φ, z) et les vecteurs associés $(\vec{r}, \vec{\varphi}, \vec{z})$

soit la nappe de vorticité d'intensité K sur ce cylindre : $\vec{\omega} = K\, \delta_{\mathcal{C}}\, \vec{\varphi}$

Trouver le champ de vitesse associé par la formule de Biot et Savart.

Chapitre 2

I TRANSFORMATIONS CONFORMES

Soit ϕ une transformation conforme.

① Montrez que la circulation Γ et le débit Q sont conservés par ϕ

② Comment est transformée la force $F_x - iF_y = \frac{i\rho}{2}\int_{\mathcal{C}} [f'(z)]^2\, dz$?

(où f est la fonction potentielle complexe)

③ Montrez qu'un point singulier est transformé en un point singulier de même type (cas de la source, du tourbillon, doublet, ...)

④ Comment est transformée la densité d'énergie $\int_{\Omega} |f'(z)|^2\, dx\,dy$?

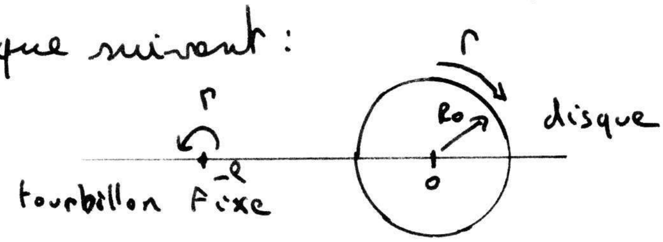
II Recherche d'écoulements – Forces :

Soit f_1 un potentiel complexe d'écoulement

① Montrez que pour $f(z) = f_1(z) + \overline{f_1(\bar{z})}$ l'axe des réels est une ligne de courant (Théo des images) interpréter géométriquement.

② Soit $\mathcal{C}(0,a)$ un cercle de rayon a à l'origine. Montrez que pour $f(z) = f_1(z) + \overline{f_1\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}$, $\mathcal{C}$ est une ligne de courant (Théo du cercle)

③ A partir de ② trouvez le potentiel complexe de l'écoulement tourbillon/disque suivant :

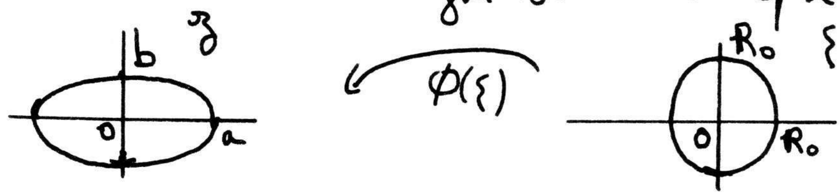


④ Déterminez la force exercée sur le disque à l'aide de la formule de Blasius.

⑤ Retrouvez cette force à l'aide de Kutta Joukovsky.

Chapitre 3

I Trouvez la transformée conforme $\phi(\xi) = A\xi + \frac{B}{\xi}$ qui transforme le cercle de rayon R_0 en l'ellipse :



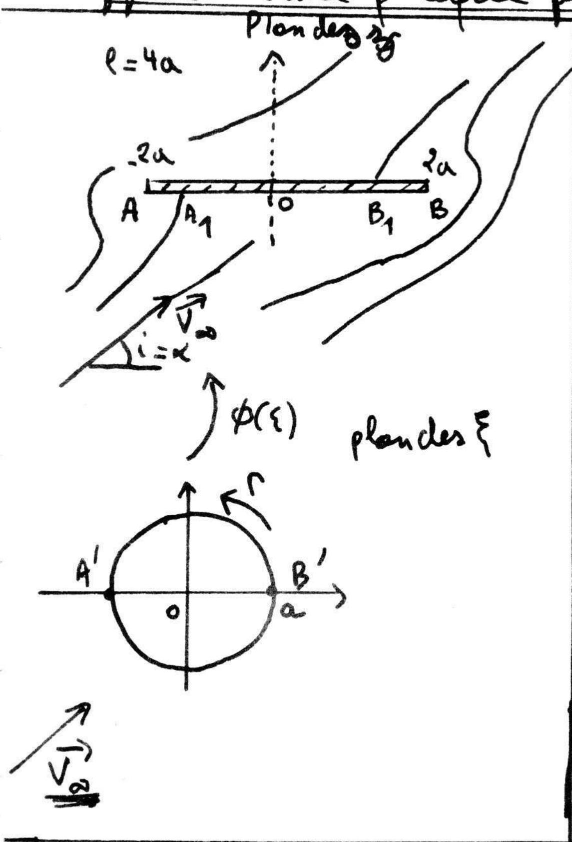
Où sont les points singuliers ($\phi'(\xi) = 0$) ?

