MARGERIT D.

ENSEM

2ième Année - Filière Mécanique

Maîtrise de Mécanique

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

UTILISATION DES DISTRIBUTIONS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

J.P. BRANCHER
D. MARGERIT

Ce fascicule a pour objectif principal d'introduire l'outil mathématique, que sont les distributions de Dirac, vu en second cycle universitaire, comme outil même de représentation des distributions concentrées de l'espace rencontrées en physique et généralement vues en premier cycle universitaire dans les cours d'électromagnétisme (charge ponctuelle, surfacique, dipôle électrique, dipôle magnétique, ...)

Après avoir fait le lien entre distribution en mathématiques et distributions en physique, cet outil de modélisation sera utilisé en mécanique des fluides pour décrire en fluide parfait les modèles limites que sont : les sources, les dipoles ou les filaments tourbillons.

Plan

1. Distributions concentrées de charge électrique et Dirac
2. Le doublet en mécanique des fluides
3. Dérivée de fonctions discontinues
4. Le filament tourbillon
5. La formule de Biot et Savart

Bibliographie

J. Bousquet Méthode des singularités Ch2. (Elements de la théorie des distributions)

① Distributions Concentrées de charge électrique et Dirac :

a) Rappel d'électrostatique :

Soient : ρ la charge volumique
$\vec{E}$ le champ électrique
V le potentiel électrique

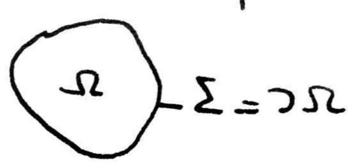
On a les relations fondamentales :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}\,V$$

D'où l'équation de Poisson du potentiel :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

Soit Ω un domaine de l'espace :



et soit ϕ le flux à travers $\partial\Omega$. On a :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\Omega} \rho\, d\tau = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

où $Q_i = \iiint_{\Omega} \rho\, d\tau$ est la charge dans le volume Ω

$$\boxed{\phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}} \quad \text{(Théorème de Gauss)}$$

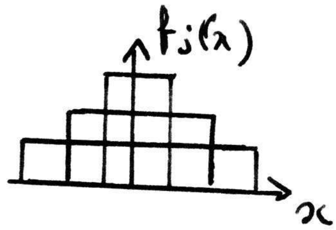
b) Le Dirac sur $\mathbb{R}$:

C'est la distribution notée δ_x telle que :
$\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \forall \varphi.$

Cette distribution peut être vue comme la limite d'une suite de distributions (T_{f_i}) associée à une suite de fonctions f_i. Pour cela, soit la suite de fonctions f_i telles que :

$$f_i = \frac{1}{i} \text{ pour } x \in \left]-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right[$$

$$= 0 \text{ pour } x \notin \left]-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right[$$



On remarque que $\int_{\mathbb{R}} f_i(x)\,dx = 1$

Soit T_{f_i} la distribution connoniquement associée à f_i. On a par définition

$$\langle T_{f_i}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_i \varphi\, dx \text{ d'où } \lim_{i\to\infty} \langle T_{f_i}, \varphi\rangle = \varphi(0) \int f_i\, dx = \varphi(0)$$

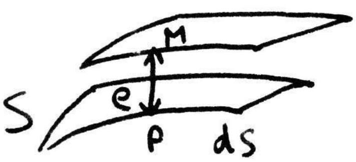
On a donc $\boxed{\lim_{i\to\infty} T_{f_i} = \delta_0}$ car par définition

$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0)$.

c) <u>Les différentes distributions concentrées dans $\mathbb{R}^3$</u> :

La charge volumique est définie par $\rho = \frac{dq}{d\tau}$.

c.1) <u>Distribution surfacique de charge :</u>



On a donc $dq = \rho\, d\tau = \rho e\, dS$

On définit la distribution surfacique de charge comme la limite :

$\begin{cases} e \to 0 \\ \rho \to \infty \end{cases}$ telle que $\rho e = \sigma$ soit constant.

où σ est la densité surfacique de charge. Ainsi qu'en b), on peut voir ce processus limite comme la limite d'une suite de fonctions mais on se limite ici à écrire abusivement :

