DEBBABI Nabil

E.N.S.E.M.

UNIVERSITE NANCY I

Année Universitaire 1984/1985

COMPLEMENTS DE CALCULS TENSORIELS

"LES COORDONNEES CURVILIGNES ORTHOGONALES"

H. LANCHON

Polycopié distribué cette année :
Pour les modules : Mathématiques Fondamentales
Mécanique des Solides Déformables
aux étudiants de D.E.A. de Mécanique

2

E.N.S.E.M.
UNIVERSITE NANCY I

Année Universitaire 82 83

ETUDE DES COORDONNES CURVILIGNES ORTHOGONALES
(sous forme d'un problème)

– ETUDE DES COORDONNEES CURVILIGNES ORTHOGONALES.

Préliminaires : Soit M un point de l'espace Euclidien affine $\mathcal{E}^3$, il peut être repéré par X_1, X_2, X_3 coordonnées dans un trièdre cartésien fixe $(0, \vec{k}_1, \vec{k}_2, k_3)$ ou par trois paramètres x_1, x_2, x_3 (par exemple r, θ, X_3 en coordonnées cylindriques ou r, θ, φ en coordonnées sphériques) formant un système de coordonnées locales.

Les surfaces x_1 = constante, x_2 = constante, x_3 = constante se coupent deux à deux suivant les courbes appelées lignes coordonnées le long desquelles un seul paramètre varie.

En tout point de l'espace passent 3 lignes coordonnées; si ces lignes sont orthogonales entre elles en chaque point M, on dit que x_1, x_2, x_3 forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales. A la différence avec les coordonnées cartésiennes, les lignes coordonnées ne sont plus ici de direction fixe.

A chaque point $M(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathcal{E}^3$ on associe le vecteur : $\vec{M}(\underline{x}) = X_i(\underline{x})\,\vec{k}_i$; les vecteurs tangents aux lignes coordonnées en M sont alors : $\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_3}$.

Les conditions d'orthogonalité se traduisent par :

$$(1)\qquad \frac{\partial\vec{M}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_j} = K\,\delta_{ij},$$

et l'on pose :

$$(2)\qquad \vec{e}_{\underline{i}} = \frac{\partial\vec{M}}{\partial x_{\underline{i}}}\Big/\left|\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_{\underline{i}}}\right|$$

(le trait sous l'indice i signifie qu'il n'y a pas sommation en i ou encore que les deux indices soulignés ne comptent que pour un seul). Les vecteurs $\vec{e}_i$ forment un trièdre local orthonormé :

$$(3)\qquad \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij},$$

et l'on suppose que les paramètres x_1, x_2, x_3 sont numérotés de telle sorte que ce repère soit direct.

I - ELEMENTS DE LONGUEUR, DE SURFACE ET DE VOLUME EN COORDONNEES CURVILIGNES ORTHOGONALES.

a) En posant $h_i = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_i}\right|$ montrer que l'élément de longueur ds est donné par

$$\boxed{ds^2 = |d\vec{M}|^2 = h_1^2\, dx_1^2 + h_2^2\, dx_2^2 + h_3^2\, dx_3^2 \equiv h_{\underline{i}}^2\, dx_{\underline{i}}^2} \tag{4}$$

b) Soit $d\sigma$ un élément de surface de $\mathcal{E}^3$ décrite par deux paramètres α et β de telle sorte

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \beta} = \lambda\, \vec{n} \tag{5}$$

($\vec{n}$ vecteur "normale unitaire" à la surface).

montrer alors que $d\sigma$ est défini par

$$\boxed{\vec{n}\; d\sigma = h_2h_3\; dx_2dx_3\; \vec{e}_1 + h_3h_1\; dx_3dx_1\; \vec{e}_2 + h_1h_2\; dx_1dx_2\; \vec{e}_3} \tag{6}$$

(ici il y a sommation en i, j, k; mais les deux indices i soulignés ne comptent que pour un seul, ainsi que les deux indices j soulignés).

On obtiendra (6) en notant que par définition

$$\vec{n}\; d\sigma = d\vec{M} \wedge d\vec{M}' , \tag{7}$$

$d\vec{M}$ et $d\vec{M}'$ étant deux déplacements infinitésimaux de M le long respectivement des lignes α = constante et β = constante.

