ENSEM (1ère année) AnnéeUniversitaire 1996/1997
Université de Nancy I (Licence de Mécanique)

Module: MATHEMATIQUE
feuille d'exercice N° 1 de Mathématique
proposé par Bilal Baraké
Thème: **Calcul tensoriel élémentaire.**
(1er cours du 23/9/1996)

1) Calcul vectoriel:

Calculer en utilisant le tenseur (ε_{ijk}):

$(\bar{A} \wedge \bar{B}).(\bar{C} \wedge \bar{D})$

en fonction des produits scalaires deux à deux des vecteurs $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$..

2) Identités classiques:

Soient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ deux champs de vecteurs et φ une fonction scalaire tous trois définis dans un domaine de R^3.Rappelons que:

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \varphi_{,i}\,\bar{k}_i$$

$$div\bar{A} = A_{i,i}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{,i,i}$$

$$\Delta\bar{A} = A_{i,jj}\,\bar{k}_i$$

$$\overrightarrow{grad}\,\bar{A} = A_{i,j}\,\bar{k}_i \otimes \bar{k}_j$$

les $\bar{k}_i$ étant les vecteurs unitaires de base du repère de travail.orthonormé

En supposant que $\bar{A}$, $\bar{B}$ et φ sont deux fois continûment dérivables. Retrouver, en utilisant les propriétés du tenseur alterné fondamental ; les identités intrinsèques classiques permettant de développer les expressions suivantes: en coordonées cartésiennes.

a) $div(\bar{A}\varphi)$

b) $\overrightarrow{rot}(\bar{A}\varphi)$

c) $div(\bar{A} \wedge \bar{B})$

d) $div(\overrightarrow{rot}\,\bar{A})$

e) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\varphi)$

f) $div(\overrightarrow{grad}\varphi)$

g) $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\bar{A}$

h) $\overrightarrow{rot}(\bar{A} \wedge \bar{B})$

i) $\overrightarrow{grad}(\bar{A}.\bar{B})$

3) Relation utile en mécanique:

Montrer que le vecteur de composantes $\gamma_i = u_{i,j}u_j$ dans un repère donné n'est autre que le vecteur $\bar{\gamma} = grad\dfrac{U^2}{2} + (\overrightarrow{rot}\bar{U}) \wedge \bar{U}$.

4) Propriétés du mouvement d'un solide parfait :

On considère un solide parfait de rotation instantanée $\bar{\Omega}(t)$ ~~par rapport à~~ autour d' un ~~repère~~ point fixe donné. O
Soient $\bar{V}(M)$ et $\bar{\gamma}(M)$ les champs respectifs des vitesses et accélérations associés à ce solide.

Appliquer dans un repère ~~lié au solide~~ fixe d'origine O, les opérateurs différentiels *div* et *rot* respectivement aux champs $\bar{V}$ et $\bar{\gamma}$.

Daniel

ENSEM(1ère année) Année Universitaire 1997/1998

Module : MATHEMATIQUES
Feuille d'exercices N° 2 de Mathématiques
proposée par Bilal Baraké.
Thème : **Invariants - Directions principales - Valeurs propres.**
(2ème cours du 30/9/97)

I) Directions principales et valeurs propres d'un tenseur :

Exercice 1 :

Donner les directions principales et les valeurs propres d'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ dont les composantes dans un certain repère orthonormé sont définies par :

$$t_{ij} = \lambda\, a_i\, a_j + \mu\, \delta_{ij}$$

λ et μ étant des constantes et a_i les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ donné.

Exercice 2 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux champs de vecteurs unitaires quelconques. En un point donné, le tenseur $\overline{\overline{T}}$ est défini par ses composantes

$$t_{ij} = \lambda\,(\, u_i\, v_j + u_j\, v_i \,) \qquad (\lambda > 0)$$

Déterminer ses directions principales, ses valeurs propres, sa partie sphérique et son déviateur.

II) Invariants élémentaires d'un tenseur du second ordre :

Montrer que les invariants élémentaires d'un tenseur $\overline{\overline{T}}$ s'expriment en fonction des traces de $\overline{\overline{T}}$, $\overline{\overline{T}}^2$ et $\overline{\overline{T}}^3$. Qu'en est-il dans le cas particulier d'un déviateur $\underline{\underline{D}}$?

III) Propriétés de quelques tenseurs des contraintes particuliers :

(Les tenseurs des contraintes considérés ci-dessous sont toujours symétriques.)