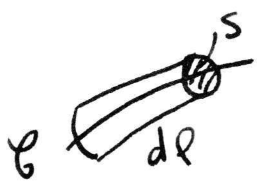
$$(\delta_S, \varphi) = \text{"} \iiint_\tau \delta_S \varphi(M)\, d\tau = \iint_S \left(\int_e \delta_S \varphi(M)\, de \right) dS = \iint_S \varphi(P) \left(\int_e \delta_S\, de \right) dS \text{"}$$

$$= \iint_S \varphi(P)\, dS \quad \text{car} \quad \int_e \delta_S\, de = 1$$

La distribution surfacique est donc :

$\boxed{\sigma \delta_S}$ avec $\boxed{\langle \sigma \delta_S, \varphi \rangle = \iint_S \sigma \varphi(P)\, dS}$

c2) <u>Distribution linéique de charge</u> :



On a donc $dq = \rho\, d\tau = \rho S\, dl$

On définit la distribution linéique de charge comme la limite :

$$\begin{cases} S \to 0 \\ \rho \to \infty \end{cases} \text{ telle que } \rho S = \lambda = \text{constant}$$

où λ est la densité linéique de charge. En voyant ce processus limite comme la limite d'une suite de distributions associée à une suite de fonctions, on obtient la distribution $\lambda \delta_{\mathcal{C}}$ telle que :

$$\langle \lambda \delta_{\mathcal{C}}, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \lambda \varphi(M)\, dl$$

c3) Distribution ponctuelle de charge :

On a donc $dq = \rho\, dP$ et on définit la distribution ponctuelle de charge comme la limite :

$$\begin{cases} dP \to 0 \\ \rho \to \infty \end{cases} \text{telle que } \rho\, dP = dq = q = \text{constant}.$$

où q est la densité ponctuelle de charge. En voyant ce processus limite comme la limite d'une suite de distributions associée à une suite de fonctions, on obtient la distribution $q\,\delta_{\underset{\sim}{x}}$ telle que :

$$(q\,\delta_{\underset{\sim}{x}}, \varphi) = q\,\varphi(\underset{\sim}{x})$$

c4) Distributions vectorielles :

Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n = 1,2,3$) dans $\mathbb{R}$.

On appelle distribution vectorielle sur $\mathbb{R}^p$ ($p = 2,3$) toute application linéaire et continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$.

De la même façon que précédement, on définit des distributions surfaciques, linéiques et ponctuelles pour des champs de vecteurs. On vera dans la suite l'utilisation de cette notion pour le cas du filament tourbillon et du champ des vitesses.

d) La charge ponctuelle q :

d1) Potentiel créé par la charge ponctuelle :

On utilise le théorème de Gauss et l'axisymétrie :

$$\left.\begin{aligned}\phi &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\ &= \iint_{\text{sphère}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\,4\pi r^2\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \boxed{E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}}$$

et $\boxed{V(r) = \dfrac{q}{\varepsilon_0 4\pi r}}$

d2) Equations en distribution de $\vec{E}$ et V :

$\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ devient $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta_0}$

$\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ devient $\boxed{\Delta V + \dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta_0 = 0}$

où l'on a écrit $\vec{E}$ et V pour $T_{\vec{E}}$ et T_V.

d3) Solution élémentaire du Laplacien :

A partir de d1 et d2, on voit que $\begin{cases}\Delta\varphi = \delta_0 \\ \operatorname{grad}\varphi \underset{\infty}{\to} 0\end{cases}$ a pour

solution $\boxed{\varphi = -\dfrac{1}{4\pi r}}$. Cette solution est dite solution

élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$. (Elle n'est pas la

même dans $\mathbb{R}^2$)

d4) Potentiel créé par i charges ponctuelles q_i :

Soient i charges ponctuelles q_i placées en $\underset{\sim}{x_i}$

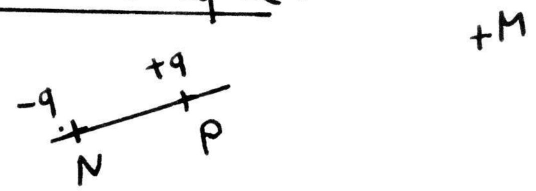
Par supperposition, on a :

$$\boxed{V(M) = \sum_i V_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x_i}|}}$$