On pourra ainsi utiliser les identités

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \qquad \text{et} \tag{8}$$

$$dx_i\; dx_j = \frac{D(x_i, x_j)}{D(\alpha,\beta)}\, d\alpha\, d\beta \tag{9}$$

$\frac{D(x_i,x_j)}{D(\alpha,\beta)}$ étant le Jacobien de la transformation $\alpha,\beta \longrightarrow x_i(\alpha,\beta),\ x_j(\alpha,\beta)$

c) Montrer enfin que l'élément de volume est donné par

(10) $$\boxed{dv = h_1\ h_2\ h_3\ dx_1\ dx_2\ dx_3}$$

II - CALCUL DES VECTEURS $\vec{e}_{i,j}$.

Si nous posons :

(11) $$\vec{e}_{i,j} = \omega_i{}^j{}_k\ \vec{e}_k$$

a) Montrer que

(12) $$\boxed{\omega_p{}^j{}_q = -\ \omega_q{}^j{}_p \quad \text{et donc} \quad \omega_{\underline{i}}{}^j{}_{\underline{i}} = 0}$$

b) En notant que $\dfrac{\partial^2\vec{M}}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2\vec{M}}{\partial x_j \partial x_i}$ montrer que

(13) $$\omega_j{}^{(\underline{i})}{}_{\underline{i}} = \frac{h_{i,j}}{h_{\underline{j}}} \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et}$$

(14) $$\omega_i{}^j{}_k = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \neq k$$

III - EXPRESSION DES OPERATEURS CLASSIQUES.

a) Compte tenu de la définition

(15) $$d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\ .\ d\vec{M}$$

montrer que

(16) $$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} \equiv U_i\ \vec{e}_i = \frac{\varphi_{,\underline{i}}}{h_{\underline{i}}}\ \vec{e}_i}$$

b) Compte tenu de la définition

$$\text{(17)} \qquad d\vec{V} = \overline{\overline{\text{grad}}}\, \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

montrer que

$$\boxed{\text{(18)} \qquad \overline{\overline{\text{grad}}}\, \vec{V} \equiv T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{h_{\underline{j}}} \left(v_{i,\underline{j}} + v_p\, \omega_p{}^{\underline{j}}{}_i \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j}$$

c) Compte tenu de la définition

$$\text{(19)} \qquad \text{div}\, \vec{V} = \text{trace}\, \overline{\overline{\text{grad}}}\, \vec{V} = T_{ii}$$

montrer que

$$\boxed{\text{(20)} \qquad \text{div}\, \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 v_3) \right)}$$

d) Déduire de ce qui précède l'expression (21) de $\Delta\varphi$ en coordonnées curvilignes orthogonales.

e) En partant de la définition

$$\text{(22)} \qquad d\overline{\overline{\Pi}} = \overline{\overline{\overline{\text{grad}}}}\, \overline{\overline{\Pi}} \cdot d\vec{M}$$

montrer que

$$\boxed{\text{(23)} \qquad \overline{\overline{\overline{\text{grad}}}}\, \overline{\overline{\Pi}} \equiv S_{ijk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k = \frac{1}{h_{\underline{k}}} \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_{\underline{k}}} + T_{lj}\, \omega_l{}^{\underline{k}}{}_i + T_{il}\, \omega_l{}^{\underline{k}}{}_j \right] \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k}$$

en déduire l'expression (24) de div $\overline{\overline{\Pi}}$ puis l'expression (25) de $\Delta \vec{V}$ en coordonnées curvilignes orthogonales.