II Soit f un potentiel complexe d'écoulement. Montrez que

$$\frac{df}{dz} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots \text{ avec } A_0 = \left(\frac{df}{dz}\right)_\infty \text{ et } A_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$$

En déduire, en utilisant la formule de Blasius, la formule de Joukovsky $F_x - iF_y = i\rho\Gamma\left(\frac{df}{dz}\right)_\infty$

III Efforts sur une plaque plane :



1) Montrez que $z = \phi(\xi) = \xi + \frac{a^2}{\xi}$ transforme le cercle en la plaque plane. Points singuliers ?

2) Donnez le potentiel complexe $\tilde{f}(\xi)$ de l'écoulement autour du cercle

3) Trouvez les points d'arrêts ($\tilde{f}'(\xi) = 0$) sur le cercle

4) Trouvez la circulation Γ à prendre pour satisfaire la condition de Joukovsky

5) Déterminez la vitesse en tout point de la plaque.

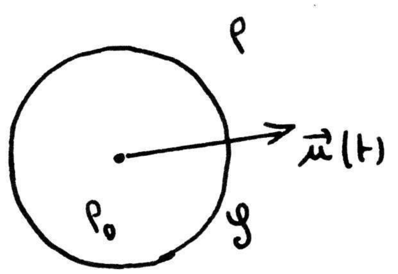
6) Trouvez la force exercée sur la plaque à l'aide de la formule de Joukovsky

7) Retrouvez cette force à l'aide de Blasius en calculant le résidu en $\xi = 0$, $\xi = a$ et $\xi = -a$

Chapitre 4

I. Mouvement d'une sphère dans un liquide

① Sphère soumise à un mouvement donné de fluide à l'infini.



$\vec{V}_\infty(t)$ donné

ρ : masse volumique du liquide

ρ_0 : masse volumique de la sphère $\mathcal{S}$

$g = 0$

On cherche la vitesse $\vec{u}(t)$ de la sphère $\mathcal{S}$ du au mouvement $\vec{V}_\infty(t)$ connu du fluide à l'infini. On négligera la gravitation et le fluide et parfait.

Soit $\mathcal{R}^a$ le référentiel de description du mouvement, soit $\mathcal{R}^r$ le référentiel qui laisse le fluide immobile en l'∞ et $\tilde{\vec{u}}(t)$ la vitesse de la sphère dans ce référentiel.

a) Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la sphère dans $\mathcal{R}^r$

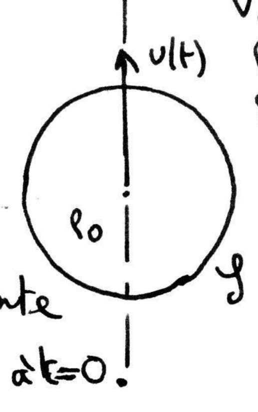
b) Déterminer alors $\vec{u}(t)$ en fonction de $\vec{V}_\infty(t)$

② Sphère en mouvement vertical dans un champ de pesanteur

$\vec{V}_\infty = 0$

ρ

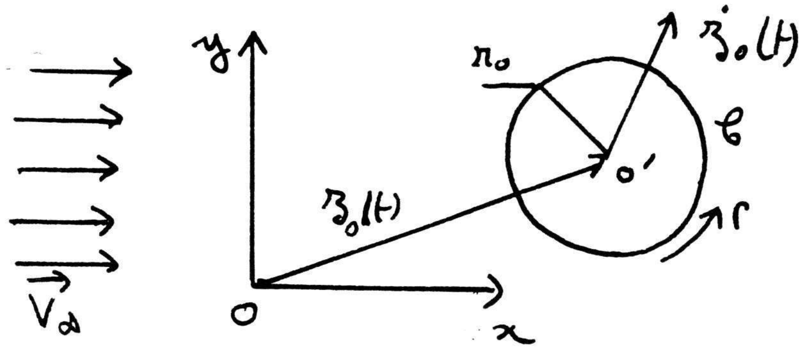
g



a) Trouver la vitesse verticale $v(t)$ d'une bille $\mathcal{S}$ qui se déplace dans un liquide au repos en l'infini et dans un champ de pesanteur.

b) Déterminer la hauteur maximale h atteinte si la bille est lancée avec une vitesse V_0 à $t=0$.

