

**E.N.S.E.M.**

**2ème Année Filière Mécanique**

**Maîtrise de Mécanique**

**FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES  
INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE**

**Jean-Pierre BRANCHER**

**Année 1992/93**

**FLUIDES PARFAITS**  
**INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE**

Première partie : fluides incompressibles

- 0	Introduction — — — — —	<sup>pages</sup> 2
- I	Equation d'Euler et propriétés — — — — —	3
- II	Écoulements plan — — — — —	19
- III	Interactions fluide-structure — — — — —	
- IV	Exercices — — — — —	

Intérêt pratique :

Ce cours permet de mettre en place des méthodes numériques et analytiques (emploi de logiciels de calcul formel)

Bibliographie

- 1) **BATCHELOR** "Introduction to fluid mechanics"  
Cambridge University Press
- 2) DARROZES ET FRANCOIS "Mécanique des fluides incompressibles"  
Lecture notes in Physics - Springer Verlag
- 3) **COMOLET** "Mécanique des Fluides"  
Tomes I et II - MASSON
- 4) ROY "Fluides parfaits incompressibles"  
Edition ELLIPSES

**FLUIDES PARFAITS**

**INTERACTIONS FLUIDE- STRUCTURE**

**IERE PARTIE : FLUIDES INCOMPRESSIBLES**

**0 - INTRODUCTION**

En mécanique des fluides fondamentale, il a été vu que pour les grands nombres de Reynolds, les problèmes d'écoulement pouvaient se séparer en un problème intérieur (modèle de couche limite) et en un problème extérieur (modèle d'Euler), ceci dans le cadre de la méthode des développements raccordés.

Ici, nous nous intéresserons au problème d'Euler et à l'étude de l'interaction de l'écoulement extérieur sur les différentes structures qu'il rencontre.

$$\mathcal{R}_e = \rho \frac{V_0 L_0}{\mu} \gg 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où } V_0 = \text{vitesse caractéristique} \\ L_0 = \text{longueur} \end{array} \right.$$

Equation d'Euler ( $\mu = 0$ )\* :

$$\rho \vec{\gamma} = - \text{grad } P + \vec{f} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où } \vec{f} \text{ est la densité volumique} \\ \text{des efforts extérieurs} \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_p \cdot \vec{n} \text{ sur les parois} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{où } \vec{V}_p \text{ est la vitesse} \\ \text{de la paroi} \end{array} \right.$$

\* Le fluide parfait ( $\mu = 0$ ) n'existe pas dans la réalité, sauf pour l'hélium liquide au voisinage de 0° absolu où il apparaît dans un mélange avec de l'hélium visqueux.

# I - EQUATIONS D'EULER ET PROPRIETES

## 1° Généralités

On peut introduire la vorticité  $\vec{\omega} = \text{Rot } \vec{V}$  (ou le vecteur tourbillon  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega}$  qui représente la vitesse de rotation locale).

Les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{V} = - \text{grad} \left( P/\rho + \frac{V^2}{2} \right) + \vec{f}/\rho \quad (\text{si } \rho = \text{cte})$$

*fluide parfait incompressible.*

L'équation de continuité, pour un fluide isovolume donne :  $\text{div } \vec{V} = 0$  et pour  $\vec{\omega}$   $\text{div } \vec{\omega} = 0$

Si on prend le rotationnel de chaque membre, on obtient l'équation de la vorticité :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{Rot} (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = \frac{1}{\rho} \text{Rot } \vec{f}, \quad \text{avec } \text{div } \vec{\omega} = 0$$

La source extérieure de vorticité est  $\frac{1}{\rho} \text{Rot } \vec{f}$

a) Si les efforts extérieurs sont dûs uniquement à la pesanteur :

$\vec{f} = \rho \vec{g} \Rightarrow \text{Rot } \vec{f} = \text{grad } \rho \wedge \vec{g}$ , puisque  $\vec{g}$  dérive d'un potentiel si  $\rho = \text{cte}$  ou si  $\text{grad } \rho$  est parallèle à  $\vec{g} \Rightarrow \text{Rot } \vec{f} = 0$

A l'échelle du laboratoire,  $\vec{g}$  est constant et si  $\rho = \text{cte}$ , on peut écrire  $\vec{f} = - \text{grad } \rho g z$  si Oz est dirigé suivant la verticale ascendante.

b) Si par exemple le fluide est conducteur, parcouru par des courants  $\vec{j}$  et si  $\vec{B}$  est l'induction magnétique, les forces volumiques électromagnétiques sont de la forme  $\vec{j} \wedge \vec{B}$ .

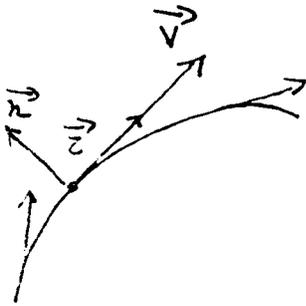
En général,  $\text{Rot} (\vec{j} \wedge \vec{B}) \neq 0$ , cette propriété est utilisée pour faire du brassage (brassage électromagnétique) dans différents procédés d'élaboration en métallurgie.

## 2° Cas particuliers

### a) Théorème de Bernoulli

- Si  $\rho = \text{cte}$
- Si l'écoulement est stationnaire (permanent)
- si  $\vec{f} = -\text{grad } U$

On peut alors écrire 
$$\vec{\omega} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} \left( P + U + \frac{V^2}{2} \right)$$



En projetant cette équation sur une ligne de courant (confondue avec la trajectoire ou la ligne d'émission) on obtient :

$$(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{\tau} = 0 \quad \left( \vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \right)$$

donc on a 
$$\text{grad} \left( P + U + \frac{V^2}{2} \right) \cdot \vec{\tau} = 0$$

ou si  $s$  est l'abscisse curviligne 
$$\frac{\partial}{\partial s} \left( P + U + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

cela signifie que 
$$P + U + \rho \frac{V^2}{2} = \text{cte} \text{ sur la ligne de courant}$$

Lorsque l'on passe d'une ligne de courant à l'autre, la constante varie :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( P + U + \rho \frac{V^2}{2} \right) = \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} \neq 0$$

Dans le cas usuel  $U = \rho g z$  et on définit :

$$\mathcal{H} = \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{la charge})$$

Le théorème de Bernoulli  $\Rightarrow \mathcal{H} = \text{cte}$  sur chaque ligne de courant ou trajectoire (si l'on suit une particule dans son mouvement, sa charge reste constante)

on travaille désormais à  $\rho = \text{cte}$ ,  $U = \rho g z$ .  
La pression motrice  $\hat{P}$  est définie par  $\hat{P} = P + \rho g z$

b) Écoulements à énergie constante

- Si l'écoulement est stationnaire :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V} = - \text{grad}(gz)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \vec{\omega} = 0, \text{ on dit que l'écoulement est } \underline{\text{irrotationnel}} \\ \text{ou} \\ \text{si } \vec{\omega} // \vec{V} \text{ (écoulement de Beltrami)} \end{array} \right.$$

alors  $\underline{gz = \text{cte en tout point de l'écoulement}}$ 

La question est de savoir si de tels écoulements sont possibles. Par exemple, si  $\text{Rot } \vec{f} \neq 0$ , il est impossible d'avoir un écoulement irrotationnel.

3° Écoulements irrotationnels

Si  $\vec{\omega} = 0$  alors il existe un potentiel de vitesse  $\phi$  tel que  $\vec{V} = \text{grad}\phi$ , mais  $\phi$  n'est pas nécessairement uniforme (ou univalent) dans le cas où le domaine de l'écoulement n'est pas simplement connexe. Par exemple, l'écoulement  $\vec{V} = \frac{\Omega R_0^2}{r} \vec{e}_\theta$  qui peut être produit par un cylindre de rayon  $R_0$ , tournant à la vitesse  $\Omega$  et entraînant à l'extérieur un fluide visqueux, n'a pas de potentiel uniforme.

En effet, sur le cercle de centre O de rayon  $R_1 > R_0$ , on a  $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = 2\pi n \Omega R_0^2$ . Ainsi à chaque tour le potentiel croît de  $2\pi \Omega R_0^2$

a) Existence d'écoulement irrotationnel*présence d'un potentiel*

Si  $\text{Rot } \vec{f} = 0$  et donc dans le cas particulier où  $\vec{f} = - \text{grad } \rho gz$ , on a le théorème :

Théorème de Kelvin :*fermée*

$\forall C_t$  (courbe tracée dans le domaine occupée par le fluide) que l'on suit dans le mouvement (courbe matérielle) la circulation  $\Gamma$  de la vitesse reste constante dans le mouvement.

c'est à dire que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$$

*indique que la courbe est fermée.*

En effet si  $S_t$  est une surface matérielle s'appuyant sur  $C_t$ ,  $\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{S_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds \leftarrow$  *théorème de Stokes*

Or le théorème du transport pour le flux donne

$$\frac{d}{dt} \iint_{S_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S_t} \left[ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{Rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \text{div} \vec{\omega} \right] \cdot \vec{n} \, ds$$

(cette démonstration tient pour un domaine simplement connexe)

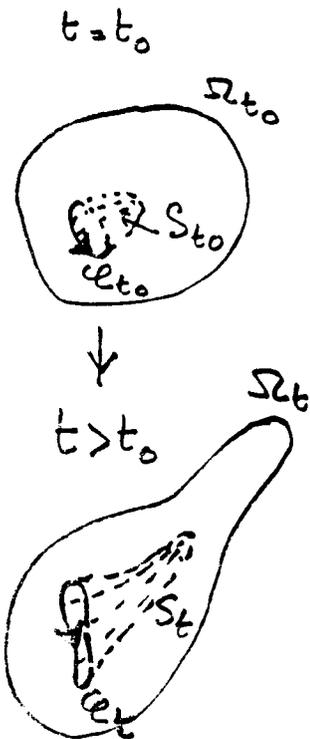
or  $\text{div} \vec{\omega} = 0$  et l'équation du tourbillon (ou de la vorticité) donne

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{Rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = 0 \quad (\text{Rot} \vec{f} = 0) \quad \text{donc} \quad \frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

(si le domaine n'est pas connexe la propriété reste valable. Pour cela on calcule  $\frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{l}$  en revenant à une configuration de référence)

• Il s'ensuit le **théorème de Lagrange**

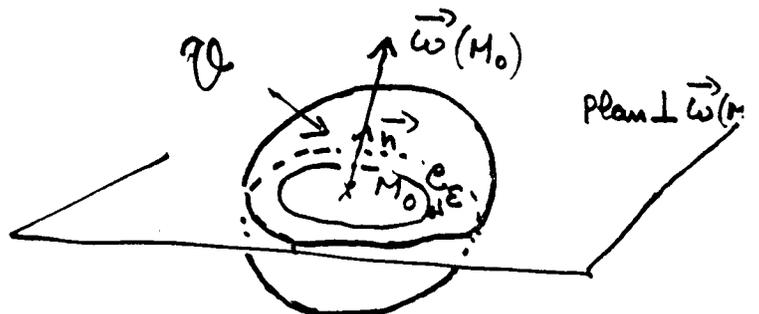
Si à  $t_0$  l'écoulement est irrotationnel dans  $\Omega_{t_0}$  alors il reste dans  $\Omega_t$  ( $t \geq t_0$ ), domaine matériel.



En effet si  $\vec{\omega} = 0$  dans  $\Omega_{t_0}$  à l'instant  $t_0$  alors  $\Gamma(t_0) = 0, \forall C_{t_0}$  tracée dans  $\Omega_{t_0}$  à l'instant  $t$ ,  $\Gamma(t) = 0, \forall C_t$  dans  $\Omega_t$  (théorème de Kelvin)

Ceci entraîne que  $\vec{\omega} = 0$  dans  $\Omega_t$ .

Car si en  $M_0$ ,  $\vec{\omega}$  n'était pas nul, en supposant  $\vec{\omega}$  continu, il existerait un voisinage  $\vartheta$  de  $M_0$  où :  $\vec{\omega}(M) \cdot \vec{\omega}(M_0) > \frac{\omega(M_0)^2}{2}, \forall M \in \vartheta$  d'où une circulation non nulle sur la courbe  $C_\epsilon$  de la figure (car le flux de  $\vec{\omega}(M)$  à travers  $S_\epsilon$  serait supérieur à  $\frac{\omega(M_0)}{2} \cdot S_\epsilon$ )



b) Intégrale première du mouvement (à  $\vec{w} = 0$ )

Si  $\vec{V} = \text{grad } \varphi$  est suffisamment régulier :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

L'équation d'Euler s'écrit :  $\text{grad} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{H} \right] = 0$

d'où l'intégrale première  $\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{H} = f(t)}$  +  $\boxed{\Delta \varphi = 0}$  *équation de continuité.*  
*↑ pour une force dérivant d'un potentiel et un écoulement irrotationnel.*

Cette intégrale première que l'on prolonge jusque sur le bord du domaine occupé par le fluide a déjà été utilisée pour étudier les ondes qui apparaissent dans les écoulements à surface libre.

On remarque que dans un écoulement irrotationnel isovolume on peut (séparer) la cinématique de la répartition de pression.

b1) Si on connaît  $\varphi(x,t)$ , on connaît la pression par l'intégrale première du mouvement.

Pour calculer l'effort exercé par le fluide sur un obstacle, il faut faire l'intégration  $\int_{\Sigma} p \vec{n} ds$  où  $\Sigma$

est la surface de l'obstacle,  $\vec{n}$  est la normale extérieure au domaine fluide.