On remarque alors que $\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} \delta_{\underset{\sim}{x_i}} = -\Delta V$

et que $V(M) = -\varphi * \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} \delta_{\underset{\sim}{x_i}}$ où $*$ est le produit de convolution et $\varphi = -\frac{1}{4\pi r}$ est la solution élémentaire du Laplacien.

d5) Le dipole électrique :



Soient $\vec{P} = q\,\vec{NP}$; $r = NM \simeq PM$ si M est loin du dipole, et $\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$. En faisant un developpement par rapport à r grand, on a pour un point M loin du dipole;

~~on a~~ $\boxed{V(M) = \frac{\vec{P}.\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

② Le doublet en mécanique des fluides :

a) Dérivée d'une distribution et Dirac :

On rappelle la définition de la dérivée d'une distribution T dans $\mathbb{R}^n$ sur une base :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

ainsi que la définition de la dérivée d'une distribution T dans $\mathbb{R}^n$ par rapport au vecteur $\vec{k}$:

$$\boxed{\langle \frac{\partial T}{\partial \vec{k}}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} \rangle}$$ ce qui correspond

à la limite : $$\boxed{\frac{\partial T}{\partial \vec{k}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tau_{\varepsilon \vec{k}} T - T}{\varepsilon}}$$ où

$\tau_{\varepsilon \vec{k}} T$ est la translation de $\varepsilon . \vec{k}$ appliquée à T.

Pour le Dirac ponctuel, on a :

$$\langle \frac{\partial \delta_{x_0}}{\partial \vec{k}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \frac{\delta_{\underset{\sim}{x_0}+\varepsilon \vec{k}} - \delta_{\underset{\sim}{x_0}}}{\varepsilon}, \varphi \rangle$$
$$= \langle \delta_{\underset{\sim}{x_0}}, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}}(x_0)$$

et donc $$\boxed{\langle \frac{\partial \delta_{\underset{\sim}{x_0}}}{\partial \vec{k}}, \varphi \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}}(\underset{\sim}{x_0})}$$

b) <u>Dérivée d'une famille de distributions</u> :

Soit une famille de distributions $T_{\underset{\sim}{\alpha}}$ paramétrée par le paramètre $\underset{\sim}{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Par exemple, $\delta_{\underset{\sim}{x}}$ lorsque $\underset{\sim}{x}$ varie forme une famille de paramètre $\underset{\sim}{x}$.

On définit alors $\left(\frac{\partial T_{\underset{\sim}{\alpha}}}{\partial \vec{k}}\right)_{\underset{\sim}{\alpha}}$, la dérivée de $T_{\underset{\sim}{\alpha}}$ par rapport à $\underset{\sim}{\alpha}$ dans la direction $\vec{k}$ par :

$$\boxed{\left(\frac{\partial T_{\underset{\sim}{\alpha}}}{\partial \vec{k}}\right)_{\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T_{\underset{\sim}{\alpha}+\varepsilon \vec{k}} - T_{\underset{\sim}{\alpha}}}{\varepsilon}}$$

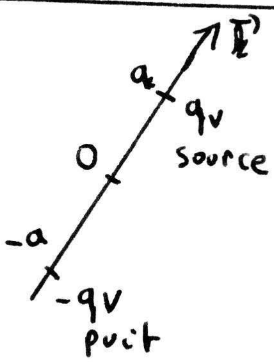
Pour le Dirac ponctuel, on a :

$$\left\langle \left(\frac{\partial \delta_{x_0}}{\partial \vec{k}}\right)_{x_0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \frac{\delta_{x_0+\varepsilon\vec{k}} - \delta_{x_0}}{\varepsilon}, \varphi \right\rangle$$

$$= \left\langle \delta_{x_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}}(x_0)$$

et donc $$\boxed{\left(\frac{\partial \delta_{x_0}}{\partial \vec{k}}\right)_{x_0} = -\frac{\partial \delta_{x_0}}{\partial \vec{k}}}$$

c) Rapprochement d'un puit et d'une source :



On effectue le passage à la limite $\begin{cases} a \to 0 \\ q_v \to \infty \end{cases}$ tel que $2a q_v = K =$ constant.