II Cylindre en rotation dans un écoulement uniforme :



$g = 0$

Masse linéique du disque $M = \rho_0 \pi r_0^2$

Masse ajoutée du disque $M_a = \rho \pi r_0^2$

Soit un cylindre droit de section circulaire de centre O', de rayon r_0 dans un fluide parfait en écoulement uniforme (vitesse V_∞ ~~en~~ à l'infini) suivant Ox.

Soit Γ (donnée), la circulation de la vitesse autour du disque de rayon r_0. On recherche des écoulements potentiels.

1°) On suppose que le disque est fixe centré en O.
Ecrire le potentiel complexe $f(z)$ de l'écoulement.

2°) Le disque est libre et sa position z_0 repérée par son centre O' dépend du temps : $z_0(t) = x_0(t) + i y_0(t)$

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire

$\mathcal{R}^\ell$ le référentiel lié au disque : vitesse $\dot{z}_0(t)$ par rapport à $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}^m$ le référentiel des masses ajoutées (vitesse nulle en ∞)

Notations :

référentiel	affixe	vitesse	potentiel complexe	vitesse en ∞
R	z	$v = \overline{\frac{df}{dz}}$	f	V_∞
R^l	z^l	$v^l = \overline{\frac{df^l}{dz^l}}$	f^l	$V_\infty - \dot{z}_0$
R^m	z^m	$v^m = \overline{\frac{df^m}{dz^m}}$	f^m	0

a) Ecrire l'équation d'Euler dans R^l.

b) Déterminer $f^l(z^l)$

c) Déterminer $f(z)$

d) Déterminer $f^m(z^m)$

e) Dans R^l déterminer la force de contact du fluide sur le disque à l'aide de la pression et de Bernouilli.

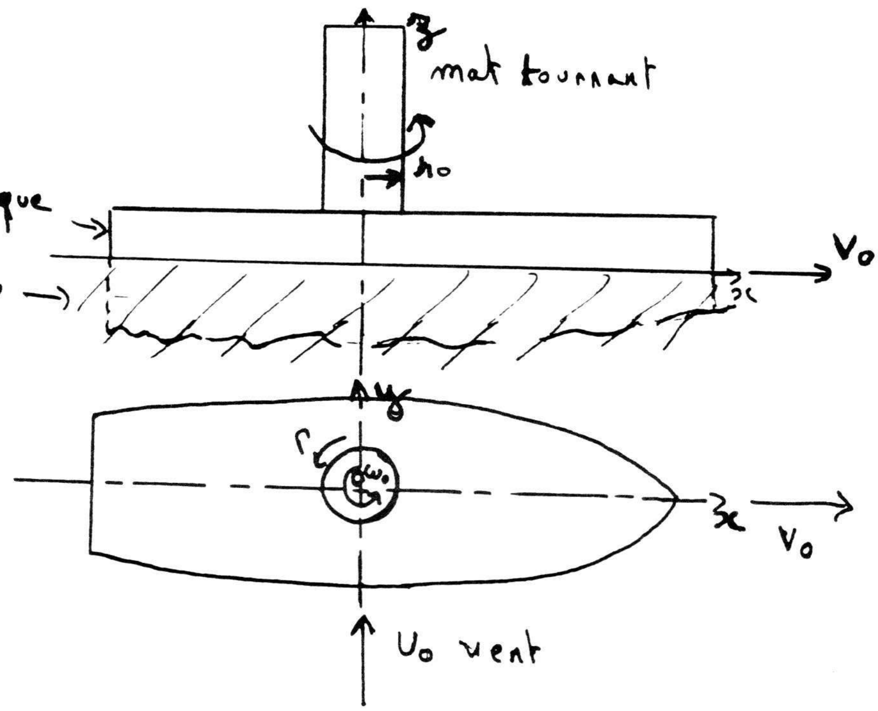
f) Appliquer alors la relation fondamentale de la dynamique au disque dans R^l.

g) Déterminer la trajectoire du centre pour les conditions initiales $z_0(0) = 0$ et $\frac{dz_0}{dt}(0) = \vec{V_0}$

h) Que se passe-t-il quand $r_0 \to 0$?