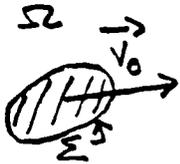
Cela donne

$\int_{\Sigma} p \vec{n} ds = \int_{\Sigma} f(t) \vec{n} ds - \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} ds - \int_{\Sigma} \rho \frac{V^2}{2} \vec{n} ds - \int_{\Sigma} \rho g z \vec{n} ds$	<i>rien pour <math>\vec{w} = 0</math></i>
<p>''</p> <p>0</p>	
<p>↓</p> <p>théorie des masses ajoutées</p>	<p>↓</p> <p>modélisation à discuter Ce terme peut être nul (paradoxe de d'Alembert)</p>
<p>↓</p>	<p>↓</p> <p>poussée d'Archimède</p>

b<sup>2</sup>) Problème de la cinématique

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V} = \text{grad}\phi \\ \text{et} \\ \text{div } \vec{V} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \Delta\phi = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{V}_p \cdot \vec{n} \text{ à la paroi} \end{array}}$$

Exemple : Cas d'un obstacle borné



Le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait isovolume autour d'un obstacle se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}_0$  se calcule dans un référentiel lié à l'obstacle. *constante*

On a  $\phi = -V_0 x + \phi'$  où  $0x$  est défini par  $+\vec{V}_0$

$\phi'$  est le potentiel de perturbation et  $\text{grad}\phi' \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$

on doit alors résoudre le problème extérieur de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi' = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\phi'}{\partial n} = +\vec{V}_0 \cdot \vec{n} \text{ sur } \partial\Omega = \Sigma \end{array} \right.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  on travaillera dans l'espace fonctionnel :

$$\left\{ f, \frac{f}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

Changement de référentiel :

$\vec{v}_e(t) = \vec{v}_e(0) + \vec{n} \lambda \omega \vec{n}$  : vitesse d'entraînement

$\delta \vec{e}(t) = \delta \vec{e}(0) + \frac{d\vec{n}}{dt} \lambda \omega \vec{n} + \vec{n} \lambda \omega \vec{n} \rightarrow \mathcal{R}_\omega(\delta \vec{e} = 2 \frac{d\vec{n}}{dt})$

$\delta c(t) = 2 \vec{n} \wedge \vec{v}_R'$  : accélération de Coriolis

$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  .  $o$  = point fixe de  $\mathcal{R}$

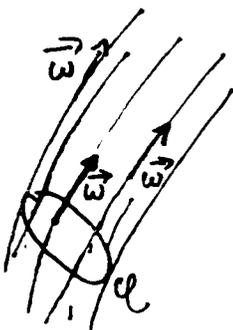
$\vec{v}_R = \vec{v}_e(t) + \vec{v}_R'$

$\vec{\omega}_R = \delta \vec{e} + \delta \vec{c} + \delta \mathcal{R}'$

4°) Cas où  $\vec{\omega} \neq 0$

Nous avons vu que la circulation de la vitesse était conservée au cours du mouvement. Il s'ensuit

que  $\int_{S_t} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds$  est conservée sur toute surface matérielle s'appuyant sur  $C_1$ .



Une ligne tourbillon est telle que  $\vec{\omega}$  y est tangente en tout point. En permanent la charge  $\mathcal{H}$  reste constante sur une ligne tourbillon (pour un fluide parfait)

L'ensemble des lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe fermée engendre un tube tourbillon (limité par une surface tourbillon).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \mathcal{R} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\text{grad}(g \mathcal{H}) \\ \text{si } f = -\text{grad } P/g \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}) = 0 \\ \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\text{grad}(g \mathcal{H}) \\ \text{en stationnaire.} \end{array} \right.$$

en stationnaire ←

a) **Théorème d'Helmholtz**

Si  $S_{t_0}$  est une surface tourbillon à l'instant  $t_0$ , si on suit la surface matérielle dans le mouvement, elle reste une surface tourbillon

Cela résulte directement du théorème de Kelvin et du fait que  $\vec{\omega} \cdot \vec{n} = 0$  sur une surface tourbillon.

b) **Les lignes tourbillons sont gelées dans le fluide (ce sont des lignes matérielles)**

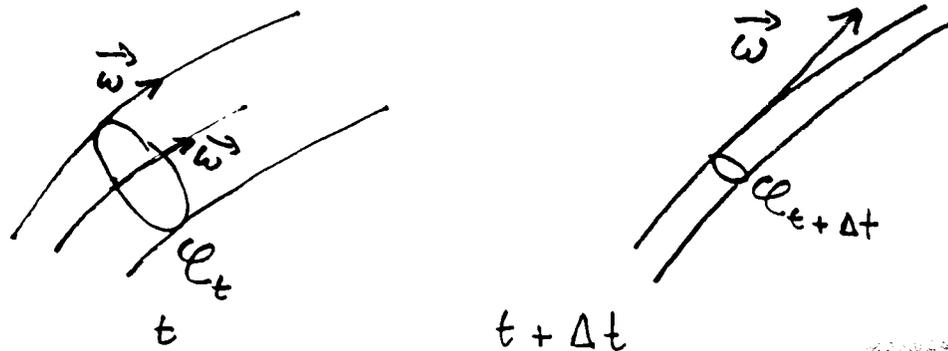
En effet :  $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{Rot}(\vec{V} \wedge \vec{\omega})$  admet comme solution  $\omega_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \cdot \omega_j(\underline{X}, t=0)$  (Cauchy)

Ce qui montre que les lignes tourbillon sont gelées dans le fluide.

(On pourra étudier en comparaison l'équation d'évolution du vecteur  $\vec{\partial l} = \overline{M_0 M_1}$  où  $M_0$  et  $M_1$  sont les positions à l'instant  $t$  de deux particules voisines).

Il en résulte un mécanisme prépondérant dans le phénomène de turbulence :

si un tube tourbillon se contracte, la conservation du flux implique que  $\vec{\omega}$  va s'étirer



c) calcul de la vitesse à partir de  $\vec{\omega}$

Si à l'instant  $t$   $\vec{\omega}$  est confiné à  $\Omega_\omega$ , la vitesse est donnée par la loi de Biot et Savart (voir Electromagn.)

*variable en milieu incompressible.*  $\vec{V}(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_\omega} \frac{\vec{\omega}(\underline{\xi}, t) \wedge (\underline{x} - \underline{\xi})}{|\underline{x} - \underline{\xi}|^3} d\underline{\xi}$

*⇒ On en déduit la charge de puis la pression p par l'intermédiaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :*  
 $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \underline{v} = -\text{grad}(p/\rho)$

Loin de  $\Omega_\omega$ , la vitesse dérive du potentiel  $\varphi$

$\varphi \sim \frac{1}{4\pi} \vec{\mu} \cdot \text{grad} \frac{1}{r}$  où  $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underline{\xi} \wedge \vec{\omega}(\underline{\xi}) d\underline{\xi}$

On peut montrer que  $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0$ . Cela s'interprète comme la conservation de  $\rho\vec{\mu}$  la quantité de mouvement associée au champ de vorticité  $\vec{\omega}(\xi, t)$ . Il en est de même pour le moment cinétique

$$\vec{m} = \frac{1}{3} \rho \int_{\mathbb{R}^3} \xi \wedge (\xi \wedge \omega) d\xi$$

En fait  $\vec{\mu}$  et  $\vec{m}$  sont conservées même si la viscosité intervient.

Il y a deux autres invariants :  $E_c = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho v^2 d\underline{x}$  et l'h licite  $I = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{V} \cdot \vec{\omega} d\underline{x}$

En bidimensionnel :  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3 = -\Delta \psi \vec{e}_3$  ( $\psi$  est la fonction de courant) et  $\left\{ \begin{array}{l} v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right.$   
et bidirectionnel.

l'équation du tourbillon peut s'écrire  $\frac{d\omega_i}{dt} = V_{i,j} \omega_j$  (voir cours de 1<sup>re</sup> année 778).

Comme  $\vec{V} \begin{cases} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \\ 0 \end{cases}$  on obtient  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}$  conservé dans le mouvement

En stationnaire, cela signifie que  $\omega$  est constant sur une ligne de courant.

## 5<sup>o</sup>) Solutions d'écoulement de fluide parfait

### a) Décomposition de la vitesse (Helmholtz)

$\forall \vec{V}$  régulier défini sur  $\Omega$ , il existe une décomposition unique :

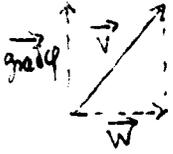
$$\vec{V} = \text{grad}\phi + \vec{W}$$

où  $\text{div } \vec{W} = 0$  dans  $\Omega$

$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$

Unicité : Soit les 2 décompositions (1) et (2) de  $\vec{V}$

$$\text{on a } \vec{\text{grad}}(\varphi_1 - \varphi_2) + \vec{W}_1 - \vec{W}_2 = 0$$



or  $\vec{W}$  et  $\vec{\text{grad}}\varphi$  sont orthogonaux dans  $L_2(\Omega)$  car :

$$\int_{\Omega} \vec{W} \cdot \vec{\text{grad}}\varphi \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \text{div}(\varphi \vec{W}) \, d\underline{x} - \int_{\Omega} \varphi \text{div} \vec{W} \, d\underline{x} = 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \vec{W} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \qquad \qquad \qquad 0 \text{ car } \text{div} \vec{W} = 0 \text{ dans } \mathcal{R}.$$

car  $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\mathcal{R}$

donc  $\vec{W}_1 - \vec{W}_2 \perp \vec{\text{grad}}(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \vec{W}_1 - \vec{W}_2 = 0$  et ensuite  $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{cte}$

Existence  $\vec{V}$  étant donnée, comme  $\vec{W}$  est tel que  $\text{div} \vec{W} = 0$ ,  $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$

on cherche  $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = \text{div} \vec{V} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{V} \cdot \vec{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{solution } \varphi \text{ unique (à une constante près)}$

on définira  $\vec{W}$  par  $\vec{W} = \vec{V} - \vec{\text{grad}}\varphi$

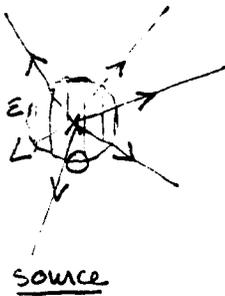
Remarque Pour un fluide isovolume, confiné dans une enceinte fermée, tout mouvement est tel que  $\vec{V} = \vec{W}$  (il n'existe pas de potentiel non trivial,  $\varphi \neq \text{cte}$ ).

b) solutions élémentaires ( de l'équation de Laplace)

$\varphi_0$  est solution élémentaire si  $\Delta \varphi_0 = \delta_0(x)$

où  $\delta_0$  est la distribution de Dirac à l'origine.

Dans  $\mathcal{R}^3$  :  $\varphi_0(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi|\underline{x}|}$  est une solution élémentaire



c'est le potentiel d'un écoulement source placé à l'origine

$$\vec{V} = \text{grad}\phi_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \text{ les lignes de courant sont des droites passant à l'origine.}$$

Le débit à travers la sphère de centre O, rayon  $\varepsilon$  :

$$q_v = \int_{|\vec{x}|=\varepsilon} \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{|\vec{x}|=\varepsilon} \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon \vec{n}}{\varepsilon^3} \cdot \vec{n} \, ds = 1$$

— Une source d'intensité  $q_v$  placée en  $x_0$  induit le potentiel

$$\phi = \frac{-q_v}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|}$$

— Si  $q_v$  est négatif, on dit que l'on a un puits

Dans le plan, on verra plus tard que les potentiels sont en  $\frac{1}{2\pi} \log |\vec{x}|$

— Un doublet s'obtient avec un puits et une source de même intensité, placés en  $(-a, 0, 0)$  et  $(a, 0, 0)$  par passage à la limite  $a \rightarrow 0$ ,  $q_v \rightarrow +\infty$  tel que  $2a q_v = K$  (constante)

Par un développement limité on obtient

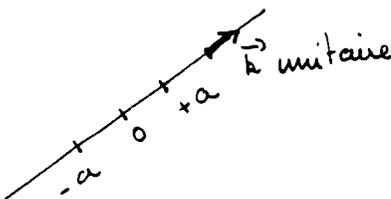
$$\phi_1(\vec{x}) = -\frac{K}{2\pi} \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{|\vec{x}|^3}$$

$K$  = Intensité du doublet

$\vec{k}$  ou  $\vec{k}$  la direction du doublet

$\phi_1(\vec{x} - \vec{x}_0) = \tilde{\phi}_1(\vec{x})$  est solution de

$$\Delta \tilde{\phi}_1 = K \delta'_{\vec{k}, \vec{x}_0}(\vec{x})$$



où  $\delta'_{\underline{k}, \underline{x}_0}$  est la distribution définie par :

$$\forall \alpha \in D(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \langle \delta'_{\underline{k}, \underline{x}_0}, \alpha \rangle = -\vec{k} \cdot \text{grad} \alpha |_{\underline{x}, \underline{x}_0}$$

(pour le plan on travaille avec  $\frac{-K \cos \theta}{2\pi r}$ )

Toutes ces solutions sont harmoniques en dehors des singularités.

### c) Potentiel de simple couche

On répartit continûment des sources sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , avec la densité  $\sigma$

Par superposition on obtient un potentiel harmonique dans  $\Omega$  :

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\underline{\xi})}{|\underline{x}-\underline{\xi}|} d\underline{\xi}$$

appelé potentiel de simple couche

$\varphi$  est tel que

$$\Delta \varphi = \sigma \delta_{\Gamma}$$

où  $(\delta_{\Gamma}, \alpha) = \int_{\Gamma} \alpha(\underline{\xi}) ds$

En tout point  $\Omega$ , on a bien  $\Delta \varphi = 0$

si  $\varphi_0$  est solution de  $\Delta \varphi_0 = \delta_{\Gamma}$ ,  $\sigma * \varphi_0$  (convolution) est solution de  $\Delta \varphi = \sigma \delta_{\Gamma}$

### d) Potentiel de double couche

Cette fois on superpose des doublets repartis sur  $\Gamma$  avec la densité  $K(\underline{\xi})$ , dirigés suivant la normale extérieure.