On va recherche le potentiel φ de l'écoulement que l'on appelle : écoulement du doublet.

Pour le puit : $\varphi_p = -\dfrac{-q_v}{4\pi|\vec{x} - (-a\vec{k})|}$ et pour la source $\varphi_s = -\dfrac{q_v}{4\pi|\vec{x} - (a\vec{k})|}$

D'où $$\varphi \underset{a\to 0}{=} \varphi_p + \varphi_s \underset{a \to 0}{=} -\frac{q_v}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x} - a\vec{k}|} - \frac{1}{|\vec{x} + a\vec{k}|}\right)$$

Or $$|\vec{x} - a\vec{k}|^2 = (\vec{x} - a\vec{k})\cdot(\vec{x} - a\vec{k}) = |\vec{x}|^2 - a^2 - 2\vec{x}\cdot\vec{k}\, a$$
$$\simeq |\vec{x}|^2\left(1 - \frac{2\vec{x}\cdot\vec{k}}{|\vec{x}|^2} a\right) \text{ si } a \to 0.$$

D'où $$\left.\begin{aligned} |\vec{x} - a\vec{k}|^{-1} &= |x|^{-1}\left(1 + \frac{\vec{x}\cdot\vec{k}}{|\vec{x}|^2} a\right) \\ |\vec{x} + a\vec{k}|^{-1} &= |x|^{-1}\left(1 - \frac{\vec{x}\cdot\vec{k}}{|\vec{x}|^2} a\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{q_v}{4\pi}\left(\frac{2\vec{x}\cdot\vec{k}}{|x|^2} a\right)$$

et finalement $$\boxed{\varphi = -\frac{K}{4\pi}\,\frac{\vec{x}\cdot\vec{k}}{|x|^3}}$$

d) Cherchons la valeur du Laplacien en distribution pour ce doublet :

On a $\Delta \varphi_s = qv\, \delta_{\underset{\sim}{x}+a\vec{k}}$ et $\Delta \varphi_s = -qv\, \delta_{x-a\vec{k}}$, d'où

$$\Delta \varphi = \lim_{\substack{a\to 0\\ 2aqv=K}} \Delta\varphi_s + \Delta\varphi_p = \lim_{a\to 0} qv\left(\delta_{\underset{\sim}{x}+a\vec{k}} - \delta_{\underset{\sim}{x}-a\vec{k}}\right)$$

$$= \lim_{a\to 0} qva2 \quad \frac{\delta_{\underset{\sim}{x}+a\vec{k}} - \delta_{x-a\vec{k}}}{2a} = K\left(\frac{\partial \delta_{\underset{\sim}{x}}}{\partial \vec{k}}\right)_{\underset{\sim}{x}}$$

et finalement $\boxed{\Delta \varphi = K\left(\frac{\partial \delta_{x}}{\partial \vec{k}}\right)_{\underset{\sim}{x}}}$

e) Laplacien et convolution :

On rappelle que pour un opérateur de dérivation linéaire L, on a : $\boxed{L(U * V) = L(U) * V = U * L(V)}$ (1)

e1) Soit E la solution élémentaire du Laplacien : $\Delta E = \delta_0$. Appliquons (1) en prenant $U = E$ et $V = \varphi$; il vient $E * \Delta\varphi = \Delta E * \varphi = \delta_0 * \varphi = \varphi$. Donc si $\Delta\varphi = f$, $E * f = \varphi$ et finalement on voit que

$\boxed{\varphi = E * f \text{ est solution de } \Delta\varphi = f}$

e2) Appliquons (1) en prenant $U = \varphi$ et $V = \delta_0$. Il vient $\Delta(\varphi) * \delta = \varphi * \Delta\delta$. Or $\Delta\varphi * \delta = \Delta\varphi$ et donc si $\Delta\varphi = f$ on a $\Delta\delta * \varphi = f$. Finalement on voit que