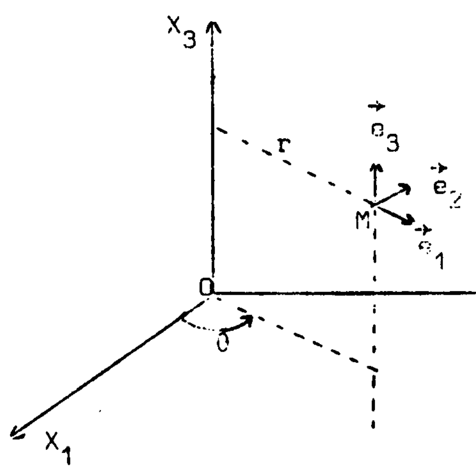
f) Montrer enfin que

$$(28) \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} \equiv \Omega_i\,\vec{e}_i = \epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{h_{\underline{j}}h_{\underline{k}}}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\,(h_{\underline{k}}v_{\underline{k}})\right\}\vec{e}_i}$$

On remarquera pour cela que $\overrightarrow{\text{rot}\ V} = \overline{\overline{\overline{\mathcal{E}}}}\ \overline{\overline{(\text{grad } V)}}^{T}$

$\overline{\overline{\overline{\mathcal{E}}}}$ étant le tenseur alterné fondamental et l'indice T désignant l'opération transposition.

IV - APPLICATION AUX COORDONNEES CYLINDRIQUES.



$x_1 = r$
$x_2 = \theta$
$x_3 = X_3$

a) calculer h_1, h_2, h_3

b) donnez les expressions respectives des éléments de longueur, d'aire et de volume en coordonnées cylindriques,

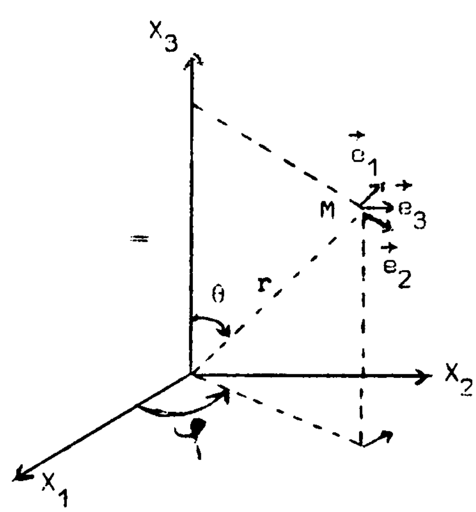
c) calculer les $\omega_{i\ k}^{\ j}$

d) déduire de a et c les expressions de $\overrightarrow{\text{grad}\ \varphi}$, $\overline{\overline{\text{grad } \vec{V}}}$, div $\vec{V}$, $\Delta\varphi$, rot $\vec{V}$ et div $\overline{\overline{\Pi}}$ en coordonnées cylindriques.

V - APPLICATION AUX COORDONNEES SPHERIQUES.

$x_1 = r$
$x_2 = \theta \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
$x_3 = \psi \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

mêmes questions a,b,c,d, que pour les coordonnées cylindriques.



Corrigé du problème 15

1. Eléments de longueur, de surface et de volume.

a) élément de longueur

il est défini par la longueur du vecteur infinitésimal $d\vec{M}$; ainsi

$$ds = |d\vec{M}|$$

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_i} dx_i = \left|\frac{\partial M}{\partial x_i}\right| dx_i \, \vec{e_i} = h_i \, dx_i \, \vec{e_i} \quad \text{d'où}$$

$$(4) \quad \boxed{ds^2 = |d\vec{M}|^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 = h_i^2 dx_i^2}$$

b) élément de surface

C'est l'aire d'un parallélogramme élémentaire tangent à la surface au point considéré $\underline{x}$; la surface considérée étant arbitraire, si elle est décrite par deux paramètres α, β, considérons :

$d\vec{M}'$ = accroissement infinitésimal de M le long des courbes α = constante

$d\vec{M}$, accroissement infinitésimal de M le long de β = constante

$$d\vec{M} = h_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha \, \vec{e_i}$$

L'élément de surface est alors donné par.