Chapitre 5

I. Bateau à mat tournant



Un bateau (voir figure) se déplace en translation uniforme à la vitesse V_0 (selon l'axe des x). Ce bateau possède un mât tournant à une vitesse angulaire constante ω_0. Le vent qui souffle sur le bateau est supposé être de vitesse uniforme U_0 et dirigé selon l'axe des y. C'est l'action de cet écoulement sur le mât tournant qui est responsable du mouvement du bateau. L'air sera considéré comme un fluide parfait et l'écoulement 2D (dans un plan horizontal).

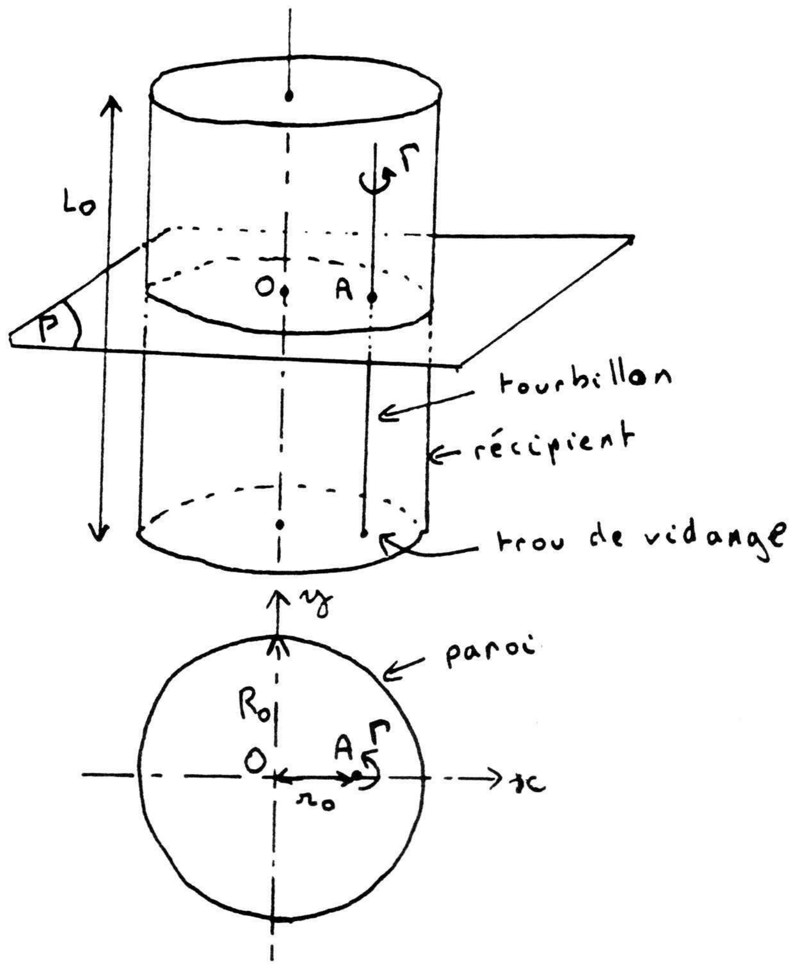
a) On suppose qu'on a la même valeur de la circulation autour du mât que si celui-ci était remplacé par du fluide tournant en bloc à la vitesses angulaire ω_0.

Donner la valeur de la circulation Γ autour du mât en fonction de ω_0 .

b) Donner le potentiel complexe f de l'écoulement du vent autour du mât dans un repère lié au bateau.

c) Quelle est la force linéique $\vec{F}$ exercée sur le mât par le vent et la force de propulsion (force selon 0x) ?

II Vidange d'un récipient



On vide un récipient cylindrique (voir figure) de section circulaire (rayon R_0) par un trou excentré à r_0 du centre du fond du récipient. Il se produit un filament tourbillon vertical centré sur le trou. Son intensité est Γ.

En première approximation on néglige toute vitesse verticale du fluide qui sera supposé parfait.

On suppose donc qu'au voisinage du plan de coupe P, on a un écoulement bidimensionnel, avec un tourbillon ponctuel fixe en A dans ce plan (voir figure), vérifiant la condition de glissement sur la paroi circulaire. La vitesse radiale par rapport au point A sera négligée (on ne met pas de puits ponctuel en A)

a) Calculer le potentiel complexe f de l'écoulement .

b) Donner la fonction de courant ψ et l'allure de l'écoulement. Montrer que les lignes de courant sont des cercles.

c) Calculer la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le récipient (par unité de longueur).