On a alors

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} K(\underline{\xi}) \frac{(\underline{x}-\underline{\xi}) \cdot \underline{n}}{|\underline{x}-\underline{\xi}|^3} ds$$

$$\text{on a } \Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial n} (K \delta\Gamma)$$

$$\text{où } \langle \frac{\partial}{\partial n} (K\delta\Gamma), \alpha \rangle = - \int_{\Gamma} K(\xi) \frac{\partial \alpha}{\partial n} ds$$

e) Cas  $\text{div } \vec{V} = 0$ ,  $\text{Rot } \vec{V} = \vec{\omega}$  donné

Soit  $\vec{A}$  le potentiel vecteur de  $\vec{V}$  ( $\text{div } \vec{V} = 0$ ) :  $\vec{V} = \text{Rot } \vec{A}$

On impose  $\text{div } \vec{A} = 0$ , car si  $\vec{A}_0$  est une solution particulière de  $\vec{V} = \text{Rot } \vec{A}$  avec  $\text{div } \vec{A}_0 = \alpha_0$ , la solution générale est  $\vec{A} = \vec{A}_0 + \text{grad } \varphi$ .

$$\text{En imposant } \text{div } \vec{A} = 0 \text{ on a } \Delta\varphi = -\alpha_0 \Rightarrow \varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\alpha_0(\xi)}{|\underline{x} - \xi|} d\xi$$

on peut donc modifier  $\vec{A}_0$  pour que  $\vec{A}$  soit à divergence nulle.

$$\text{Rot } \vec{V} = \vec{\omega} \Rightarrow \text{Rot } (\text{Rot } \vec{A}) = -\Delta \vec{A} = \vec{\omega}$$

$$\text{d'où } \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}(\xi)}{|\underline{x} - \xi|} dx \Rightarrow \vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \text{Rot}_{\underline{x}} \frac{\vec{\omega}(\xi)}{|\underline{x} - \xi|} dx$$

$$\text{Comme } \text{Rot } \lambda \vec{U} = \lambda \text{Rot } \vec{U} + \text{grad } \lambda \wedge \vec{U}$$

ici  $\vec{U} = \vec{\omega}(\xi)$  (indépendant de  $\underline{x}$ )

on obtient

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}(\xi, t) \wedge (\underline{x} - \xi)}{|\underline{x} - \xi|^3} d\xi$$

c'est la formule de Biot et Savart.

f) Cas  $\vec{\text{Rot}} \vec{V} = 0$ ,  $\text{div} \vec{V} = \beta$

On aurait à résoudre  $\Delta\phi = \beta$ , comme  $\vec{V} = \vec{\text{grad}}\phi$  :

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{(\vec{x} - \vec{\xi}) \cdot \beta(\vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^3} d\vec{\xi}$$

g) Cas  $\vec{\text{Rot}} \vec{V} = \vec{\omega}$ ,  $\text{div} \vec{V} = \vec{\beta}$

Par linéarité on superposera les solutions de e) et f)

h) Répartitions particulières de singularités

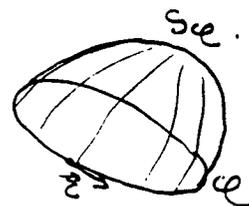
- Sources sur Oz avec  $q_v = \text{cte} \Rightarrow$  écoulement bidimensionnel  $\phi = \frac{q_v}{2\pi} \text{Log } r$

- Doublets sur Oz, K et  $\vec{k}$  constant  $\Rightarrow$  écoulement bidimensionnel  $\phi = -\frac{K}{2\pi} \frac{\vec{x} \cdot \vec{k}}{r^2}$

-  $\vec{\omega}$  constant porté par Oz  $\Rightarrow$  écoulement bidimensionnel  $\vec{V} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{x}}{r^2}$

- soit C fermée,  $\vec{\omega} = \omega \vec{\tau}$  ( $\omega = \text{cte}$ )

alors 
$$\vec{V} = \frac{\omega}{4\pi} \oint_C \frac{(\vec{\xi} - \vec{x}) \wedge \vec{\tau}}{|\vec{\xi} - \vec{x}|^3} dl = \vec{\text{grad}} \phi$$



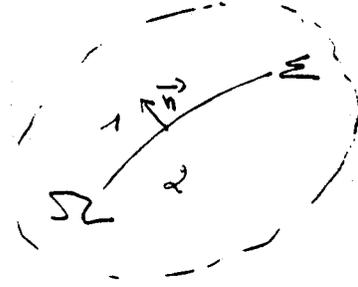
$$\phi = -\frac{\omega}{4\pi} \int_{S_C} \frac{(\vec{x} - \vec{\xi}) \cdot \vec{n}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^3} ds \quad (\text{Potentiel de double couche})$$

i) Discontinuité du champ de vitesse

Dans un écoulement de fluide parfait, il est possible d'avoir des surfaces de discontinuité de vitesse.

Soit :  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$        $\operatorname{Rot} \vec{V} = 0$  sur  $\Omega - \Sigma$

sur  $\Sigma$  on a :  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \lambda \vec{n} + \vec{\tau}$   
↑  
 plan tangent



si  $f$  est "régulier" par morceau, avec une discontinuité du 1<sup>o</sup> ordre en  $x_0$ , la dérivée au sens des distributions s'écrit :

$$\frac{df}{dx} = \left\{ \frac{df}{dx} \right\} + [f] \delta$$

↓  
dérivée au sens des fonctions  
(sur la restriction à 1 ou 2)

En posant  $\vec{V} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{Rot} \vec{A}$ ,  $[\vec{V}] = \lambda \vec{n} + \vec{\tau}$

on doit avoir  $\Delta \phi = \lambda \delta_\Sigma$  et  $\Delta \vec{A} = (\vec{\tau} \wedge \vec{n}) \delta_\Sigma$  *si  $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$ ,  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$  et que l'écoulement possède une discontinuité de vitesse  $\vec{V}$  sur  $\Sigma$*

— Alors  $\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\vec{\tau} \wedge \vec{n}}{|\underline{x} - \underline{\xi}|} ds$  : c'est le potentiel vecteur correspondant à une distribution de tourbillon surfacique de densité  $\vec{\omega} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

Une surface de contact ( $\vec{\tau} \neq 0$ ,  $\lambda = 0$ ) peut être assimilée à une nappe tourbillon

— A la discontinuité normale correspond un potentiel de simple couche.

Par superposition :

$$\vec{V}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{(\vec{\xi} - \vec{x}) \wedge \vec{\omega}}{|\vec{\xi} - \vec{x}|^3} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{(\vec{\xi} - \vec{x}) \cdot \lambda}{|\vec{\xi} - \vec{x}|^3} ds$$

où  $\vec{\omega} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ ,  $\vec{V} = \lambda \vec{n} + \vec{\tau}$

### 6°) Principe du maximum et écoulement de fluide parfait

a) Dans un écoulement irrotationnel, l'énergie cinétique ne peut pas atteindre son maximum dans le domaine de l'écoulement (l'ouvert  $\Omega$  est simplement connexe)

En effet si le maximum était atteint en  $\underline{x}_0 \in \Omega$  en choisissant l'axe  $Ox$  suivant  $\vec{V}(\underline{x}_0)$ , on aurait :

$$E_c(\underline{x}_0) = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2$$

$$\text{En tout point voisin : } E_c(\underline{x}_1) = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

comme  $\varphi$  est harmonique,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  l'est aussi  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \right)$

$$\text{si } E_c(\underline{x}_0) > E_c(\underline{x}_1) \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\underline{x}_0) \right| > \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\underline{x}_1) \right|$$

comme  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  est harmonique, elle ne peut atteindre son maximum (ses extrêma, en général) que sur  $\partial\Omega$  donc l'inégalité précédente est impossible.

Par contre, le minimum ( $\vec{V} = 0$ ) lui, peut très bien être atteint dans  $\Omega$ .

Il en résulte qu'en permanent comme  $P$  est minimum quand  $E_c$  est maximum (écoulement à énergie constante), la pression atteint son minimum sur  $\partial\Omega$ . Si la cavitation apparaît (lorsque  $P$  atteint la pression de vapeur saturante du liquide, entraînant l'ébullition), ce sera près des parois.

b) Si  $n$  filets tourbillons engendrent un écoulement plan on peut montrer que la force exercée par les  $n-1$  sur le  $k^{\text{ième}}$  ( $x_k, y_k$ ) est de la forme :

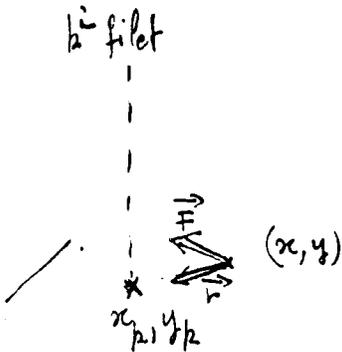
$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

où  $\psi$  est la fonction de courant de l'écoulement engendré par les  $n-1$  tourbillons (sauf le  $k^{\text{ième}}$ )

La vitesse étant calculée en  $(x_k, y_k)$

On trouve donc une force de la forme  $\vec{\text{grad}}\psi$

Si le  $k^{\text{ième}}$  tourbillon est libre, il va se positionner en  $(x_k, y_k)$  tel que  $\vec{\text{grad}}\psi = 0$



Comme  $\psi$  et  $\vec{\text{grad}}\psi$  sont harmoniques en dehors des points  $(x_i, y_i)$  où  $i \neq k$ , donc dans un voisinage de  $(x_k, y_k)$   $\psi$  notamment ne peut être maximum en  $(x_k, y_k)$  donc  $\frac{\partial \psi}{\partial \Gamma}$  ne peut être strictement négatif.

Or pour que l'équilibre soit stable, il faudrait qu'apparaisse une force de rappel (pour un point voisin de  $(x_k, y_k)$ , c'est à dire  $\frac{\partial \psi}{\partial \Gamma} < 0$ ).

Cette situation étant impossible le  **$k^{\text{ième}}$  filet tourbillon ne sera pas en équilibre stable.**

c) **Parmi tous les écoulements de fluide parfait dans  $\Omega$  régulier c'est l'écoulement irrotationnel qui minimise l'énergie cinétique**

Soit la décomposition du champ de vitesse :

$$\vec{V} = \vec{\text{grad}}\varphi + \vec{W} \quad (\text{avec } \text{div } \vec{W} = 0, \vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega)$$

$$\begin{aligned} \varphi \text{ est déterminé par } \quad & \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ & \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vec{V}_p \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ (condition donnée)} \end{aligned}$$

donc  **$\varphi$  est unique** (pour tous les écoulements)

$$V^2 = |\vec{\text{grad}}\varphi|^2 + |\vec{W}|^2 \text{ est minimum lorsque } \vec{W} = 0$$

D'où la propriété cherchée.

## II - ECOULEMENTS PLAN

(en stationnaire)

### 1°) Propriétés générales

$$\text{On a } \vec{V} : \begin{cases} U(x,y) & \vec{e}_1 \\ V(x,y) & \vec{e}_2 \\ 0 & \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\text{si } \psi \text{ est la fonction de courant } \begin{cases} U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

- On a bien sûr  $\text{div } \vec{V} = 0$  et  $\vec{\omega} = -\Delta \psi \vec{e}_3$    
*écoulement incompressible*

- On a déjà vu que  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

- Si l'écoulement est irrotationnel :  $\Delta \psi = 0$

- Sur une ligne de courant :  $\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \Rightarrow \delta \psi = 0$

$\psi$  est donc constante

- Le débit (par unité de profondeur) entre deux lignes de courant 1 et 2 est  $q_v = \psi_1 - \psi_2$

- Le potentiel  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$  satisfont aux relations de Cauchy :

*écoulement irrotationnel*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

On travaillera ainsi avec le potentiel complexe "holomorphe" (éventuellement non uniforme)

$$f(z) = \phi + i\psi \quad \text{où } z = x + iy$$

avec  $\frac{df}{dz} = u - iv = |\vec{V}|e^{-i\alpha} \approx \vec{V} \text{ où } \vec{V} = u + iv$

où  $\alpha$  est l'angle de  $\vec{V}$  avec  $Ox$

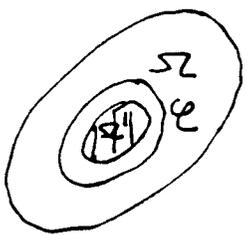
et bornée

On remarque d'après le théorème de Liouville que si  $f$  est holomorphe dans  $\mathbb{C}$  alors  $f$  est constante,

donc **un écoulement ne peut apparaître que si  $f$  admet des singularités dans  $\mathbb{C}$ .**

Rem: irrotationnel mais singulier  $\Rightarrow$  existence de  $\phi$  et  $\psi$  [ est ce que les relations de Cauchy correspondent aux écoulements irrotationnels et compressibles seulement en des points singuliers ]