$$\vec{n} \, d\sigma = d\vec{M} \wedge d\vec{M}' = h_i h_j \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \beta} d\alpha \, d\beta \, \vec{e_i} \wedge \vec{e_j}$$

soit, compte tenu de

$$\vec{e_i} \wedge \vec{e_j} = \varepsilon_{ijk} \vec{e_k}$$

$$\vec{n}\, d\sigma = h_{\underline{i}}\, h_{\underline{j}} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\, \vec{e}_k$$

notons que, par exemple

$$\varepsilon_{ij1} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \beta} = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \frac{\partial x_3}{\partial \beta} - \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} = \frac{D(x_2, x_3)}{D(\alpha, \beta)}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{n}\, d\sigma = h_2 h_3 \frac{D(x_2,x_3)}{D(\alpha,\beta)} d\alpha\, d\beta\, \vec{e}_1 + h_3 h_1 \frac{D(x_3,x_1)}{D(\alpha,\beta)} d\alpha\, d\beta\, \vec{e}_2 + h_1 h_2 \frac{D(x_1,x_2)}{D(\alpha,\beta)} d\alpha\, d\beta\, \vec{e}_3$$

soit compte tenu de (9)

(6)
$$\boxed{\vec{n}\, d\sigma = h_2 h_3\, dx_3\, dx_2\, \vec{e}_1 + h_3 h_1\, dx_3\, dx_1\, \vec{e}_2 + h_1 h_2\, dx_1\, dx_2\, \vec{e}_3}$$

(la formule synthétique proposée dans le texte est fausse.

c) élément de volume

c'est le volume d'un parallélépipède élémentaire dont les côtés sont trois accroissements infinitésimaux pris le long de chaque ligne coordonnée d'où

$$dv = \left(\frac{\partial M}{\partial x_1}, \frac{\partial M}{\partial x_2}, \frac{\partial M}{\partial x_3} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= h_1 h_2 h_3 \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \right) dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= h_1 h_2 h_3\, \varepsilon_{ijk}\, \delta_{i1}\, \delta_{j2}\, \delta_{k3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

(10) $$\boxed{dv = h_1 h_2 h_3\, dx_1\, dx_2\, dx_3}$$

---

2. Calcul des vecteurs $\vec{e}_{i,j}$.

a) nous posons $\vec{e}_{i,j} = \omega_i{}^j{}_k\, \vec{e}_k$ or

$\vec{e}_p \cdot \vec{e}_q = \delta_{pq}$ ce qui implique $\vec{e}_{p,j}\, \vec{e}_q + \vec{e}_p \cdot \vec{e}_{q,j} = 0$

soit $\omega_p{}^j{}_k\, \delta_{kq} + \omega_q{}^j{}_k\, \delta_{kp} = 0$

donc (12) $$\boxed{\omega_p{}^j{}_q = -\omega_q{}^j{}_p \implies \omega_{\underline{p}}{}^j{}_{\underline{p}} = 0}$$

b) $\dfrac{\partial^2 \vec{M}}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 M}{\partial x_j \partial x_i}$ entraine $\left(h_i \vec{e}_i\right)_{,j} = \left(h_j \vec{e}_j\right)_{,i}$

soit $h_{i,j}\, \vec{e}_i + h_i\, \omega_i{}^j{}_p\, \vec{e}_p = h_{j,i}\, \vec{e}_j + h_j\, \omega_j{}^i{}_p\, \vec{e}_p$

pour $i = j$ on obtient une identité sans intérêt

pour $i \neq j$:

la projection sur $\vec{e}_i$ donne ;

$$h_{i,j} + h_i\, \omega_i{}^j{}_i = h_j\, \omega_j{}^i{}_i$$

mais $\omega_i{}^j{}_i = 0$ d'après (12)

d'où

(13) $\boxed{\omega_j{}^i{}_i = \dfrac{h_{i,j}}{h_j}}$ pour $i \neq j$.

la projection sur $\vec{e}_j$ redonne (13)

la projection sur $\vec{e}_k \neq \vec{e}_i \neq \vec{e}_j$ donne

$$h_i\, \omega_i{}^j{}_k = h_j\, \omega_j{}^i{}_k$$

soit

$$\frac{\omega_i{}^j{}_k}{h_j} = \frac{\omega_j{}^i{}_k}{h_i}$$

mais, compte tenu de (12)

$$\frac{\omega_i{}^j{}_k}{h_j} = -\frac{\omega_k{}^j{}_i}{h_j} = -\frac{\omega_j{}^k{}_i}{h_k} = \frac{\omega_i{}^k{}_j}{h_k}$$