Exercice 1 :

Un tenseur des contraintes est dit **uniaxial** (de <u>traction simple</u> ou <u>compression simple</u>) dans la direction x_k si, au point considéré, toutes les composantes σ_{ij} sont nulles à l'exception du terme σ_{kk} de la diagonale.

Donner une condition nécessaire et suffisante relative aux invariants d'un tenseur des contraintes Σ pour qu'il soit uniaxial dans une direction quelconque de R^3.

Exercice 2 :

Un tenseur des contraintes est dit de **cisaillement simple** dans les directions orthogonales ox_k, ox_l si tous les σ_{ij} sont nuls à l'exception de $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante relative aux invariants d'un tenseur des contraintes Σ pour qu'il soit de cisaillement simple dans deux directions orthogonales quelconques de l'espace.

1 / Daniel

ENSEM(1ère année) Année Universitaire 1997/1998

Module : MATHEMATIQUES
Feuille d'exercices N° 3 de Mathématiques
Responsable : Daniel Margerit
Thème : **Analyse tensorielle.**
(3ème cours du 6/10/97)

I) Champ de gradient:

Soit $\vec{U} = \varphi(\theta)\,\overrightarrow{grad}\,\theta$ un champ de vecteurs de E^3 défini sur un domaine Ω de E^3, $\theta \in C^2(\Omega)$ et φ une application différentiable de ~~$C^2(\Omega)$ dans $C^1(\Omega)$~~. $C^1(\mathbb{R})$.

Montrer que $\vec{U}$ définit un champ de gradient.

II) Relation de compatibilité et calcul de champ de déplacement:

(Les calculs qui suivent sont classiques en Mécanique des Milieux Continus pour calculer un champ de déplacement $\vec{U}$ à partir du tenseur des déformations linéarisé obtenu pour écriture des équations d'équilibre)

Exercice 1:

On définit le tenseur :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \varphi(\underline{x})\overline{\overline{\mathbb{1}}},$$

où φ est une application de E^3 dans R et $\overline{\overline{\mathbb{1}}}$ le tenseur unité.
↳ $C^1(E^3, \mathbb{R})$.

Quelle est la forme la plus générale de φ telle que $\overline{\overline{\varepsilon}}$ soit la partie paire (ou symétrique) d'un tenseur $\overline{\overline{grad}}\ \vec{U}$? Donner l'expression générale de $\vec{U}$.

Exercice 2:

Considérons la fonction $\varphi : (x_1, x_2, x_3) \in E^3 \longrightarrow \varphi(x_1, x_2, x_3) \in R$

et le champ de tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$ de composantes $\varepsilon_{ij} = \varphi_{,i}\varphi_{,j}$.

a) Donner les directions principales et valeurs propres de $\overline{\overline{\varepsilon}}$.

b) A quelle équation aux dérivées partielles doit satisfaire la fonction φ pour que $\overline{\overline{\varepsilon}}$ soit la partie symétrique d'un champ de tenseur gradient de $\vec{U}$ ($\vec{U}$ champ vectoriel de E^3) ?

c) Y a-t-il des solutions harmoniques φ ($\Delta\varphi = 0$) ? Donner une expression générale de $\vec{U}$ dans ce dernier cas.

Exercice 3:

On obtient, pour une poutre en flexion, le champ de déformation linéarisé de composantes

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{-Mx_2}{EI} \\ \varepsilon_{\ell\ell} = \dfrac{\sigma M x_2}{EI} = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \dfrac{M}{EI}$

Sachant que le tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ de composantes ε_{ij} est relié au champ de déplacement $\vec{U}$ par les relations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Montrer que le champ ε_{ij} ci-dessus est effectivement intégrable et calculer le champ des déplacements associé sachant que les conditions d'encastrement se traduisent à l'origine $\underline{x} = 0$ par

$$\vec{U} = \overrightarrow{rot}\,\vec{U} = 0$$

Daniel.

ENSEM(1ère année) Année Universitaire 1997/1998

Module : MATHEMATIQUES
Feuille d'exercices N° 4 de Mathématiques
proposée par : Florence Biguenet
Thème : **Quelques problèmes**
($4^{ème}$ cours du 13/10/96)

I Exercices d'algèbre tensorielle :

1 - Montrer que si un tenseur du second ordre est symétrique dans une base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$, il l'est dans toute autre base $\{\vec{e}_i^{\,'}\}$.

----

2 - Soient t_{ijkl} les composantes dans un repère d'un tenseur T d'ordre 4 . Démontrer que $s_{jl}=t_{ijil}$ sont les composantes dans ce même repère d'un tenseur $\overline{\overline{S}}$ d'ordre 2. On utilisera pour cela la définition 3 du polycopié p.11. Cette vérification justifiera alors une extension de l'opérateur "contraction" à des indices non adjacents.