$\boxed{\Delta\varphi = f \text{ s'écrit } \Delta\delta_0 * \varphi = f}$ qui est une équation de convolution.

f) Retrouvons le résultat de c) à partir de d et e_1. On a

$$\Delta\varphi = K\left(\frac{\partial\delta_0}{\partial\vec{k}'}\right)_0 \text{, d'où } \varphi = \left(-\frac{1}{4\pi|\underline{x}|}\right) * \left[K\left(\frac{\partial\delta_0}{\partial\vec{k}'}\right)_0\right]$$

$$= \frac{K}{4\pi}\frac{1}{|\underline{x}|} * \frac{\partial\delta_0}{\partial\vec{k}'}$$

D'où $\varphi = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{|\underline{x}|}}{\partial\vec{k}'} * \delta_0 = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{|\underline{x}|}}{\partial\vec{k}'} = \frac{K}{4\pi}\vec{k}'\cdot\text{grad}\frac{1}{|\underline{x}|} = -\frac{K}{4\pi}\frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{|\underline{x}|^3}$

Finalement : $\varphi = -\frac{K}{4\pi}\frac{\vec{k}'\cdot\vec{x}}{|\underline{x}|^3}$.

③ Dérivée de fonctions discontinues :

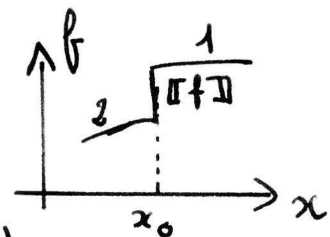
On introduit les notations :

f : fonction étudiée $\qquad \frac{df}{dx}$: dérivée de f

T_f : distribution associée à f $\quad T_{\frac{df}{dx}}$: distribution associée à $\frac{df}{dx}$

$\frac{dT_f}{dx}$: dérivée de la distribution T_f

a) fonctions sur $\mathbb{R}$:



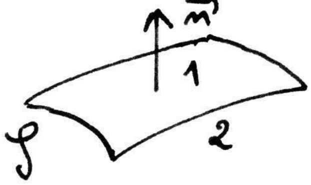
Soit la fonction f discontinue en x_0 et soit le saut $[\![f]\!] = f_1 - f_2$

On rappelle le résultat :

$$\boxed{\frac{dT_f}{dx} = T_{\frac{df}{dx}} + [\![f]\!]\,\delta_{x_0}}$$

b) fonctions vectorielles sur $\mathbb{R}^3$:

Soit $\vec{f}(M)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ discontinue à la traversée d'une surface $\mathcal{S}$ et soit $[\![\vec{f}]\!] = \vec{f_1} - \vec{f_2}$ le saut de $\vec{f}$ à travers $\mathcal{S}$.



On donne les résultats :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} T_{\vec{f}} &= T_{\operatorname{div}\vec{f}} + [\![\vec{f}]\!].\vec{n}\,\delta_{\mathcal{S}} \\ \text{et} \quad \operatorname{rot} T_{\vec{f}} &= T_{\operatorname{rot}\vec{f}} + \vec{n} \wedge [\![\vec{f}]\!]\,\delta_{\mathcal{S}} \end{aligned}}$$

c) Discontinuité de vitesse :

Soit un écoulement vérifiant $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ et $\operatorname{rot}\vec{V} = 0$ et ayant une discontinuité de vitesse $\vec{V_1} - \vec{V_2} = \lambda\vec{n} + \vec{\tau}$ à travers une surface $\mathcal{S}$ où $\vec{V}$ est la vitesse de l'écoulement et $\vec{\tau}$ dans le plan tangent à $\mathcal{S}$. Soit la décomposition de la vitesse : $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi + \operatorname{Rot}\vec{A}$. En appliquant b) il vient $\boxed{\Delta\varphi = \lambda\delta_S}$ et $\boxed{\Delta\vec{A} = (\vec{\tau}\wedge\vec{n})\,\delta_{\mathcal{S}}}$