et $$\frac{\omega_j{}^i{}_k}{h_i} = -\frac{\omega_k{}^i{}_j}{h_i} = -\frac{\omega_i{}^k{}_j}{h_k}$$

ainsi nécessairement

(14) $\boxed{\omega_i{}^j{}_k = 0 \quad \text{si } i \neq j \neq k}$

3. Expression des opérateurs classiques

a) $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$: φ étant une fonction scalaire de x_1, x_2, x_3

posons $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = u_i \vec{e}_i$ alors,

d'une part : $d\varphi = \varphi_{,i}\, dx_i$

et d'autre part $d\varphi = u_i \underline{h_i}\, dx_i$ car

$d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \cdot d\vec{M}$ et $d\vec{M} = \underline{h_i}\, \underline{dx_i}\, \vec{e}_i$

d'où $\varphi_{,i} = \underline{u_i}\, \underline{h_i}$ et finalement

$$(16) \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = u_i \vec{e}_i = \frac{\varphi_{,i}}{\underline{h_i}} \vec{e}_i}$$

b) $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{V}$ pour $\vec{V} = v_i \vec{e}_i$

posons $\overline{\overline{\text{grad}}}\,V = T_{ij}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

d'une part $d\vec{V} = dv_i\, \vec{e}_i + v_i\, d\vec{e}_i$

$$= v_{i,j}\, dx_j\, \vec{e}_i + v_i\, \vec{e}_{i,j}\, dx_j$$

$$= (v_{i,j} + v_p\, \omega_p{}^j{}_i)\, dx_j\, \vec{e}_i$$

d'autre part $d\vec{V} = \overline{\overline{\text{grad}}}\,V \cdot d\vec{M} = T_{ij}\, \underline{h_j}\, \underline{dx_j}\, \vec{e}_i = T_{ij}\, h_j\, dx_j\, \vec{e}_i$

d'où

$$(18) \qquad \boxed{T_{ij} = \frac{1}{h_j}\left(v_{i,j} + v_p\, \omega_p{}^j{}_i\right)}$$

c) $\text{div}\,\vec{V}$ = trace $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{V} = T_{ii}$

d'où ; compte tenu de (12) et (13)

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{1}{h_1} v_{1,1} + \frac{1}{h_2} v_{2,2} + \frac{1}{h_3} v_{3,3} + \frac{1}{h_1 h_2}\left[v_2 h_{1,2} + v_1 h_{2,1}\right] + \frac{1}{h_2 h_3}\left[v_3 h_{2,3} + v_3 h_{3,2}\right]$$

$$+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[v_1 h_{3,1} + v_3 h_{1,3}\right]$$ et finalement

$$(20) \qquad \boxed{\text{div}\,\vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 v_3)\right]}$$

d) $\underline{\Delta \varphi = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi}$

compte tenu des relations (16) et (20)

$$(21) \qquad \boxed{\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 v_3)\right]}$$

e) $\underline{\overline{\overline{\overline{\operatorname{grad} \Pi}}}}$ avec $\overline{\overline{\Pi}} = T_{ij}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$

posons $\overline{\overline{\overline{\operatorname{grad} \Pi}}} = S_{ijk}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} \otimes \vec{e_k}$

d'une part

$$d\overline{\overline{\Pi}} = \left(T_{ij,l}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j} + T_{ij}\, \omega_i{}^l{}_k\, \vec{e_k} \otimes \vec{e_j} + T_{ij}\, \omega_j{}^l{}_k\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_k}\right) dx_l$$

d'autre part

$$(22) \qquad d\overline{\overline{\Pi}} = \overline{\overline{\overline{\operatorname{grad} \Pi}}} \cdot d\vec{M} = S_{ijk}\, h_{\underline{k}}\, dx_{\underline{k}}\, \vec{e_i} \otimes \vec{e_j}$$

par adaptation des indices muets et identification, on obtient :

$$(23) \qquad \boxed{S_{ijl} = \frac{1}{h_{\underline{l}}}\left[T_{ij,\underline{l}} + T_{kj}\, \omega_k{}^l{}_i + T_{ik}\, \omega_k{}^l{}_j\right]}$$