----

3 - Calculer $\det(\overline{\overline{\mathbf{1}}}+ \vec{u}\otimes\vec{v})$ et montrer en particulier que ce déterminant vaut 1 lorsque les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux.

a) en se servant de la formule du déterminant

b) en cherchant les valeurs propres du tenseur

----

4 - On considère un tenseur $\overline{\overline{T}}$ représenté dans un repère R par la matrice :

$$T = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \ldots\ldots & x_1x_N \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_Nx_1 & x_Nx_2 & \ldots\ldots & x_N^2 \end{bmatrix}$$

Écrire $\overline{\overline{T}}$ à l'aide des notations indicielles puis donner une expression intrinsèque de T.

----

5 - On considère trois vecteurs $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ de R^3 et on désigne par **T** le tenseur défini par

$$\mathbf{T} = (\vec{U}\wedge\vec{V})\otimes\vec{W}$$

a)Quel est l'ordre de ce tenseur ? Donner son expression dans une base orthonormée $\{\vec{e}_i\}$.

b) Donner une expression intrinsèque de la trace de **T**

c) On suppose maintenant que $\vec{W}$ est orthogonal au plan défini par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$; montrer alors que **T** est symétrique. Que dire à priori de ses valeurs propres et directions principales dans ce cas?

d)On se place dans le cas particulier décrit en c) et l'on suppose de plus que $\vec{W}$ est unitaire; déterminer alors sans calcul les directions et valeurs propres de $\mathbf{T}$.

----

6 - Définition et propriété d'un déviateur :

On désigne par d_i (pour i=1,2,3) les trois valeurs propres réelles où complexes d'un déviateur D; écrire le polynôme caractéristique de D pour chacune de ses valeurs propres et en déduire l'identité : $3d_1d_2d_3 = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3$.

II Exercices d'analyse tensorielle :

1.- Étude d'un champ de vecteurs radial:

On considère le vecteur $\vec{V}(M) = \mathbf{A}.\dfrac{\overrightarrow{OM}}{r2}$ de R^3 où $\mathbf{A}$ est un tenseur constant du second ordre et r le rayon sphérique : $r^2 = x_k x_k \quad k \in \{1,2,3\}$. Donner les conditions sur $\mathbf{A}$ pour que l'une des relations suivantes soit satisfaite:

a) $\mathrm{div}(\vec{V}) = 0$

b) $\mathrm{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$

Il est demandé de ne pas utiliser les coordonnées sphériques.

----

2 - Calculer $div\left[\varphi(x)\ \vec{U}(x) \otimes \vec{V}(x)\right]$.

----

3 - Montrer que $\displaystyle\iiint_{\Omega} rotU d\tau = \iint_{\partial\Omega} \vec{n} \wedge \vec{U} d\sigma$ où Ω est un domaine de R^3 et $\vec{n}$ la normal extérieure au bord $\partial\Omega$ de Ω.

----

4 - Astuces de calcul en coordonnées cylindriques :

Soient (O, x_1, x_2, x_3) un repère absolu orthonormé dans R^3 dont les vecteurs unitaires de bases sont $\vec{e}_i$ et M (de coordonnées x_i) un point de R^3 dont on désignera par H la projection orthogonale sur Ox_3. On considère le vecteur particulier :

$\vec{V}(M) = \mathbf{A}.\overrightarrow{HM} + \varphi(r, x_3)\ \vec{e}_3$

où r désigne le rayon cylindrique défini par $r^2 = x_\alpha x_\alpha \quad \alpha \in \{1,2\}$et $\mathbf{A}$ est un tenseur constant du second ordre sur R^2 (composantes $a_{\alpha\beta}$).

a)Montrer en dérivant l'expression précédente de r^2 par rapport à x_j que

$r_{,j} = \dfrac{x_\alpha}{r}\ \delta_{\alpha j} = r_{,\alpha}\delta_{\alpha j}$.

b)Écrire les conditions sur $\mathbf{A}$ et φ pour que $div\vec{V} = 0$.

c)Même question pour que cette fois $rot\vec{V} = 0$.

----

5 - A propos d'un champ de gradients :

Soit $\mathbf{T}(x)$ un champ de tenseurs défini par :

$$\mathbf{T}(x) = [\alpha(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) + \beta\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3]x_1.$$

Écrire les composantes du tenseur dans la base $\{\vec{e}_i\}$. Montrer qu'il est la partie symétrique d' un champ de vecteurs $\vec{U}$. Que dire de l'unicité de $\vec{U}$?