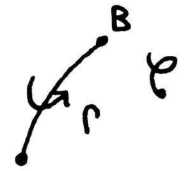
④ Le filament tourbillon :

Soit le champ de vorticité $\boxed{\vec{\omega} = \Gamma\delta_{\mathcal{C}}\,\vec{\tau}}$ concentré sur une courbe $\mathcal{C}$ avec $\langle \delta_{\mathcal{C}}\vec{\tau}, \varphi\rangle = \int_{\mathcal{C}} \varphi\,\vec{\tau}\,ds$

où : s est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$

$\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$

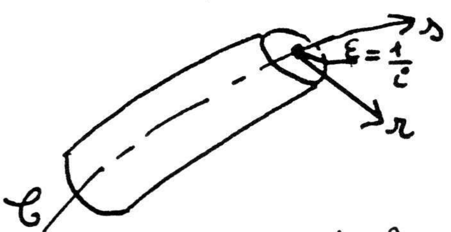
$\vec{\omega}$ est donc une distribution de Dirac concentrée sur une courbe :



a) <u>Interprétation physique de $\vec{\omega}$</u> :

Soit la suite de champs de vorticité $\vec{\omega_i}$ tels que :

$$\vec{\omega_i} = \frac{\Gamma}{\pi i^2}\vec{\tau} \quad \text{pour } r < \varepsilon = \frac{1}{i} \qquad i \in \mathbb{N}$$
$$= 0 \qquad \text{pour } r > \varepsilon = \frac{1}{i}$$



où + $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à $\mathcal{C}$
+ r est la distance à $\mathcal{C}$
+ s est une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$

C'est donc une suite de tubes de vorticité constante de rayon $\varepsilon = \frac{1}{i}$ et de fibre centrale $\mathcal{C}$.

On a $\displaystyle\iint_{\text{section} \perp \text{tube}} \vec{\omega_i}\, dS = \frac{\Gamma}{i^2\pi}\vec{\tau}\,\pi i^2 = \Gamma\vec{\tau}$

Soit $T\vec{\omega_i}$ la distribution cannoniquement associée à $\vec{\omega_i}$. On a par définition :

$$\langle T\vec{\omega_i}, \varphi\rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega_i}\,\varphi\, d\underset{\sim}{x} = \int_{\mathcal{C}}\Big\{\iint_{\text{section}\perp\text{tube}} \vec{\omega_i}\,\varphi\, dS\Big\}\, ds$$

D'<u>où</u> :
$$\lim_{i\to\infty}\langle T\vec{\omega_i}, \varphi\rangle = \int_{\mathcal{C}}\Big\{\varphi(s, r=0)\iint_{\text{section}\perp\text{tube}} \vec{\omega_i}\, dS\Big\}\, ds$$
$$= \int_{\mathcal{C}} \Gamma\vec{\tau}\,\varphi(s)\, ds$$

On a donc $\boxed{\vec{\omega} = \lim_{i\to\infty} T\vec{\omega_i} = \Gamma\,\delta_{\mathcal{C}}\,\vec{\tau}}$

car $\langle \delta_{\mathcal{C}}\vec{\tau}, \varphi\rangle = \int_{\mathcal{C}} \varphi\vec{\tau}\, ds$ par définition.

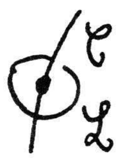
Ceci interprète $\vec{\omega}$ comme la limite de la suite de distributions ($T_{\vec{\omega}_i}$) associée à une suite de champs de vorticité $\vec{\omega}_i$.

b) <u>Flux de $\vec{\omega}$</u> :

On va calculer le flux de $\vec{\omega}$ à travers une surface orthogonale à $\mathcal{C}$.