$\operatorname{div} \overline{\overline{\Pi}} = S_{ijj}\, \vec{e_i}$ soit donc :

$$(24) \qquad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{div} \overline{\overline{\Pi}}} = \frac{1}{h_{\underline{j}}}\left[T_{ij,\underline{j}} + T_{kj}\, \omega_k{}^j{}_i + T_{ik}\, \omega_k{}^j{}_j\right] \vec{e_i}}$$

et comme

$$\Delta \vec{V} = \operatorname{div} \overline{\overline{\operatorname{grad} V}}$$

il suffit de remplacer $\overline{\overline{\Pi}}$ par $\overline{\overline{\operatorname{grad} \vec{V}}}$ dans (24) ; or les composantes de $\overline{\overline{\operatorname{grad} V}}$ sont données par (18) à savoir

$$T_{ij} = \frac{1}{h_{\underline{j}}}\left(v_{i,\underline{j}} + v_p\, \omega_p{}^j{}_i\right) \quad \text{d'où}$$

$$(25) \qquad \boxed{\Delta \vec{V} = \frac{1}{h_j}\left\{\left[\frac{v_{i,\underline{j}} + v_p\, \omega_p{}^j{}_i}{h_j}\right]_{,j} + \frac{1}{h_j}\left[v_{k,\underline{j}} + v_p\, \omega_p{}^j{}_k\right] \omega_k{}^j{}_i + \frac{1}{h_{\underline{k}}}\left[v_{i,\underline{k}} + v_p\, \omega_p{}^k{}_i\right) \omega_k{}^j{}_j\right] \vec{e_i}}$$

f) Rot $\vec{V}$ posons $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \Omega_i \vec{e}_i$; on a alors.

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} T_{kj} \quad \text{en posant } T_{kj}\, \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j = \overline{\overline{\text{grad}\, V}}$$

soit encore :

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(T_{kj} - T_{jk}) \; ; \text{ car la partie symetrique de } \overline{\overline{T}}$$

donne une contribution nulle.

à partir de (18) on obtient

$$\frac{1}{2}(T_{kj} - T_{jk}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_{\underline{j}}} v_{k,j} - \frac{1}{h_k} v_{j,k}\right] - \frac{1}{2 h_{\underline{j}} h_{\underline{k}}}\left[v_{\underline{j}}\, h_{\underline{j},k} - v_{\underline{k}}\, h_{\underline{k},j}\right]$$

$$= \frac{1}{2 h_j h_k}\left[(h_k v_k)_{,j} - (h_{\underline{j}} v_{\underline{j}})_{,\underline{k}}\right]$$

alors, en posant $s_{jk} = \dfrac{1}{h_j h_k}\left[h_{\underline{k}} v_{\underline{k}}\right)_{,\underline{j}}$

on constate que la partie antisymetrique de $\overline{\overline{T}} =$ - la partie antisymetrique de $\overline{\overline{S}}$, d'où

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[s_{jk} - s_{kj}\right] = \varepsilon_{ijk} s_{jk} \quad \text{soit enfin}$$

$$(26) \qquad \boxed{\Omega_i \vec{e}_i = \overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \varepsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{h_{\underline{j}} h_{\underline{k}}}(h_{\underline{k}} v_{\underline{k}})_{,\underline{j}}\right\}\vec{e}_i}$$

---

4. Applications aux coordonnées cylindriques

$x_1 = r \qquad\qquad X_1 = r\cos\theta$

$x_2 = \theta \qquad\qquad X_2 = r\sin\theta$

$x_3 = X_3 \qquad\qquad X_3 = x_3$

a) calcul de h_1, h_2, h_3

$$h_1 = \left|\frac{\partial M}{\partial x_1}\right| = \left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{1/2} = 1$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}\right| = \left(r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\right)^{1/2} = r .$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial M}{\partial x_3}\right| = 1$$ ainsi

$$(27) \qquad \boxed{h_1 = 1 \; ; \; h_2 = r \; ; \; h_3 = 1}$$

b) <u>éléments de longueur</u> : d'après (4) et (27)

$$(28) \qquad \boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dx_3^2 .}$$

<u>élement de surface</u> : d'après (6) et (27).