Déterminer la solution générale du système $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = t_{ij}$.

III Application du calcul tensoriel à l'électromagnétisme :

Relation énergétique en électromagnétisme :

On rappelle que la puissance énergétique $P_{em}(\Omega)$apportée sous forme électromagnétique à un domaine volumique arbitraire Ω de l'espace est égale au flux entrant du vecteur de Poynting $\vec{E} \wedge \vec{H}$ à travers la frontière $\partial\Omega$ de Ω.

Donner en utilisant le théorème de la divergence généralisée et les astuces de calcul tensoriel l'expression de la densité volumique de puissance $p_{em}(M)$ (apportée en chaque point M de l'espace sous forme électromagnétique) en fonction de $\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{E}, \vec{J}$ et $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ où l'on rappelle que $rot\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ et $rot\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$.

IV Application du calcul tensoriel à l'élasticité :

Les équations de l'élasticité classique sont:

$i) div\overline{\overline{\Sigma}} + \vec{f} = 0$ traduisant l' équilibre

$ii) \overline{\overline{\Sigma}} = \lambda\varepsilon_1 \overline{\overline{\mathbf{1}}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}$ traduisant le comportement

$\overline{\overline{\Sigma}}$, tenseur symétrique du second ordre est le champ de contrainte de composantes σ_{ij}

$\vec{f}$ est un champ de forces volumiques extérieures

$\overline{\overline{\varepsilon}}(u)$de composantes ε_{ij} est la partie symétrique du tenseur gradU et U est le champ de déplacements et ε_1 est le premier invariant de $\overline{\overline{\varepsilon}}$

a) Donner l'équation aux dérivées partielles vectorielles vérifiée par U en fonction de $\vec{f}$.(On passera par les composantes de i) et ii) puis on remontera à 2 expressions intrinsèques équivalentes de l'équation cherchée.)

b) Exprimer $\overline{\overline{\varepsilon}}$ en fonction de $\overline{\overline{\Sigma}}$ (On passera par la trace de l'expression ii), et l'on posera en fin de calcul $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ *et* $\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{E}$.

c) En supposant que l'on connaisse un champ $\overline{\overline{\Sigma}}$ vérifiant i), écrire les relations que doivent satisfaire les σ_{ij} pour que l'on puisse déterminer un champ de déplacement U à partir de l'expression trouvée en b).

V Extraits de l'examen de l'année précédente

A) Etudes d'un tenseur simple du second ordre

Soit $\vec{u}$ vecteur unitaire fixe et

$$\mathbb{T}\ (\underline{x}) = \phi\ (\underline{x})\ \vec{u} \otimes \vec{u}$$

1) Valeur du déterminant de $\mathbb{T}$?
2) Vecteurs propres et valeurs propres de $\mathbb{T}$?
3) Expression et ordre du tenseur gradient de $\mathbb{T}$?
4) Condition nécessaire et suffisante sur ϕ pour que div $\mathbb{T} = 0$.

B) Opérations sur le second gradient d'un champ de vecteurs $\vec{U}$

Soient $\vec{U}$ un champ de vecteurs et $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}$ rot $\vec{U}$ son vecteur tourbillon de composantes ω_i

1) On pose $k_{i\ell} = \omega_{i,\ell}$, montrer que le tenseur K (de composantes $k_{i\ell}$) est un déviateur.

2) Exprimer $\varepsilon_{pmi}\ k_{i\ell}$ en fonction des dérivées secondes de $\vec{U}$.

3) On désigne par

$$k_{ij\ell} = \frac{1}{3}\left[u_{i,j\ell} + u_{j,\ell i} + u_{\ell,ij}\right]$$

la partie totalement symétrique de $u_{i,j\ell}$; déterminer, à l'aide du résultat de la question 2, le reste

$$r_{ij\ell} = u_{i,j\ell} - k_{ij\ell}$$

en fonction des composantes de $\mathbb{K}$.

4) Montrer alors que, quelque soit le tenseur du troisième ordre $\mathbb{T}$, la quantité

$$p = t_{ij\ell}\ u_{i,j\ell}$$

peut s'écrire sous la forme

$$p = d_{ij}\ k_{ij} + s_{ij\ell}\ k_{ij\ell}$$

dans laquelle d_{ij} et $s_{ij\ell}$ sont les composantes respectives d'un déviateur et d'un tenseur totalement symétrique en $ij\ell$ que l'on exprimera en fonction de $t_{ij\ell}$.