- Si le domaine  $\Omega$  est multiplément connexe



si  $\vec{v}(z) = u - iv$  et si  $C$  est fermée et entoure  $\Omega'$  (non homotope à zéro)

$$\text{on a : } \oint_C \vec{v}(z) dz = \int_C u dx + v dy + i \int_C u dy - v dx$$

$$= \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} + i \int_C \vec{V} \cdot \vec{n} dl$$

$$\int_C \vec{v}(z) dz = \Gamma + iQ$$

si  $\Gamma$  ou  $Q \neq 0 \Rightarrow f$  n'est pas uniforme

On peut alors uniformiser  $f$  en posant :

$$g(z) = f(z) - \frac{\Gamma + iQ}{2\pi} \text{Log}(z - z_c)$$

où  $z_c \in \Omega'$

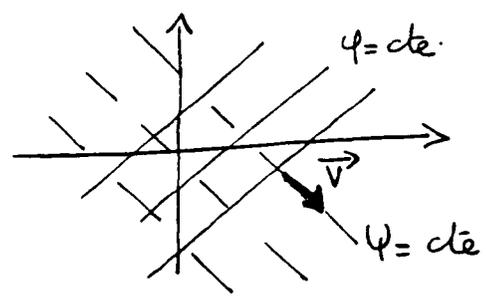
### 2°) Exemples

a)  $f(z) = az$ , (pôle simple à  $l^\infty$ )  $a = \alpha + i\beta$

on a alors :  $\phi = \alpha x - \beta y$  et  $\psi = \alpha y + \beta x$

$$u - iv = \alpha + i\beta$$

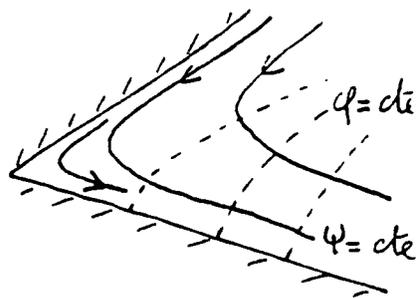
**Écoulement uniforme**



b)  $f(z) = z^n$  (pôle d'ordre  $n$  à l'infini)

$\psi = r^n \sin n\theta$ ,  $\varphi = r^n \cos n\theta$ ,  $u - iv = n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}$

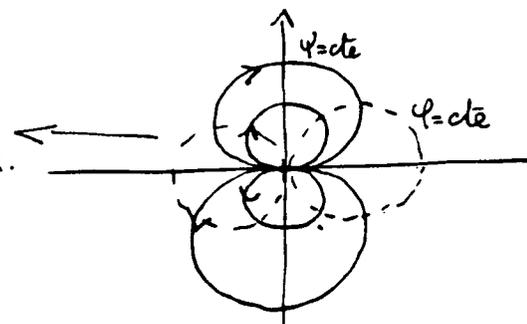
**Écoulement dans un angle  $\pi/n$**



c)  $f(z) = \frac{1}{z}$  (pôle simple à l'origine : **doublet**)

$\psi = -\frac{\sin\theta}{r}$ ,  $\varphi = \frac{\cos\theta}{r}$ ,  $u - iv = -\frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$

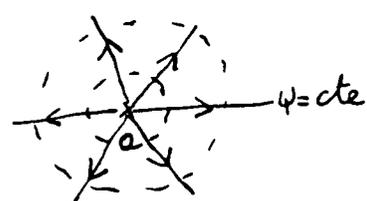
faisceaux de cercles orthogonaux.



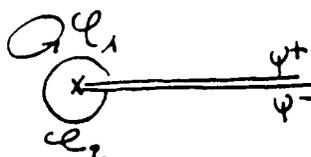
d) **Source et puits** :  $f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \text{Log} z$   $\begin{cases} q_v > 0 \text{ source} \\ q_v < 0 \text{ puits} \end{cases}$

$\psi = \frac{q_v \theta}{2\pi}$ ,  $\varphi = \frac{q_v}{2\pi} \text{Log} z$ ,  $u - iv = \frac{q_v}{2\pi z}$

↓  
non uniforme  
nécessite une coupure :



le débit sortant de  $C_1 = 0$   
" " " de  $C_2 = \psi^+ - \psi^-$



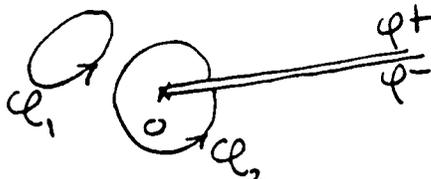
e) **Tourbillon** :  $f(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \text{Log} z$

Cela revient à faire tourner de  $-\pi/2$  le réseau orthogonal de lignes de courant et d'équipotentiels d'une source.  $\Gamma$  est l'intensité du tourbillon.

$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Log} r$ ,  $\varphi = +\frac{\Gamma\theta}{2\pi}$ ,  $u - iv = \frac{-i\Gamma}{2\pi z}$

↓  
non uniforme  
nécessite une coupure

La circulation sur  $C_1 = 0$   
" " sur  $C_2 = \varphi^+ - \varphi^- = \Gamma$



f) Ecoulement source-plan

methode des images.

source image.  
ici  $z_0 = x_0$

$$f(z) = \frac{q_v}{2\pi} \text{Log}(z - z_0)(z + z_0)$$

g) Tourbillon - plan

$T'$  = tourbillon image  
ici  $z_0 = x_0$

$$f(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{z + z_0}{z - z_0} \right)$$

h) Tourbillon - cercle

$T'$  inverse de  $T$   
par rapport au cercle }  $\rightarrow OT' \cdot OT = R_0^2, \vec{OT}' \parallel \vec{OT}$

$$f(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \text{Log} \left( \frac{z - z_0}{z - z'_0} \right)$$

avec  $z_0 \bar{z}'_0 = R_0^2$        $\bar{z}'_0 = \text{conjugué de } z'_0$

i) Source - Cercle :

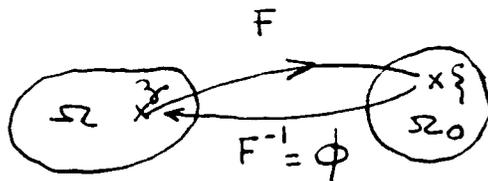
s'obtient en plaçant  $S'$  inverse de  $S$  avec  $q_v$  et un puits  $-q_v$  au centre.

## 3°) Transformation conforme

Nous rappelons ici les principales propriétés.

La transformation conforme nous permet de travailler sur des domaines plus simples pour lesquels les écoulements à potentiel sont facilement calculables.

Ce sont des transformations bijectives qui, à un domaine  $\Omega$  du plan  $(x,y)$ , font correspondre un domaine  $\Omega_0$  dans le plan  $(x_0, y_0)$  et définies par  $F$  holomorphe.



$$z = \phi(\xi)$$

$$\xi = F(z)$$

$$z = x + iy$$

Plan des  $z$

$$\xi = x_0 + iy_0$$

Plan des  $\xi$  (image)

-  $F$  transforme un écoulement isovolume à potentiel en un écoulement isovolume à potentiel.

- Les points singuliers se retrouvent dans le plan image et restent du même type (source, tourbillon ...)

- Les lignes de courant et les équipotentielles sont transformées en lignes de courant et équipotentielles.

- L'extérieur d'un contour fermé "régulier"  $C$  peut être transformé en l'extérieur d'un cercle de rayon 1 (centré en  $O$ ) (voir théorèmes de Riemann) avec

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{\xi^n}$$

si la transformation est holomorphe dans  $\Omega$ , elle ne l'est pas toujours sur  $\bar{\Omega} = \Omega \cup C$ . Si  $C$  n'est pas de classe  $C^1$ , notamment.

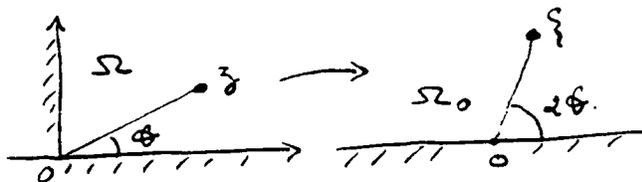
## Exemples :

a)  $\phi(\xi) = a_1 \xi + \frac{a_{-1}}{\xi}$  transforme l'extérieur du cercle  $\xi = e^{i\theta}$  en l'extérieur de l'ellipse

$$\left. \begin{aligned} x &= (a_1 + a_{-1}) \cos\theta \\ y &= (a_1 - a_{-1}) \sin\theta \end{aligned} \right\} z = a_1 e^{i\theta} + a_{-1} e^{-i\theta}$$

(Attention, il faut que  $\phi'(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi / |\xi| > 1$ . Donc que  $a_1 - \frac{a_{-1}}{\xi^2} \neq 0 \Rightarrow |a_{-1}| < |a_1|$ )

b)  $\xi = z^2$



c) Transformation homographiques, transformation de Schwarz, Joukovsky ... (voir cours de Math, voir exercices).

#### 4°) Efforts sur un obstacle

Dans le cas où l'obstacle définit une ligne de courant fermée  $C_0$

Si on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède et si l'écoulement est stationnaire

$$\text{l'effort dû au fluide : } \oint_C \mathbf{p} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_C -\frac{\rho V^2}{2} \vec{n} \, ds$$

( $\vec{n}$  est la normale intérieure à l'obstacle)

Soit  $f$  le potentiel complexe de l'écoulement

$$\text{sur } C_0 \text{ on a } df = d\phi = \frac{\partial f}{\partial z} dz = \overline{\frac{df}{dz}} dz \quad (\text{puisque } \psi = \text{cte})$$

$$\vec{n} \, ds = -dy + i \, dx = i \, dz$$

$$V^2 = \frac{\partial f}{\partial z} \overline{\frac{df}{dz}} \quad \text{donc } F_x + i F_y = -\rho \frac{i}{2} \oint_{C_0} \frac{df}{dz} \overline{\frac{df}{dz}} dz$$

En conjuguant on obtient

$$F_x - i F_y = \rho \frac{i}{2} \oint_{C_0} \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz$$

*Formules de Blasius  
(on est en écoulement  
irrotationnel)*

Pour le moment /0, comme  $\vec{OM} \wedge \vec{A}$  est donné par

$$\begin{array}{c|c|c} x & & A_x \\ y & \wedge & A_y \\ 0 & & 0 \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ x A_y - y A_x \end{array} = -\text{Im} [z (A_x - i A_y)]$$

on obtient

$$\vec{M}/O = - \rho/2 \operatorname{Re} \left( \oint_{C_0} z \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \right)$$

*d'après mes calculs.*

Ces formules sont les **formules de Blasius** (dans le cas où  $C_0$  est une ligne de courant)

**a) Cas d'un cylindre placé dans un écoulement uniforme**

a1 - Cylindre circulaire (rayon  $R_0$ )

- Le potentiel complexe est défini par  $f(z) = V_\infty \left( z + \frac{R_0^2}{z} \right)$

$$f'(z) = u - iv = V_\infty \left( 1 - \frac{R_0^2}{z^2} \right)$$

$f'^2$  a un seul point singulier en 0

comme le résidu de  $f'^2$  en 0 est nul

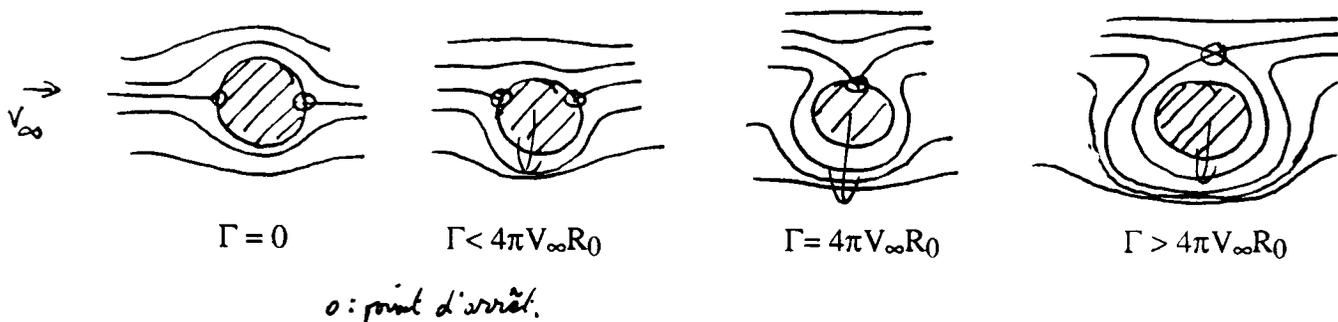
$F_x - iF_y = 0$  Il ne s'exerce ni portance ( $F_y$ ) ni traînée ( $F_x$ )

mais dans ce cas  $\oint_{C_0} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \Gamma = 0$

- Si  $\Gamma \neq 0$ ,  $f^*(z) = f(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Log} z$  est un potentiel (non uniforme) qui convient.

Sur le cercle la vitesse est bien tangente avec  $V_\theta = -2V_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R_0}$

$V_\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta_0 = \frac{\Gamma}{4\pi R_0 V_\infty}$ , on obtient les 4 cas :



– Théorème de Kutta Joukovsky

On montre alors que :

$$\boxed{F_x - i F_y = \Gamma V_\infty \rho i}$$

(à faire en exercice)

donc si  $\Gamma \neq 0$ , une portance apparaît et la force de traînée reste nulle.

L'apparition de la portance est l'effet Magnus.

Cet effet a été exploité il y a une centaine d'années. On a remplacé le mât et la voile par un cylindre circulaire tournant. L'adhérence de l'air sur le cylindre permet alors de créer une circulation.

Ces mâts cylindriques mobiles posaient de gros problèmes mécaniques. On trouve aujourd'hui des structures cylindriques sur l'"Alcyone" de J.Y. Cousteau (turbovoiles) mais le fonctionnement repose sur un principe différent (étudié par L. Malavard).

#### a2 - Cas de cylindres de section quelconque

Par une transformation conforme\* on peut se ramener au cas précédent. On trouvera toujours une **traînée nulle** : c'est le paradoxe de d'Alembert.