$$(29) \qquad \boxed{\vec{n}\, d\sigma = r\, d\theta\, dx_3\, \vec{e}_1 + dx_3\, dr\, \vec{e}_2 + r\, dr\, d\theta\, \vec{e}_3}$$

<u>élement de volume</u> : d'après (10) et (27)

$$(30) \qquad \boxed{dv = r\, dr\, d\theta\, dx_3}$$

---

c) <u>Calcul des $\omega_i{}^j{}_k$</u> : d'après (12) (13) (14) et (27).

$$(31) \quad \begin{cases} \omega_1{}^2{}_3 = \omega_2{}^3{}_1 = \omega_3{}^1{}_2 = -\omega_1{}^3{}_2 = -\omega_2{}^1{}_3 = -\omega_3{}^2{}_1 = 0 . \\ \omega_1{}^2{}_2 = 1 = -\omega_2{}^2{}_1 \; ; \; \omega_3{}^1{}_1 = \omega_1{}^3{}_3 = \omega_2{}^3{}_3 = \omega_3{}^2{}_2 = \omega_2{}^1{}_1 = 0 . \\ \text{tous les autres } \omega_i{}^j{}_k \text{ sont nuls} \end{cases}$$

---

d) <u>expression des différents opérateurs</u> d'après (16) et (27)

$$(32) \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\vec{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\,\vec{e}_3}$$

d'après (18) et (27)

$$(33)\quad \underset{\text{dans la base } \vec{e}_1,\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3}{\overline{\overline{\operatorname{grad} V}}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} - v_2\right] & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial \theta} + v_1\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

d'après (20) et (27) ou mieux d'après la définition de $\operatorname{div} \vec{V}$

$$(34)\quad \operatorname{div} \vec{V} = \text{trace de } \overline{\overline{\operatorname{grad} V}} = \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + v_1\right) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$(35)\quad \Delta \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

$$(36)\quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_3}{\partial \theta} - r\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right]\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial r}\right)\vec{e}_2 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_2) - \frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right]\vec{e}_3$$

$$(37)\quad \underset{\text{dans la base } \vec{e}_i}{\operatorname{div} \overline{\overline{T}}} = \begin{cases} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{12}}{\partial \theta} - T_{22} + T_{11}\right] + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + T_{12} + T_{21}\right] + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{32}}{\partial \theta} + T_{31}\right] + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{cases}$$

et enfin en remplaçant dans la relation précédente les T_{ij} par les composantes données par (33) de $\overline{\overline{\operatorname{grad} V}}$ dans $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on a :

$$(38)\quad \underset{\text{dans la base } \vec{e}_i}{\overrightarrow{\Delta V}} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} - 2\dfrac{\partial v_2}{\partial \theta} - v_1\right] + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_1}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}. \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} + 2\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} - v_2\right] + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_2}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}. \end{cases}$$

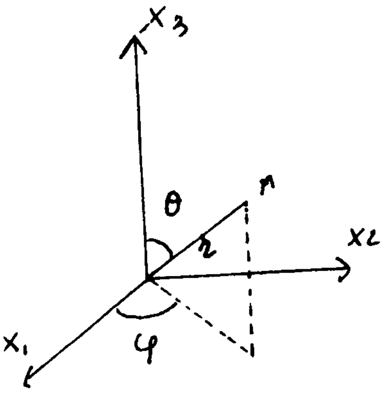
soit encore

$$\overrightarrow{\Delta V} = \begin{cases} \Delta v_1 - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_2}{\partial \theta} - \dfrac{v_1}{r^2}. \\ \Delta v_2 + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} - \dfrac{v_2}{r^2}. \\ \Delta v_3 \end{cases}$$

5. Application aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \varphi \end{cases} \qquad \begin{aligned} X_1 &= r \sin\theta \cos\varphi \\ X_2 &= r \sin\theta \sin\varphi \\ X_3 &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &0 \leq \theta \leq \pi \\ &0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

a) calcul de h_1, h_2, h_3



$$\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}\right| = (\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta)^{1/2} = 1$$

$$\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2}\right| = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}\right| = (r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta)^{1/2} = r$$

$$\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_3}\right| = \left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}\right| = (r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)^{1/2} = r\sin\theta$$

ainsi (39) $\boxed{h_1 = 1 \; ; \; h_2 = r, \; h_3 = r\sin\theta}$

b) élément de longueur

(40) $\boxed{ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2}$

élément de surface

(41) $\vec{n}\, d\sigma = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_1 + r\sin\theta \, d\varphi \, dr \, \vec{e}_2 + r \, dr \, d\theta \, \vec{e}_3$