$$\text{flux de } \vec{\omega} = \iint_{\substack{\text{section}\perp\\ \text{tube}}} \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = \lim_{i\to\infty} \iint_{\substack{\text{section}\perp\\ \text{tube}}} \vec{\omega}_i\cdot d\vec{S}$$

$$= \lim_{i\to\infty}\Big(\iint_{\text{section}} \omega_i\, dS\Big)\cdot\vec{\tau} = \Gamma\,\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = \Gamma$$



$$\text{circulation de } \vec{v} = \int_{\mathcal{L}} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\iint_{\text{section}} \vec{\omega}\cdot d\vec{S}}_{=\Gamma} \quad \text{(théo de Stokes)}$$

c) On rappelle que $\operatorname{div} T_{\vec{f}} = T_{\operatorname{div}\vec{f}} + [[\vec{f}]]\cdot\vec{n}\,\delta_S + [[\vec{f}]]\,\delta_x$,

d'où : (si A et B sont à l'infini)

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = \lim_{i\to\infty} \operatorname{div} T_{\vec{\omega}_i} = \lim_{i\to\infty}\left(T_{\operatorname{div}\vec{\omega}_i} + [[\vec{\omega}_i]]\cdot\vec{n}\,\delta_S\right)$$

Or $\operatorname{div}\vec{\omega}_i = 0$ car $\vec{\omega}_i$ est constante par morceaux et $\vec{\omega}_i$ n'effectue un saut que sur la surface du tube de vorticité. Comme $[[\vec{\omega}_i\cdot\vec{n}]] = 0$ sur le tube, on a donc

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{\omega} = 0} \text{ avec } \vec{\omega} = \Gamma\,\delta_{\mathcal{C}}\,\vec{\tau}$$

D'où le résultat $\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$ si A et B sont à l'infini

d) Recherchons la forme que prend Biot et Savart pour ce champ concentré :

$$\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \lim_{i \to \infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\omega}_i}{4\pi} \wedge \frac{\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi}}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\xi}|^3} d\underset{\sim}{\xi}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lim_{i \to \infty} \int_{\mathcal{C}} \left\{ \iint \vec{\omega}_i \, dS \right\} \wedge \left\{ \frac{(x - \xi)}{|x - \xi|^3} \right\}_{r=0} ds$$

d'où $\boxed{\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \Gamma \vec{\tau} \wedge \frac{x - \xi(s)}{|x - \xi(s)|^3} ds}$

⑤ La formule de Biot et Savart :

a) Dans $\mathbb{R}^3$:

On recherche $\vec{v}$ tel que $\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega} \\ \lim_{M \to \infty} \|\vec{v}\| = 0 \end{cases}$ lorsque

$\vec{\omega}$ est donné.

Comme $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, on a $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$ et comme $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}$, on a $\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$.

On recherche une solution $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$ avec $\vec{A}$ de la forme $\underline{\vec{A} = \vec{\omega} * \Psi}$ où Ψ est à déterminer et $*$ est le produit de convolution.

Alors $\operatorname{div} \vec{A} = (\operatorname{div} \omega) * \Psi$ car div est un operateur linéaire (voir 2e)

$= 0$ car $\operatorname{div} \omega = 0$

Il vient $\vec{\omega} = \text{rot}\,\vec{v} = \text{rot}(\text{rot}\,\vec{A})$

$$= \text{grad}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$= -\Delta\vec{A} \quad \text{car } \text{div}\,\vec{A} = 0$$

$$= -\Delta(\vec{\omega} * \Psi) = -\vec{\omega} * \Delta\Psi \quad \text{car } \Delta \text{ est linéaire (voir 2e)}$$

On en deduit $\begin{cases} \Delta\Psi = -\delta_0 \\ \text{grad}\,\Psi \to 0 \text{ en } \infty \end{cases}$ d'où $\Psi = \dfrac{1}{4\pi OM}$ (solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^3$)

On a donc $\boxed{\vec{A} = \vec{\omega} * \Psi = \vec{\omega} * \dfrac{1}{4\pi OM} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\vec{\omega}(\underset{\sim}{x}')}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|}\, dx'}$

et $\underline{\vec{v} = \text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\vec{A}} = \text{rot}_{\underset{\sim}{x}} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\omega(\underset{\sim}{x}')}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|}\, dx'$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\left(\frac{\omega(x')}{|x - x'|}\right) dx' =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint \left\{\frac{1}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|}\,\text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\omega(x') + \text{grad}_{\underset{\sim}{x}}\left(\frac{1}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|}\right) \wedge \omega(\underset{\sim}{x}')\right\} d\underset{\sim}{x}'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|^3} \wedge \vec{\omega}(\underset{\sim}{x}')\, d\underset{\sim}{x}' \quad \text{car } \text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\omega(\underset{\sim}{x}') = 0$$