La traînée est due au frottement visqueux et à la présence d'un sillage qui n'entrent pas dans le cadre de cette première modélisation.

\* en exercice

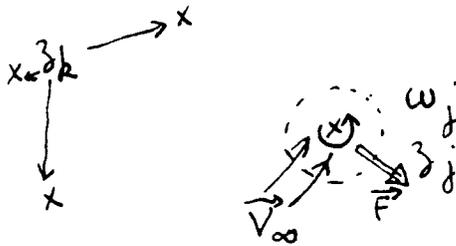
$$\text{On écrit } F_x - i F_y = \frac{i}{2} \rho \oint_{C_0} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint_{|\xi|=1} \left(\frac{d\tilde{f}}{d\xi}\right)^2 \frac{d\xi}{dz} d\xi$$

$$\text{où } \tilde{f}(\xi) = V_\infty (\xi - R_0^2/\xi) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log}\xi \text{ et } z = a_0 + a_1\xi + \sum_1^\infty a_n - n/\xi^n$$

#### a3 - Effort exercé par des filets tourbillon sur un autre

Soit  $n$  filets tourbillon verticaux situés en  $z_k$  d'intensité  $\Gamma_k$ . On calcule la force exercée sur le  $j^{\text{ème}}$  par tous les autres.

On peut considérer que le  $j^{\text{ème}}$  tourbillon est placé dans un écoulement "localement uniforme" dont la vitesse est celle de l'écoulement induit par les  $n-1$  autres tourbillons.



soit  $\psi_{n-1}$  la fonction de courant de  $\epsilon_{n-1}$  en  $z_j$  elle vaut  $\psi_{n-1}(z_j)$

$$\text{et la vitesse } \vec{v}_\infty \begin{cases} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y}(z_j) \\ - \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}(z_j) \end{cases}$$

La circulation est donnée uniquement par le mouvement induit du  $j^{\text{ème}}$  tourbillon  $\Gamma_j$ .

La portance est donc orthogonale  $\vec{v}_\infty$  et se calcule par la formule de Kutta-Joukovsky :

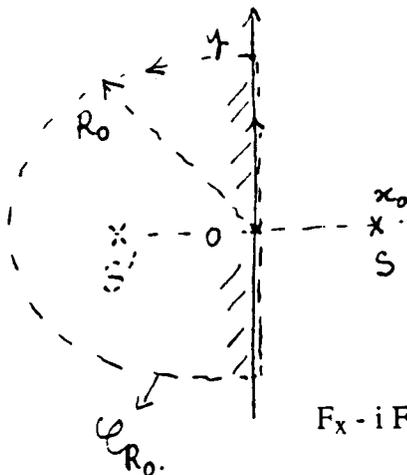
$$\vec{F} = \rho \Gamma_j \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y}(z_j) \\ 0 & - \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x}(z_j) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \rho \Gamma_j \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y} \end{vmatrix} = \rho \Gamma_j \vec{\text{grad}} \psi_{n-1}$$

$$\boxed{\vec{F} = \rho \Gamma_j \vec{\text{grad}} \psi_{n-1}}$$

$$\text{avec } f_{n-1}(z_j) = \sum_{n \neq j} - \frac{i}{2\pi} \Gamma_k \text{Log}(z_j - z_k) = \phi_{n-1} + i \psi_{n-1}$$

#### a4 - Effort exercé par une source sur un plan

Par la méthode des images on obtient le potentiel complexe



$$f(z) = \frac{qv}{2\pi} \text{Log}(z - x_0)(z + x_0)$$

$$f'(z) = \frac{qv}{2\pi} \left( \frac{1}{z - x_0} + \frac{1}{z + x_0} \right)$$

$$f'^2(z) = \frac{qv^2}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{(z-x_0)^2} + \frac{1}{(z+x_0)^2} + \frac{2}{(z-x_0)(z+x_0)} \right]$$

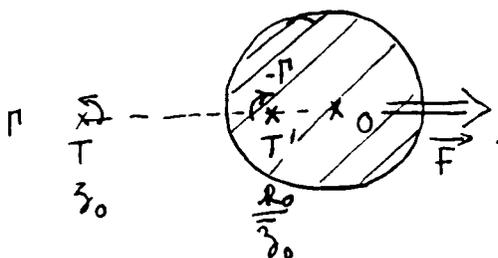
$$F_x - i F_y = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \rho \frac{i}{2} \oint_{C_{R_0}} f'^2 dz = 2 i \pi \left( \rho \frac{i}{2} \right) \times \text{résidu}(f'^2, -x_0)$$

$$\frac{qv^2}{4\pi^2} \cdot \left( -\frac{1}{x_0} \right)$$

donc  $F_y = 0$   
 $F_x = \frac{\rho q v^2}{\pi x_0}$       On remarque que la source attire le plan contrairement à ce que l'on peut penser.

a 5 - Effort d'un filet tourbillon sur un cylindre circulaire

La formule des résidus et l'étude a3 nous ramène à calculer l'action de T sur l'image T'



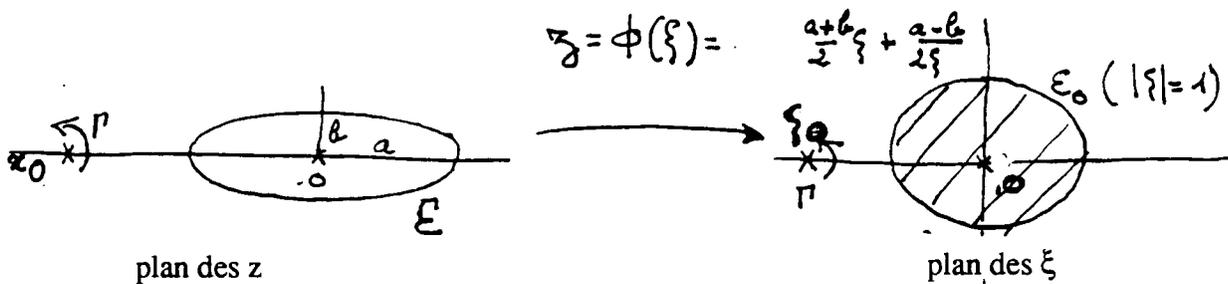
$$\vec{F} = -\rho \Gamma \vec{\text{grad}} \psi_0 \Big|_{R_0/\bar{z}_0}$$

$$\text{où } \psi_0 = \text{Im} \left[ -\frac{i\Gamma}{2\pi} \text{Log}(z - z_0) \right]$$

(voir exercice)

a6 - Effort d'un filet tourbillon sur un cylindre (elliptique par exemple)

On se ramène au cas précédent par une transformation conforme



$$F_x - i F_y = i \rho / 2 \oint_{\epsilon} f'^2(z) dz = i \rho / 2 \oint_{\epsilon_0} [\tilde{f}'(\xi)]^2 \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 \frac{dz}{d\xi} d\xi$$

où f est le potentiel complexe dans le plan des z

et  $\tilde{f}$  " " " " des  $\xi$  (voir le cas précédent)

$$F_x - i f_y = \rho i/2 \int_{|\xi|=1} [\tilde{f}'(\xi)]^2 \frac{d\xi}{\phi'(\xi)}$$

$$\text{avec } \tilde{f}(\xi) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \left[ \text{Log}(\xi + \xi_0) - \text{Log}\left(\xi + \frac{1}{\xi_0}\right) \right]$$

$$\text{et } \xi_0 \text{ tel que } x_0 = \frac{a+b}{2} \xi_0 + \frac{a-b}{\xi_0}$$

$$\phi'(\xi) = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2\xi^2} \text{ s'annulent en } \xi_1 \text{ et } \xi_2 \text{ se trouvant à l'intérieur du disque.}$$

Il reste ensuite à calculer la somme des résidus de  $\frac{\tilde{f}'^2}{\phi'}$  en  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\frac{1}{\xi_0}$

Le calcul est très facile en utilisant un logiciel de calcul formel type Macsyma qui peut calculer les résidus et aussi des développements asymptotiques (on peut par exemple traiter les cas  $a \rightarrow \infty$  ou  $b \rightarrow +\infty$ ).

### III - INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE

#### 1°) Introduction

Lorsqu'un obstacle est placé dans un écoulement, sa présence perturbe le mouvement d'une part et d'autre part est soumis aux efforts exercés par le fluide. Ceux-ci peuvent modifier le mouvement et la forme de la structure qui en général est déformable.

L'étude de ce type de problème comporte deux parties : hydrodynamique et comportement de la structure déformable.

#### Exemples

- Lubrification hydrodynamique :

Etude du mouvement de l'arbre tournant sur des paliers fixes  
Etude du cas où par exemple les paliers sont déformables (élastiques)

- Etude des phénomènes de résonance

sur une aile d'avion  
sur un pont (destruction du pont de Tacoma)  
sur un câble.....  
sur un réservoir contenant un liquide avec surface libre...

Un fluide en mouvement par rapport à un obstacle exerce sur celui-ci des efforts surfaciques de contact. On peut distinguer plusieurs contributions relatives à des modèles différents :

En se plaçant dans les cas où le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  est grand :

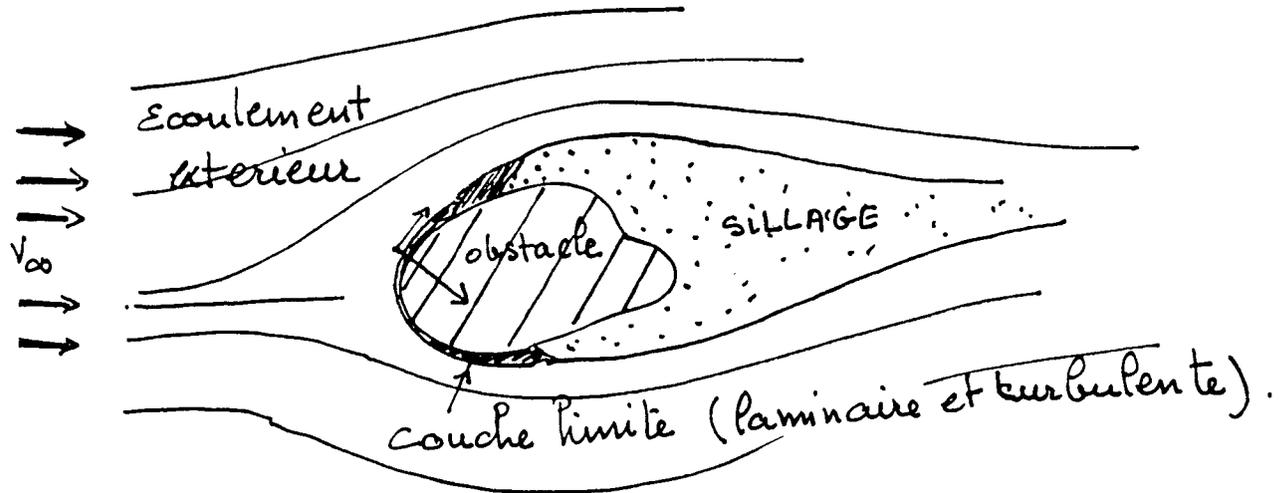
#### a) Contribution de l'écoulement extérieur

Un écoulement à potentiel de vitesse, uniforme à l'infini n'exerce aucun effort si la circulation de la vitesse\* autour de l'obstacle est nulle. L'effort de portance sur un cylindre est attribué à la présence d'une circulation  $\Gamma$  non nulle. En fait, il faut mettre en mouvement soit le fluide, soit l'obstacle.

Au début les effets visqueux interviennent. Une modélisation plus complète doit prendre en compte notamment des effets de sillage. La traînée est toujours nulle (paradoxe de d'Alembert).

## b) Contribution du frottement dans la couche limite

Les contraintes tangentielles à la paroi  $\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$  interviennent dans le calcul de l'effort. Cependant la contribution la plus importante reste celle des contraintes normales déterminées par l'écoulement extérieur et l'écoulement dans le sillage.



## 2°) Notions d'aérodynamique

### a) Définitions

On considère ici les efforts exercés par un fluide en écoulement **permanent**, uniforme à l'infini (de vitesse  $\vec{V}_\infty$ ) sur un obstacle "régulier" tridimensionnel ou bidimensionnel (cylindrique) borné.

On distinguera :

les obstacles **non profilés** et à **arêtes vives** (plaques dans un écoulement, par exemple)

et

les **obstacles profilés** pour lesquels les lignes de courant contournent la paroi sans pratiquement se décoller.