élément de volume

(42) $dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$.

c) Calcul des $\omega_i{}^j{}_k$

$\omega_i{}^j{}_k = 0$ si $i \neq j \neq k$ ou si $i = j = k$.

$$\begin{aligned} &\omega_1{}^2{}_2 = 1 = -\omega_2{}^2{}_1 \; ; \; \omega_1{}^3{}_3 = \sin\theta = -\omega_3{}^3{}_1 \\ &\omega_2{}^1{}_1 = 0 = -\omega_1{}^1{}_2 \; ; \; \omega_2{}^3{}_3 = \cos\theta = -\omega_3{}^3{}_2 \\ &\omega_3{}^1{}_1 = 0 = -\omega_1{}^1{}_3 \; ; \; \omega_3{}^2{}_2 = 0 = -\omega_2{}^2{}_3 \end{aligned} \qquad (43)$$

d) expression des différents opérateurs

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{e}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\vec{e}_3 \tag{44}$$

$$\overline{\overline{\text{grad}\,\vec{V}}} \text{ dans la base } (\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial \theta} - v_2\right] & \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial \varphi} - v_3\sin\theta\right] \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial v_2}{\partial \theta} + v_1\right] & \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial v_2}{\partial \varphi} - v_3\cos\theta\right] \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial v_3}{\partial \varphi} + v_1\sin\theta + v_2\cos\theta\right] \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + v_1\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + v_1\sin\theta + v_2\cos\theta\right] \tag{46}$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right] + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

soit

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\,\text{tg}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{47}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} \text{ dans la base } (\vec{e}_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\, v_3\right) - \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(r v_2\right)\right] \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta . v_3\right)\right] \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r v_2\right) - \dfrac{\partial v_1}{\partial\theta}\right] \end{cases} \tag{48}$$

$$\overrightarrow{\text{div}\,\overline{\overline{T}}} \text{ dans la base } \vec{e}_i = \begin{cases} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{12}}{\partial\theta} - T_{22} + T_{11}\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial T_{13}}{\partial\varphi} - \sin\theta\, T_{33} + \sin\theta\, T_{11} + \cos\theta\, T_{12}\right] \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{22}}{\partial\theta} + T_{12} + T_{21}\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial T_{23}}{\partial\varphi} - \cos\theta\, T_{33} + \sin\theta\, T_{21} + \cos\theta\, T_{23}\right] \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial T_{32}}{\partial\theta} + T_{31}\right] + \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial T_{33}}{\partial\varphi} + \sin\theta\, T_{13} + \cos\theta\, T_{23} + \sin\theta\, T_{31} + \cos\theta\, T_{32}\right] \end{cases} \tag{49}$$

En remplaçant dans cette expression les T_{ij} par les composantes de $\overline{\overline{\text{grad}\,\vec{V}}}$ données en (45), on obtient finalement

(50) $\overrightarrow{\Delta V}$ dans la base $(\vec{e}_i)$

$$\overrightarrow{\Delta V} = \begin{cases} \Delta v_1 - \dfrac{2v_1}{r^2} - \dfrac{2\,\mathrm{cotg}\,\theta}{r^2}\, v_2 - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_2}{\partial\theta} - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial v_3}{\partial\varphi} \\[2ex] \Delta v_2 - \dfrac{v_2}{r\sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_1}{\partial\theta} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial v_3}{\partial\varphi} \\[2ex] \Delta v_3 - \dfrac{v_3}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{2}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial v_1}{\partial\varphi} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial v_2}{\partial\varphi} \end{cases}$$

<u>conclusion</u> : nous avons ainsi calculé toutes les expressions qui permettront d'écrire les équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées curvilignes orthogonales (en particulier cylindriques et sphériques)