Finalement : $\boxed{\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'}{|\underset{\sim}{x} - x'|^3} \wedge \vec{\omega}(\underset{\sim}{x}')\, d\underset{\sim}{x}'}$

Reste à vérifier que cette solution verifie bien le problème recherché. Comme $\vec{v} = \text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\vec{A}$, on a bien $\text{div}\,\vec{v} = 0$.

On a aussi $\text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\vec{v}(\underset{\sim}{x}) = \text{rot}_{\underset{\sim}{x}}(\text{rot}_{\underset{\sim}{x}}\,\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

$$= -\Delta\vec{A} \quad \text{car } \text{div}\,\vec{A} = 0$$

$$= -\Delta\left(\vec{\omega} * \frac{1}{4\pi OM}\right) = -\vec{\omega} * \Delta\left(\frac{1}{4\pi OM}\right) \quad \text{car } \Delta \text{ est linéaire}$$

$$= +\vec{\omega} * \delta = \vec{\omega}(\underset{\sim}{x})$$

<u>Remarque</u> : au lieu de se servir de la propriété vue en 2e, on peut montrer directement que $\operatorname{div} \vec{A} = 0$:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_{\underset{\sim}{x}} \left(\frac{\omega(x')}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|} \right) d\underset{\sim}{x}'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_{\underset{\sim}{x}} \left(\frac{1}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|} \right) \cdot \vec{\omega}(\underset{\sim}{x}')\, dx'$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \overrightarrow{\operatorname{grad}}_{\underset{\sim}{x}'} \frac{1}{|x - x'|} \cdot \vec{\omega}(\underset{\sim}{x}')\, d\underset{\sim}{x}' \quad \text{car } \operatorname{grad}_{\underset{\sim}{x}} \frac{1}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|} = -\operatorname{grad}_{\underset{\sim}{x}'} \frac{1}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_{\underset{\sim}{x}'} \left(\frac{\omega'}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|} \right) d\underset{\sim}{x}' \quad \text{car } \operatorname{div}_{\underset{\sim}{x}'} \omega(\underset{\sim}{x}') = 0$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\omega(x') \cdot \vec{n}}{|x - x'|}\, dA(\underset{\sim}{x}') = 0$$

b) <u>Dans $\mathbb{R}^2$</u> : Même problème qu'en a) mais dans $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}$ et $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$ d'où $\Delta \vec{A} = -\vec{\omega}$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\vec{A} = \Psi \vec{k}$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ avec $\vec{k}$ orthogonal à $\mathbb{R}^2$.

D'où $\Delta \Psi = -\omega$. Il vient donc $\Psi = -E * \omega$ (voir 2e)

où E est ~~la~~ solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{R}^2$:

$\boxed{E = \frac{1}{2\pi} \ln r}$ Il vient donc $\boxed{\Psi(\underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r * \omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\underset{\sim}{x}') \ln |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|\, dA}$

Et enfin $\vec{v} = \operatorname{rot}_{\underset{\sim}{x}} \vec{A} = \operatorname{rot}(\Psi \vec{k}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}_{\underset{\sim}{x}} \Psi \wedge \vec{k}$

or $\operatorname{grad}_{\underset{\sim}{x}} \Psi = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\omega(\underset{\sim}{x}')(x - \underset{\sim}{x}')}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|^2}\, d\underset{\sim}{x}'$ d'où finalement

$$\boxed{\vec{v} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\vec{\omega}(\underset{\sim}{x}') \wedge (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}')}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}'|^2}\, d\underset{\sim}{x}'}$$

On vérifie alors que $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \operatorname{rot}_{\underset{\sim}{x}} \vec{A} = 0$ et que $\operatorname{rot}_{\underset{\sim}{x}} \vec{v} = \omega(\underset{\sim}{x})$