### - Efforts

$\vec{T}$  : Traînée

$\vec{P}$  : Portance

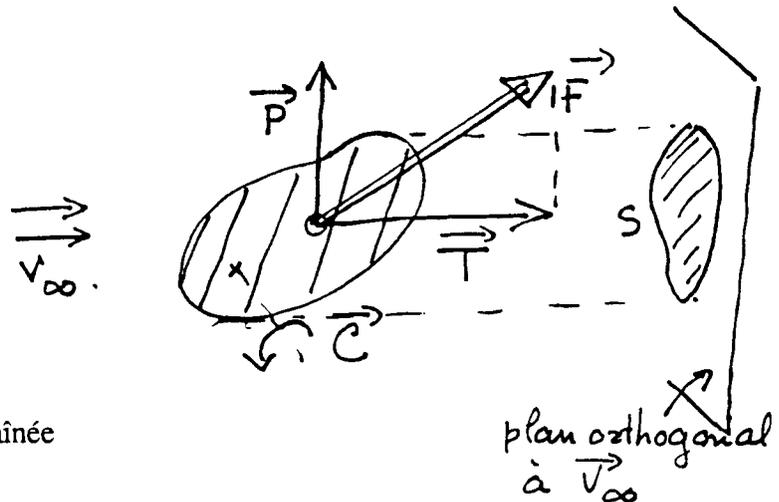
$\vec{C}$  : Couple

S : Maître Couple

$$C_x = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho S V_\infty^2} \quad \text{coefficient de traînée}$$

$$C_y \text{ ou } C_z = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho S V_\infty^2} \quad \text{coefficient de portance}$$

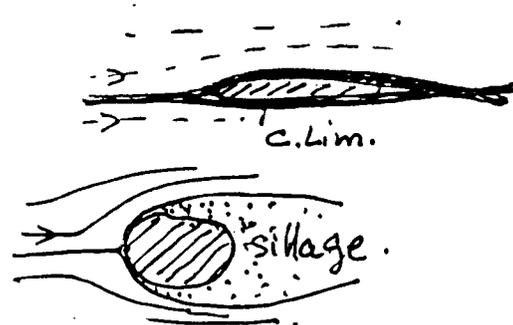
$$C_m = \frac{C}{\frac{1}{2} \rho S^3/2 V_\infty^2} \quad \text{coefficient de moment}$$



Pour des  $\mathcal{R}_e$  grands,  $\vec{T}$  est dû principalement :

- à la résistance de frottement pour les obstacles profilés
- à la résistance de pression (de forme) pour les obstacles non profilés

$C_p = (P - P_\infty) / \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$  est le coefficient de pression

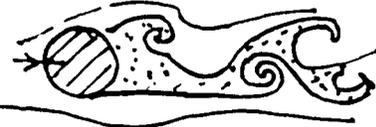
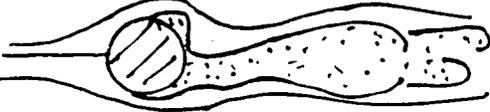


### b) Obstacles non profilés

Exemple. Cas du cylindre circulaire (longueur infinie)

Par raison de symétrie  $\vec{P} = 0$

On a les différents régimes :

$V_\infty$ → $\mathcal{R}_e \ll 1$ (Stokes)		Laminaire non décollé
$5 < \mathcal{R}_e < 40$		Décollement laminaire symétrique
$40 < \mathcal{R}_e < 200$		Allée tourbillonnaire de Von Karman
$200 < \mathcal{R}_e$		Ecoulement subcritique
$\mathcal{R}_e \nearrow$		Ecoulement critique
		Ecoulement supercritique

Si on fait tourner le cylindre, il apparaît une portance correspondant à l'effet Magnus (pour  $\mathcal{R}_e \gg 1$ ). Cependant à faible Reynolds la portance s'inverse (l'explication vient du fait que les couches limites ne se décolent pas de la même manière en haut et en bas du cylindre).

L'apparition de tourbillons alternés se décrochant périodiquement induit une traînée périodique dans le temps. La structure peut entrer en résonance si sa fréquence propre coïncide avec celle des

tourbillons. C'est ce phénomène qui fait "chanter" les fils électriques et qui est à l'origine de la destruction du pont de Tacoma aux USA. (En fait, dans ce cas, par l'écoulement il y a un fort couplage entre flexion et torsion).

Des études sérieuses doivent être faites concernant le comportement des structures non seulement par vent fort mais aussi par vent faible.

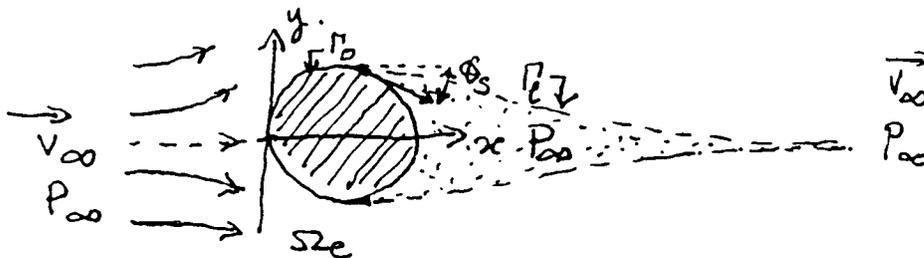
Une analyse rapide montre que  $S_t = f(\mathcal{R}_e)$  où  $\mathcal{R}_e = \rho \frac{V_\infty L_0}{\mu}$

et le nombre de Strouhal  $S_t = f_0 \frac{L_0}{V_\infty}$  où  $f_0$  est la fréquence de décrochement.

### c) Exemple de modélisation et de résolution

On considère un profil convexe dans un écoulement plan. On suppose que le sillage est une région de fluide mort (au repos)

Comme  $P \rightarrow P_\infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , la pression dans le sillage vaut  $P_\infty$



La frontière libre  $\Gamma_1$  séparant l'écoulement extérieur du sillage est :

- une ligne de courant  $\Gamma_1$
- une isobare  $P = P_\infty$

$\psi$  (fonction de courant) vérifie :

$\Delta\psi = 0 \text{ dans } \Omega_e$ $\psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \Gamma_1$ $ \vec{\text{grad}}\psi  = V_1 \text{ sur } \Gamma_1$
---

et aussi  $\vec{\text{grad}}\psi \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\sim} \vec{V}_\infty$

$V_1$  est une constante positive ( $\leq V_\infty$ ). Dans notre cas où  $0x$  est asymptote de  $\Gamma_1$  :  $V_1 = V_\infty$  (théorème de Bernoulli).

Si  $\phi$  est le potentiel de vitesse,  $V$  le module de la vitesse,  $\theta$  l'angle de  $\vec{V}$  avec  $0x$ , on a :

$$Ve^{i\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

On a  $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$   
 $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$

d'où  $dz = \frac{e^{i\theta}}{V} d\xi$

Cela définit la transformation du plan des  $z (x + iy)$  dans le plan des  $\xi (\phi + i\psi)$   
 (plus simplement si  $f$  est le potentiel complexe  $\xi = f(z) \Rightarrow \frac{d\xi}{dz} = Ve^{-i\theta}$  donc  $\frac{dz}{d\xi} = \frac{e^{i\theta}}{V}$ )

Transformation par hodographe

On prend comme nouvelle variable  $Z = \frac{dz}{d\xi} = X + iY$

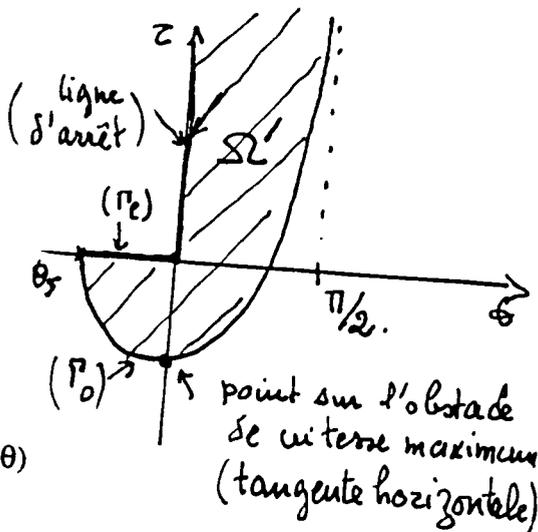
donc  $Z = \frac{e^{i\theta}}{V} \Rightarrow |Z| = \frac{1}{V}, \arg Z = \theta$

Cette transformation est particulièrement intéressante car la frontière libre  $\Gamma_1$  se transforme en le cercle  $|Z| = \frac{1}{V}$  Soit  $\tau = \text{Log} \frac{V_\infty}{V}$

Dans le plan  $(\tau, \theta)$  on a

On résoud :  $\psi = \psi(z, \theta)$

$\Delta\psi = 0$ dans $\Omega'$ $\psi = 0$ sur $\partial\Omega'$ + condition sur $\vec{\text{grad}}\psi$	$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$	sur $(\Gamma_0) : \tau = l(\theta)$
	$\frac{\partial\psi}{\partial z}$	
	$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}$	

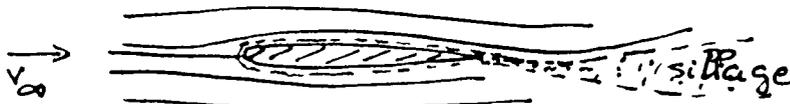


Voir en exercice le problème plus simple de la plaque plane.

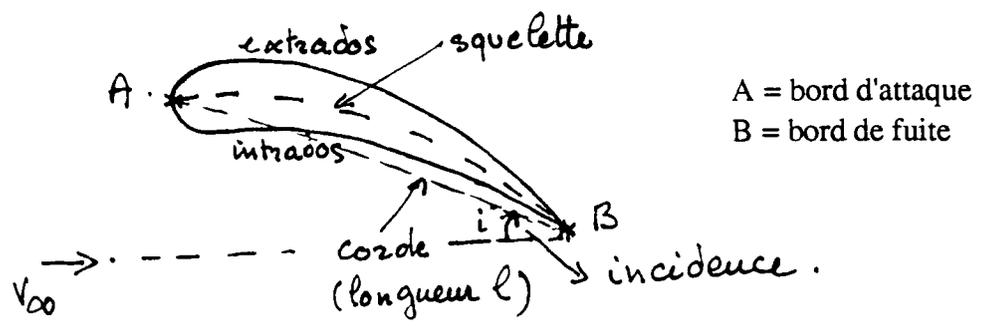
d) Cas des obstacles profilés

On distinguera notamment les obstacles de révolution et les obstacles bidimensionnels (aile d'avion, aube de turbine)

Pour de tels obstacles la traînée est fortement réduite



- L'étude de l'aile cylindrique est fondamentale aussi bien pour ses applications à l'aile d'avion que pour ses applications au calcul d'aubes ou de grilles d'aubes de turbomachine.



d1) Naissance de la portance

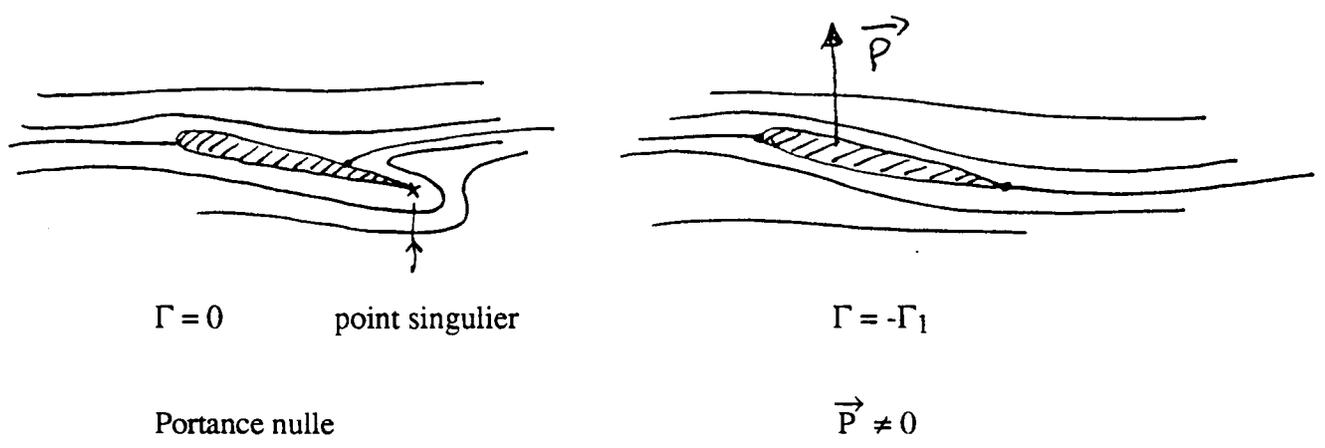
Lors de la mise en régime, les effets visqueux interviennent, il se forme des tourbillons qui en se détachant vont emporter une circulation  $\Gamma_1$ .

La circulation de la vitesse sur toute courbe suffisamment éloignée de l'obstacle (dans le domaine où le fluide a un mouvement obéissant aux équations d'Euler et à potentiel de vitesse) est nulle. La circulation  $\Gamma$  sur toute courbe entourant le profil et suffisamment proche est telle que :  $\Gamma + \Gamma_1 = 0$ .



Donc en régime établi, lorsque  $\Gamma_1$  sera rejetée à l'infini aval, la circulation résiduelle vaudra  $\Gamma = -\Gamma_1$

Joukovsky supposa que la circulation devait être telle que l'écoulement extérieur ne puisse pas contourner le bord de fuite (la vitesse ne serait pas bornée)

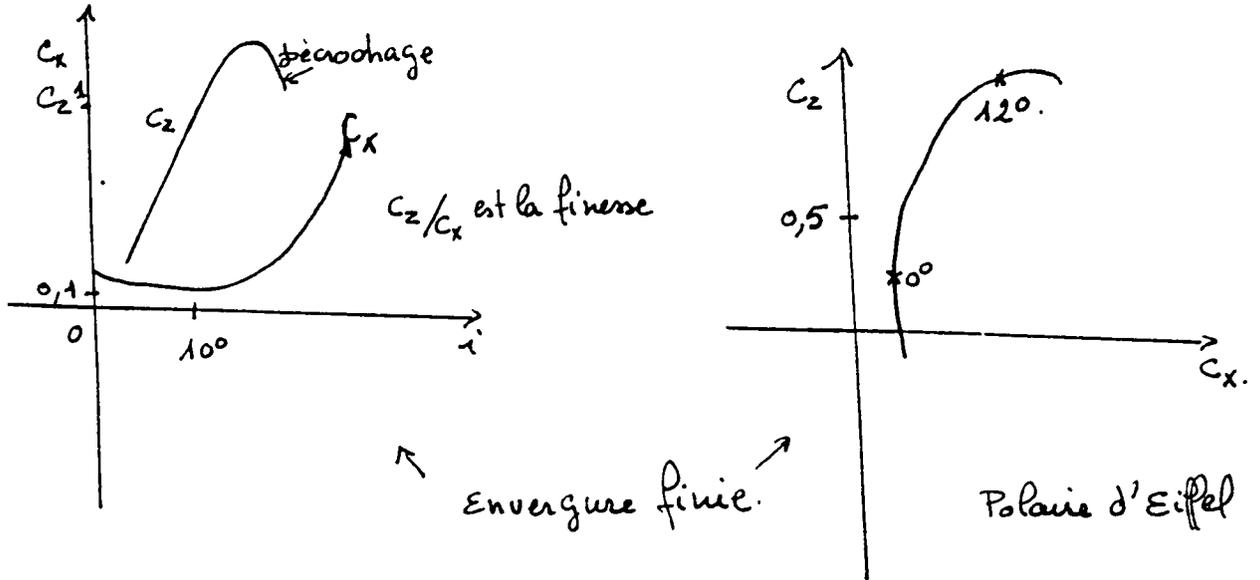


d2) Caractéristiques

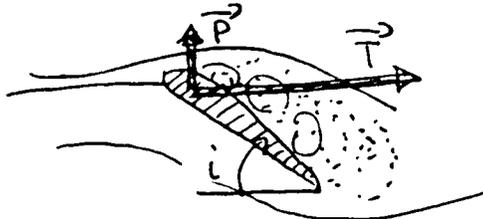
On constate que la différence de pression entre l'intrados et l'extrados est plus grande dans les régions de forte courbure donc dans un voisinage du point d'attaque.

La vitesse sur l'extrados sera beaucoup plus grande (dépassera  $V_\infty$ ) et donc, d'après le théorème de Bernoulli, la pression y sera d'autant plus faible. C'est à l'amont de l'aile que naît la portance.

Pour un profil d'aile donné et un nombre  $Re \gg 1$  donné, on définit les caractéristiques  $C_x = C_x(i)$ ,  $C_z = C_z(i)$  et  $C_z = f(C_x)$  (appelée polaire d'Eiffel) où  $i$  est l'incidence.



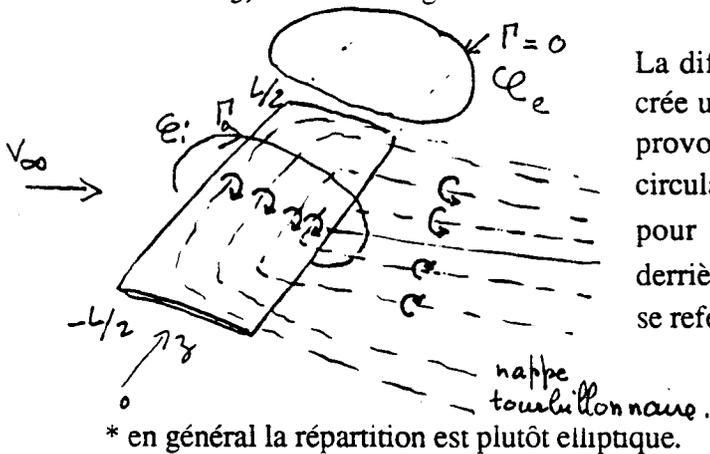
Lorsque  $i$  est trop grand, la couche limite décolle.  $C_z$  diminue,  $C_x$  augmente : c'est le phénomène de décrochage.



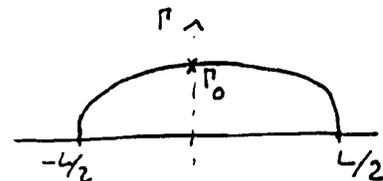
Pour une étude expérimentale, on peut utiliser les moyens suivants :

Soufflerie, balance aérodynamique, prises de pression, anémométrie (fil chaud - laser ...), visualisation (par fumée...) cuve rhéométrique (méthode analogique).

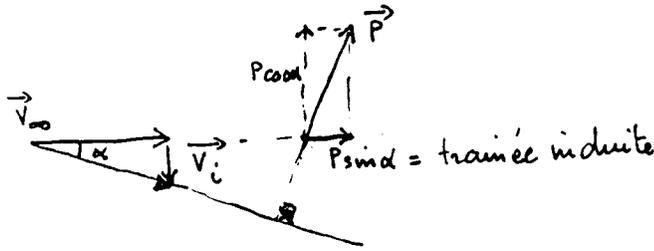
d3) Aile d'envergure finie



La différence de pression entre l'extrados et l'intrados crée un courant transversal aux extrémités de l'aile, qui provoque la création de tourbillons marginaux. La circulation de la vitesse de  $\Gamma_0$  à 0 pour  $C_i$  et  $C_e$ . Comme pour une envergure finie  $\Gamma$  dépend de  $z^*$  on place derrière l'aile des filets tourbillons d'intensité  $\delta\Gamma$  qui ne se referment pas en général en un filet unique sur l'aile.

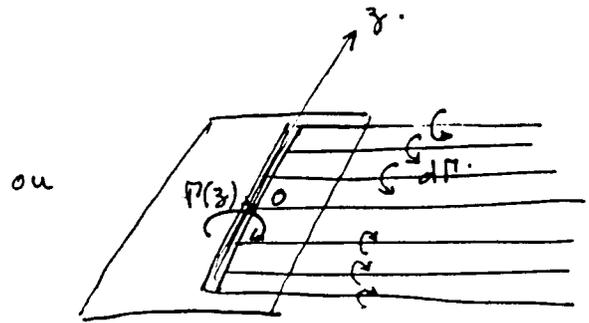
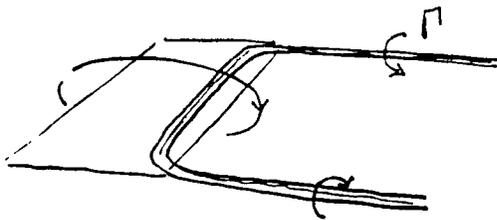


Ces tourbillons créent une composante de vitesse verticale  $\vec{v}_i$  appelée **vitesse induite**, pour l'écoulement  $\vec{V}_\infty + \vec{v}_i$  l'effort est orthogonal à la direction de ce mouvement. Il ne l'est plus par rapport à  $\vec{V}_\infty$ , une **traînée induite** apparaît alors



$$v_i(z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \cdot \frac{1}{z_0 - z} dz$$

Autres modèles simples



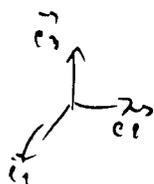
### 3) Obstacle en mouvement non uniforme

Pour mettre un obstacle en mouvement, il faut fournir l'énergie cinétique de l'obstacle lui-même et l'énergie cinétique du fluide qui l'entourne.

La **théorie des masses ajoutées** consiste à remplacer l'obstacle et le fluide par un système équivalent d'un point de vue inertiel (masse et moment d'inertie).

Calculons par exemple la masse équivalente dans le cas d'une translation de l'obstacle, pour un domaine fluide infini.

Soit  $\vec{V} = \text{grad} \phi$ ,  $\phi$  satisfaisant à :



Soit  $\phi_i$  solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_i = 0 \text{ sur } \Omega_e \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = n \cdot e_i \text{ sur } \partial \Omega \\ \text{grad } \phi_i \rightarrow 0 \text{ à l'infini} \end{array} \right.$$

Soit  $\vec{v}_0 = v_i e_i$  et  $\phi = v_i \phi_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi = 0 \text{ dans } \Omega_e \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{V}_0(t) \cdot \vec{n} \text{ dans } \partial \Omega \\ \text{grad } \phi \rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

Le problème cinématique ne fait pas intervenir explicitement le temps :

Soit  $\phi_i$  tel que  $\Delta \phi_i = 0$ ,  $\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = e_i \cdot n$ ,  $\phi_i \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$

$\phi_i$  : base de potentiel.

On écrit  $\vec{V}_0 = V_i \vec{e}_i$  alors  $\varphi = V_i \phi_i$  est solution.

$$E_c = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \rho |\vec{\text{grad}} \varphi|^2 dx = \int_{\partial \Omega} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial n} \varphi ds = \frac{1}{2} \rho V_i V_j \int_{\partial \Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds$$

ou  $E_c = \frac{1}{2} m_{ij} V_i V_j$  avec  $m_{ij} = \rho \int_{\partial \Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds$  ← ne dépend que de la forme de l'obstacle.

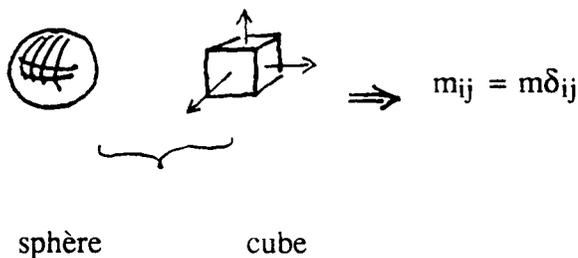
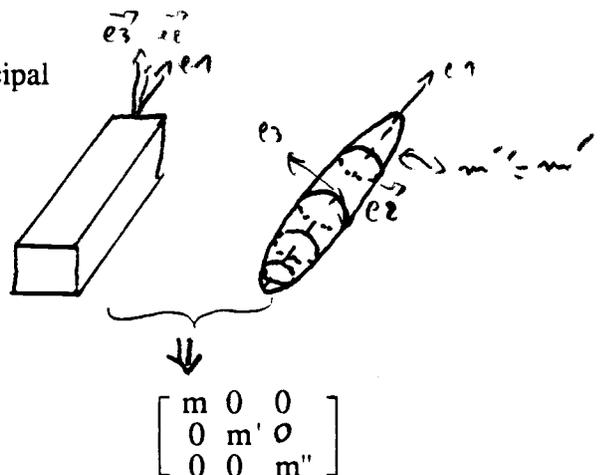
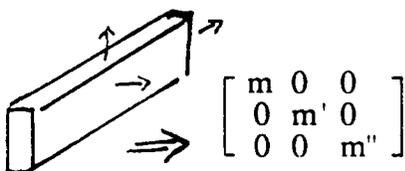
L'énergie cinétique totale du système fluide + obstacle :

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} (m_0 \delta_{ij} + m_{ij}) V_i V_j$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 masse                      tenseur de  
 de l'obstacle              masse ajoutée

On remarque que  $m_{ij} = m_{ji} \Rightarrow$  il existe un repère principal

Exemple



Il faut remarquer que la masse équivalente est un tenseur du deuxième ordre. Le fluide est caractérisé par un seul scalaire dans le cas où l'obstacle est une sphère par exemple.

Pour une sphère, choisissons Oz dans la direction de la vitesse et passons en coordonnées sphériques :

$$\text{alors } \varphi^* = -\frac{R_0^3 \cos \theta}{2r^2} \Rightarrow \vec{W} : \begin{cases} \frac{R_0^3 \cos \theta}{r^3} & \rightarrow e_r \\ 0 & \rightarrow e_\varphi \\ \frac{R_0^3 \sin \theta}{2r^3} & \rightarrow e_\theta \end{cases}$$



$$|\vec{W}|^2 = \frac{R_0^6}{4r^6} (1 + 3\cos^2 \theta)$$

$$\vec{M}_f = m \vec{I} \quad \text{et} \quad m = \frac{\rho R_0^6}{4} \int_{\Omega_e} \frac{1 + 3\cos^2 \theta}{r^6} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$m = \frac{\rho R_0^6}{4} \cdot 2\pi \int_{R_0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{1 + 3\cos^2 \theta}{r^4} \sin \theta \, d\theta \, dr$$

$$m = \frac{\pi \rho R_0^6}{2} \int_{R_0}^{+\infty} \frac{dr}{r^4} \cdot \int_0^\pi (1 + 3\cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

soit  $m = \frac{1}{2} \rho \frac{4\pi R_0^3}{3} = \frac{1}{2} \rho \Lambda_0$   $\left. \begin{array}{l} \Lambda_0 = \text{volume de la sphère} \\ m \text{ est la moitié de la masse d'eau que pourrait contenir} \\ \text{la sphère} \end{array} \right\}$

La masse du système sphère + liquide est donc :

$$\begin{array}{rcc} M = M_0 & + & m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{masse} & & \text{masse} \\ \text{sphère} & & \text{ajoutée} \end{array}$$

$\frac{2}{7}$  harmonique

$\frac{2}{27} \left( \frac{1}{7} \right)$  harmonique

#### 4) Interaction dans les turbomachines

Dans une machine réelle, un fluide en écoulement permanent (mouvement absolu) ne peut ni fournir ni recevoir de l'énergie.

En négligeant les effets visqueux (qui provoquent une perte dans l'énergie transférée entre le rotor et le fluide) et en supposant que le mouvement absolu est à potentiel de vitesse, on a :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = - \text{grad } g\mathcal{H}$$

si  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \text{cte}$  : le fluide ne gagne, ni ne perd d'énergie à la traversée du rotor

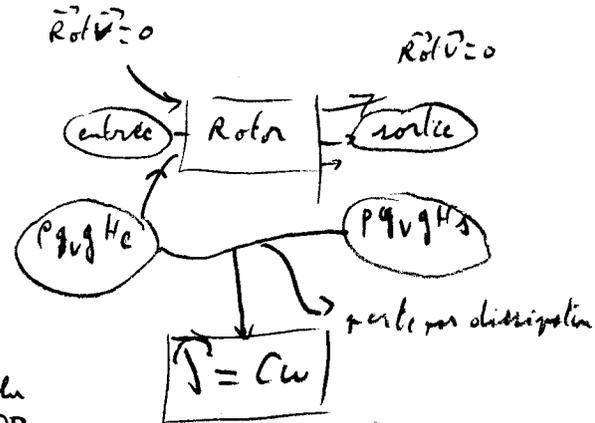
Calculons  $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$  :  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}\mathcal{H} \cdot \vec{V}$

en utilisant l'équation d'Euler :  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2g} \right)$

par la définition de  $\mathcal{H} \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial t}$

*le mot ne peut pas être stationnaire en absolu*

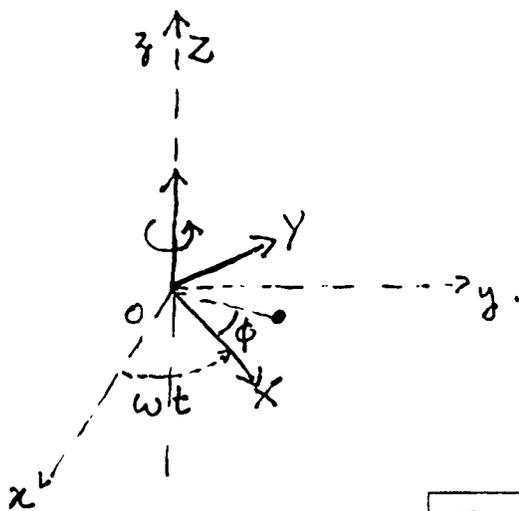
La variation de charge est liée aux fluctuations de pression  $\frac{\partial P}{\partial t}$



En fonctionnement constant, c'est le mouvement relatif qui lui est permanent.

On suppose que le rotor tourne à la vitesse  $\omega$  autour de l'axe fixe Oz

Soit  $R_\omega$  un repère lié au rotor



posons :  $R = r$   
 $Z = z$  et  $P(r, \theta, z, t) = P_\omega(R, \phi, Z)$   
 $\theta = \omega t + \phi$

on a alors :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P_\omega}{\partial t} + \frac{\partial P_\omega}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial P_\omega}{\partial \phi} \omega$$

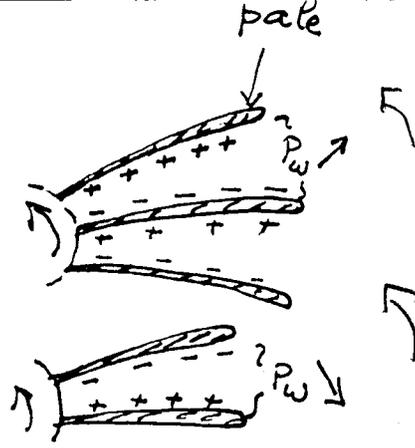
donc

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \frac{\omega}{\rho g} \frac{\partial P_\omega}{\partial \phi}$$

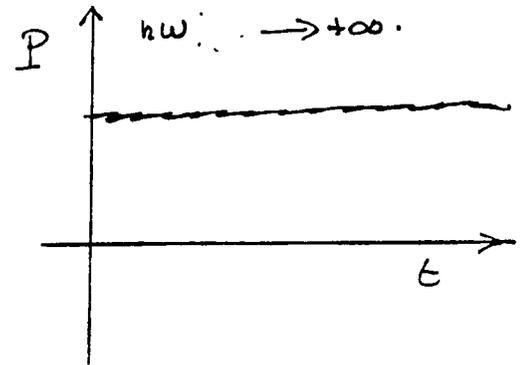
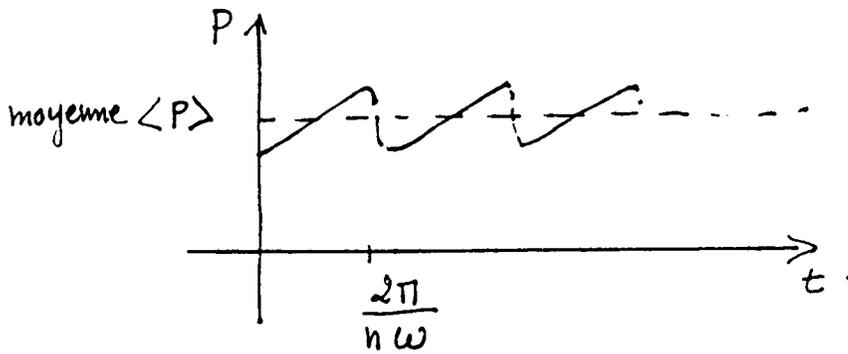
On en déduit donc :

pour une turbine  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{\partial P_\omega}{\partial \phi} > 0$

pour une pompe  $\frac{d\mathcal{H}}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{\partial P_\omega}{\partial \phi} < 0$



Vu la périodicité, si n est le nombre de Pales :



En passant du référentiel fixe  $\mathcal{R}$  au référentiel mobile  $\mathcal{R}_\omega$ , les opérateurs  $\vec{\text{grad}}, \Delta, \dots$  ne changent pas.

On a  $\vec{\gamma} = \underbrace{\vec{\gamma}_e}_{\text{entraînement}} + \underbrace{\vec{\gamma}_r}_{\text{relatif}} + 2 \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{W}}_{\text{vitesse relative}}$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\text{grad}} \left( -\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} \right) \quad (\vec{\omega} // Oz)$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \text{Rot } \vec{W} \wedge \vec{W} + \vec{\text{grad}} \frac{W^2}{2}$$

En stationnaire (relatif) on a

$$\rho ( \text{Rot } \vec{W} + 2 \vec{\omega} ) \wedge \vec{W} + \vec{\text{grad}} \left( \rho \frac{W^2}{2} + P - \rho \frac{U^2}{2} \right) = 0$$

où  $\vec{U}$  est la vitesse d'entraînement :  $U = \omega r$

*Rem: la théorie d'Euler ne devrait s'appliquer que dans le cas où le nb. de pales tendent vers l'infini.*

en projetant sur une ligne de courant relative :

$$\vec{W} \cdot \vec{\text{grad}} \left( \rho \frac{W^2}{2} + \hat{P} - \rho \frac{U^2}{2} \right) = 0$$

la charge relative :  $H_r = \frac{\hat{P}}{\rho g} + \frac{W^2 - U^2}{2g}$  est constante sur la ligne de courant relative.

Si la dissipation visqueuse intervenait on aurait une perte de charge relative

si  $s$  est l'abscisse curviligne, suivant la ligne de courant relative, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial(H - H_r)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \vec{V} \cdot \vec{U}$$

donc de l'entrée 1 à la sortie 2 du rotor

$$\Delta H = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{U}_1 - \vec{V}_2 \cdot \vec{U}_2}{g}$$

Formule d'Euler ← si on néglige les effets visqueux.

- Lorsqu'on décrit l'écoulement dans le repère tournant il faut écrire :

$$\vec{V} = \vec{W} + \vec{U} \Rightarrow \text{Rot } \vec{V} = \text{Rot } \vec{W} + 2 \vec{\omega}$$

donc si le mouvement est irrotationnel en absolu, en relatif ce n'est plus le cas :

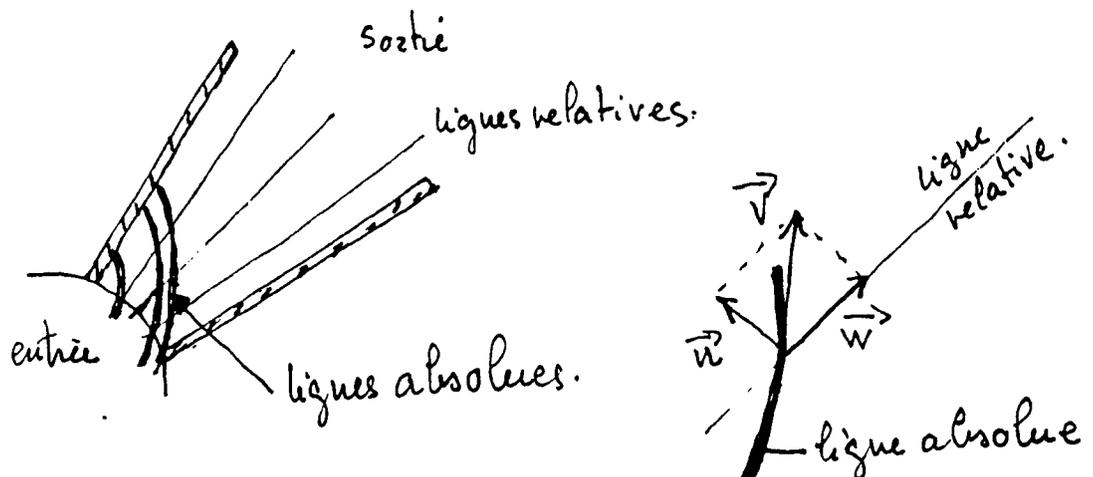
$$\text{Rot } \vec{W} = -2 \vec{\omega}$$

dans ce cas là :  $H_r = \text{cte}$  dans tout le fluide.

- Les conditions limites sur les parois du rotor sont  $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  sur le stator.

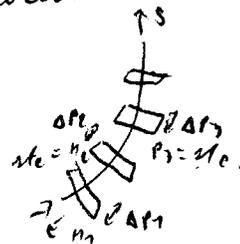
#### Remarque

En général il n'existe pas de ligne de courant absolue allant de l'entrée à la sortie et qui ne rencontre pas de paroi. Cela n'est vrai que pour les lignes de courant relatives.



Exemple : Ecoulement dans le rotor

en absolu :



$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{Rot } \vec{W} = 2 \vec{\omega} = \text{cte} \\ (2) \quad & \text{div } \vec{W} = 0 \\ & \vec{W} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur les aubes} \end{aligned}$$

Ecoulement bidimensionnel ( $\vec{\omega} \perp$  plan d'écoulement)

en polaire :

$$\frac{\partial}{\partial r} (W_\theta r) - \frac{\partial W_r}{\partial \theta} = -2\omega r \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (W_r r) + \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

Cas d'aubes radiales

si  $W_\theta = 0 (\theta^2)$

$$(1) \Rightarrow W_r = 2\omega r \theta + k(r) + 0 (\theta^2)$$

↓

$$(2) \Rightarrow W_\theta = -2\omega \theta^2 + [k(r) + r k'(r)] \theta + h(r)$$

on choisit  $k + rk' = 0$ ,  $h(r) = 0$

↓

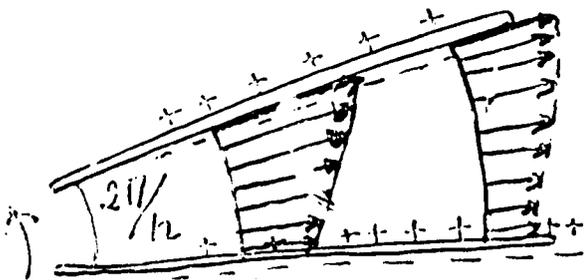
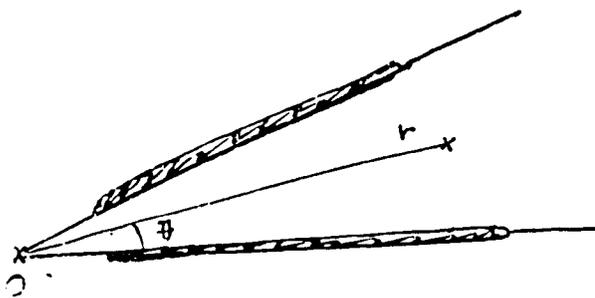
$$k = \frac{\lambda}{r}$$

Alors

$$W_r = 2\omega r \theta + \frac{\lambda}{r} + 0 (\theta^2)$$

$$W_\theta = 0 (\theta^2)$$

$\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$  est vérifiée au premier ordre



$\frac{2\pi}{h}$  petit.

## EXERCICES

### FLUIDES PARFAITS

1°) Examiner les écoulements isovolumes irrotationnels à lignes de courant parallèles rectilignes, à lignes de courant circulaires concentriques : cas d'un fluide réel entraîné par un cylindre tournant.

2°) Soit  $\rho = \rho(T)$  où  $T$  est la température.

Dans le champ de la pesanteur et dans un champ de température donnée, étudier les possibilités d'équilibre ou d'écoulement irrotationnel du fluide.

3°) Caractéristiques de l'écoulement donné par

$$\left. \begin{aligned} V_x &= a \sin z + c \cos y \\ V_y &= b \sin x + a \cos z \\ V_z &= c \sin y + b \cos x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{écoulement} \\ \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Arnold} \quad \text{Beltrami} \quad \text{Childress} \end{array}$$

4°) Dans le cas où  $\text{Rot } \vec{f} \neq 0$ , étudier la possibilité d'existence d'écoulements permanents à lignes de courant fermées.

5°) a) Montrer qu'en permanent la charge reste constante sur une ligne tourbillon.

b) Montrer que  $I = \int_{\mathcal{R}^3} \vec{V} \cdot \vec{\omega} \, d\vec{x}$  est constant ( $\frac{dI}{dt} = 0$ )

(ou  $I = \int_{\Sigma_t} \vec{V} \cdot \vec{\omega} \, d\vec{x} = \text{cte}$  si  $\Sigma_t =$  surface tourbillon)

c) Même chose pour  $\int_t V^2 \, d\vec{x}$

6°) Déterminer l'écoulement au voisinage du point d'arrêt où on négligera la courbure.

7°) A partir du potentiel complexe  $f(z) = Az^n$ , calculer l'écoulement dans ou autour d'un dièdre d'angle  $\alpha$ .

8°) Comment doit manoeuvrer un sous-marin immergé le long d'un quai rectiligne ? Mettre en place le calcul.